Problemas de Razonamiento Matemático

y cómo resolverlos

Por : Armando Tori Loza



COLECCIÓN RACSO

Problemas de
Razonamiento Matemático
y cómo resolverlos

Colección Racso

Dirigido por:

FÉLIX AUCALLANCHI VELÁSQUEZ

DEDICATORIA

A la memoria de Zacarías Tori mi padre, ejemplo de experiencia e inteligencia.

A mi querida madre Adela, por su abnegado apoyo y afanoso deseo de lograr mi superación.

A Shirley G., por su colaboración y motivación en la realización de mis proyectos.

J. Armando Tori L.

Primera edición en español

Printed in Peru - Impreso en Perú
Imprenta AURASA E.I.R.L. - Jr. Luna Pizarro 729 - Lima 13

SERIE DE LIBROS Y
COMPENDIOS
CIENTIFICOS
COLECCION RACSO

PROBLEMAS DE RAZONAMIENTO MATEMATICO Y COMO RESOLVERLOS

1ra EDICION

COLABORADORES:

Ing. Daniel Cartolin Camacho	UIGV
Ing. Jorge Chumberiza Manzo	UNI
Ing. Carlos Paucarpura C.	UNCP
Lic. Jorge Muchaypiña R.	ISPCH
Lic. Zenón Guerrero Panta	UNEGV
Lic. Eusebio Tito Bautista	UNA
Ing. Lucio Toledo Sarzoza	UNI

RACSO EDITORES LIMA

Título Original de la obra:
Razonamiento Matemático - Volumen I , II , III
© 1996, por *Armando Tori L.*

Título Actual de la obra:
Problemas de Razonamiento Matemático y cómo resolverlos
© 1998, por *Armando Tori L.*

Primera edición
Publicada por RACSO EDITORES - JULIO 1998

Supervisión general:
Ing. *Martín Casado Marquez* (UNI)
Profesor de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Ingenieria

Revisión de estilo:
Dr. Carlos Chávez Vega

Revisión Técnica :
Mr. Aurelio Games Cabanillas
Profesor de la Universidad Nacional Enrique Guzman y Valle (La Cantuta)

Composición, Diagramación e Ilustraciones:
Compañia Editorial: ***RACSO EDITORES***

Supervisión de la edición:
Miguel Angel Díaz Lorenzo

Compañia Editorial: *RACSO EDITORES*
Dirigida por: ***Félix Aucallanchi V.***

Primera edición en español

Printed in Peru - Impreso en Perú

1' LINCE
2' LUCANA

PROLOGO DEL AUTOR

El propósito de este nuevo volumen es el de reunir las publicaciones anteriores que vieron la luz con el nombre de Razonamiento Matemático Práctico la misma que estuvo compuesta por 3 tomos, con el agregado de un mayor número de ejercicios resueltos y propuestos los que han sido cuidadosamente seleccionados para elevar el nivel de las anteriores.

Al igual que mis publicaciones anteriores sobre esta materia, en este texto he tratado de inculcar en la mente de los lectores estudiantes, ciertos hábitos de *lógica y razonamiento* que estimulen sus energías intelectuales por medio de la resolución de problemas previamente clasificados y adaptados a sus capacidades.

De este modo, he pretendido que adquieran la pericia necesaria para enfrentarse a situaciones problemáticas específicas, al mismo tiempo afianzar una disciplina mental, de mucha utilidad para alcanzar éxitos en todo tipo de proyectos. Tener éxito con esta última pretensión, daría real y suficiente sentido a la existencia de este curso.

El medio más corto y seguro para aprender y aprehender lo expuesto en los resúmenes teóricos que se exponen al inicio de cada capítulo, es resolver problemas. Las reglas que acompañan a cada tema no están destinadas a ser memorizadas, sino más bien, para servir de ayuda al estudiante en la captación de los métodos más claros e inteligentes. Cada regla solo describe operaciones y su aplicación debe condicionarse al análisis y comprensión de las operaciones descritas en la misma. Advierto que el depender de reglas y fórmulas constituyen una forma de *esclavitud mental* que debe evitarse en lo posible.

Por estos motivos, en los primeros capítulos se da especial dedicación a la práctica del planteo de problemas, acompañada de suficiente cantidad de ejemplos ilustrativos. El lector encontrará en esta edición, una importante cantidad de problemas resueltos y propuestos, que se van clasificando por temas específicos y gradualidad en sus niveles de dificultad, los cuales exigirán habilidad y destreza en cada planteo. Los temas que requieren de tales exigencias, son por ejemplo los problemas relativos a : Números y Figuras, Edades, Fracciones, Porcentajes, Criptoaritmética, Razonamiento Lógico, Combinatoria, Máximos y Mínimos, ... etc.

También se ha considerado en la selección y elaboración de los problemas, enunciados con datos actualizados con una visión moderna de las matemáticas que se aplican en la vida cotidiana, lo que se aprecia sobre todo en el capítulo dedicado a los Gráficos Estadísticos y Problemas Mercantiles. Creo que este espíritu debe manifestarse en toda obra sobre Matemática que se publique en nuestros tiempos.

Espero que el contenido de estas páginas contribuya a los objetivos trazados y sea un vínculo con cada lector interesado por el Razonamiento aplicado a las Matemáticas.

Armando Tori L.

PROLOGO DEL EDITOR

Ante un mundo cambiante y cada vez más exigente, la selección de las personas en la mayoría de los casos se hace teniendo en cuenta su modo y rapidez de ver y resolver problemas académicos, técnicos o de la vida diaria. Un buen entrenamiento y mejor aún, una buena formación en las aptitudes matemáticas, es una necesidad de impostergable satisfacción.

Todos quienes alguna vez hemos debido postular a un trabajo calificado o a un centro de estudios de nivel superior, recordaremos que en el examen de ingreso, se nos han propuesto preguntas de aptitud matemática. Para algunos - *los más conocedores* - ciertas preguntas han podido resultar muy laboriosas a pesar de tener un buen conocimiento de las herramientas matemáticas vistas en el colegio y/o en la academia. Tal examen es conocido en nuestro país con el nombre de Razonamiento Matemático.

Debo confesar también, que entre quienes nos hemos dedicado a la enseñanza pre-universitaria, veíamos al curso de Razonamiento Matemático con cierto desdén, y esto porque suponíamos que allí no se hacía más que un repaso de toda la matemática elemental. Sin embargo y a Dios gracias hubo alguien a quien conocí como un excelente profesor y con quien tuve la honrosa misión de laborar en los mismos centros de enseñanza preuniversitaria. El siempre tuvo un particular modo de ver su curso -Razonamiento Matemático - defendiéndolo, desarrollándolo y asignándole un lugar especial entre los demás cursos preuniversitarios; este amigo y colega es: Armando Tori Loza, que para referencia de los lectores fué 1^er^ puesto del cómputo general del examen de admisión a la UNMSM, graduado como ingeniero en la UNI y un reputado profesor de matemáticas con más de 20 años de experiencia.

El poseer una muy buena y extensa bibliografía - de matemática formal y recreativa - le ha proporcionado un amplio conocimiento de situaciones matemáticas reflexivas, lo que al llevarlo a la práctica con sus alumnos, les permite a éstos disponer de incuestionables artificios y métodos cortos, que para un importante número de ejercicios tipos de aspectos rigurosos y/o confusos, logran llegar a la respuesta de un modo más rápido y efectivo.

Era pues una necesidad que este profesional pudiera plasmar en un libro parte de sus conocimientos y experiencias, y en mi calidad de editor, era una obligación impostergable, invitarlo a realizar dicho trabajo. Por un feliz acuerdo entre él y la editorial RACSO, el presente volumen tuvo una edición preliminar presentada como una colección de tres fascículos que llevaron por nombre: RAZONAMIENTO MATEMATICO PRACTICO, los cuales se han reunido en uno solo, para la actual edición, para lo cual se han tenido en cuenta las innumerables sugerencias y opiniones de parte de quienes se dedican a la enseñanza de este curso y que tuvieron a bien transmitirnos sus inquietudes sobre dichas ediciones. En esta nueva edición se encontrarán cambios notables con relación a la anterior : El número de problemas resueltos es significativamente mayor, las exposiciones teóricas de cada tema se han visto enriquecidas, y los problemas propuestos se han duplicado en el número y en su nivel de dificultad con lo cual esperamos satisfacer las distintas opiniones recibidas.

Estoy totalmente seguro que así como he quedado satisfecho de la lectura de los manuscritos, por su increíble sencillez y precisión matemática, los lectores experimentarán la visión de la matemática formal de un modo fresco y menos confuso.

Atentamente:

Félix Aucallanchi Velásquez

AL ESTUDIANTE

En nuestro país, la mayoría de los egresados de la educación secundaria, encuentran en el curso de razonamiento matemático un apoyo para satisfacer su demanda de puntaje en el ingreso a la universidad . Debo reconocer que tal sentimiento es compartido también por la mayoría de mis colegas que enseñamos el mismo curso. Esto nos permite ser aceptados de manera inmediata por nuestros eventuales alumnos, a quienes al inicio solo les interesa ser adiestrados de la mejor forma para encarar los problemas tipos que suelen proponerse en dichos exámenes.

Creo oportuno agregar algo más en favor del razonamiento matemático, y es que además de ayudarnos a elevar nuestro puntaje en el examen de admisión, también nos hace desarrollar nuestro razonamiento en general. Esto se verá enormemente favorecido si se tiene la disposición de la lectura y en especial de aquella bibliografía referida a las matemáticas recreativas. Se verá en ellos una enorme aplicación a la vida cotidiana, pues ésta nos proporciona todas las situaciones que suelen ser expuestas en los enunciados de los problemas de este curso. Para contribuir de algún modo con tales objetivos he creído conveniente insertar en este texto algunas lecturas referidas a las matemáticas reflexivas y a las matemáticas recreativas.

Sugiero estar siempre atentos al planteo de problemas por parte de su profesor a quien debemos hacerle llegar todas nuestras inquietudes referidas a la resolución de los problemas y si se ha ganado tu confianza, plantea la siguiente pregunta : ¿Exite algún otro método para resolver tal o cuál problema? Responderla le demandará mucha creatividad y paciencia, sin embargo, los frutos obtenidos con tales sacrificios bien lo merecen.

El texto "Problemas de Razonamiento Matemático y cómo resolverlos" se pone a tu disposición, con la finalidad de satisfacer tus requerimientos con respecto al curso. El resúmen teórico que se expone en el inicio de cada capítulo no debe ser necesariamente memorizado, dejar esto al ejercicio contínuo, para lo cual se han presentado una gran variedad de problemas resueltos y propuestos que han sido cuidadosamente ordenados teniendo en cuenta el nivel de dificultad que presentan cada uno de ellos; esto te permitira tener un amplio dominio del capítulo tratado.

Recomiendo al estudiante, para un mejor manejo del texto seguír las siguientes normas:

1°) Repasar atentamente el resúmen teórico del capítulo a tratar.

2°) Repasar los ejercicos y problemas resueltos, observando en cada uno de ellos, la aplicación de su resúmen teórico.

3°) Intentar por tu propia cuenta los ejercicios y problemas resueltos y luego comparar tus pasos con aciertos y/o desaciertos con la resolución que presentamos para cada problema.

4°) Entrenarse con los ejercicios y problemas propuestos y consultar con tu profesor sobre tus dificultades y nuevos métodos.

Finalmente esperando que "Problemas de Razonamiento Matemático y cómo resolverlos" logren en tí una mayor capacidad de raciocinio, no me queda mas que desearte éxitos en tu meta trazada.

Atentamente :

El Autor

AL PROFESOR

Existe la confusa opinión de que el Razonamiento Matemático no existe como curso, ya que se considera como una aplicación especial de la matemática convencional a determinadas situaciones problemáticas específicas. Espero que tal opinión encuentre mejores argumentos que los conocidos, puesto que en lo personal y como parte de los profesores de matemática de este país, tenemos suficientes argumentos para considerar al razonamiento matemático un curso como cualquier otro.

Esta opinión se sustenta en los distintos aportes encontrados a nivel mundial y a lo largo de estos últimos 150 años por parte de quienes se dedican al estudio de las matemáticas reflexivas y matemáticas recreativas. Sugiero empezar por la novela escrita por un matemático inglés a mediados del siglo pasado y cuyo nombre es : «Alicia en el país de las maravillas» ; con ojos de matemático se encontrarán allí los primeros laberintos, las sucesiones, las series y las proposiciones lógicas, expuestos de un modo entretenido por el no menos brillante : Lewis Carroll.

Es importante destacar que uno de los personajes comtemporáneos más lúcidos en el desarrollo de los iniciales aportes de Lewis Carroll es sin duda, Martin Gardner, norteamericano de origen y filósofo de profesión , quien en éstas últimas décadas ha publicado una serie de artículos referidos a la matemética reflexiva y en especial sobre matemática recreativa.

Los primeros exámenes de admisión que incluían los temas de Aptitud Académica, contenían preguntas de Razonamiento Matemático propuestas en los exámenes de ingreso de centros laborables en Francia, y cuya solución requería del uso de las Matemáticas Elementales y de una buena dosis de Lógica.

Es lamentable que al paso de los años el espíritu inicial de dichos exámenes de admisión a las universidades de nuestro país, se haya ido perdiendo, dando paso a preguntas que no corresponden de ningún modo al razonamiento en si. Una pregunta de este tema debe poseer necesariamente un argumento matemático que invite a la reflexión y cuya resolución no requiera de una gran dosis de complejidad . Asi pues, podemos calificar que una pregunta es de razonamiento matemático, cuando existe una resolución que recurre muy poco a las herramientas matemáticas convencionales.

Desde mi perspectiva y con mucha modestia, sugiero a mis colegas que enseñen este curso, disponer de un suficiente conocimiento de las matemáticas elementales y superiores, y asi mismo un buen dominio de la lógica formal; se verá que con tales conocimientos se encontrará un terreno fértil para la creación de situaciones problemáticas referidas al razonamiento matemático que para los ojos de un lector medio, se tratará de un problema interesante y poco complejo. Por lo general estos lectores se verán tentados de usar todo su bagaje de matemáticas. Resultará muy agradable presentarles luego una elegante y corta resolución del mismo problema.

Espero satisfacer en cierto modo la expectativa creada por mis anteriores publicaciones sobre razonamiento matemático y agradeceré a todo aquel que lo estime conveniente alcanzarnos su opinión y sus críticas relativas al presente trabajo.

Atentamente:

El Autor

INDICE GENERAL

Página

SIMBOLOS

$\{1; 2; 3\}$	conj. con elementos 1, 2 y 3
N_0	conj. de los números naturales: 0; 1; 2; 3; ...
N	conj. de los números naturales: 1; 2; 3; ...
Z	conj. de los números enteros:...; -2; -1; 0; 1;
Z^+	conj. de los números enteros positivos
Z^-	conj. de los números enteros negativos
Q	conj. de los números racionales
Q'	conj de los números irracionales
$\Re$	conj. de los números reales
$\Re^+$	conj. de los números reales positivos
$\Re^-$	conj. de los números reales negativos
C	conj. de los números complejos
i	símbolo que representa a $\sqrt{-1}$
$\{\}$ o $\emptyset$	conjunto nulo o vacío
$\in$	pertenece a ...
$\notin$	no pertenece a ...
$A \subset B$	A es subconjunto de B
$A \cap B$	A intersección B
$A \cup B$	A unión B
A', o, $\complement_A$	complemento del conj. A
$\nexists$	existe
$\exists$	no existe
$\nexists!$	existe un único
$\exists!$	no existe un único
$\forall$	para todo
$\forall$	no para todo
Σ	suma, o, sumatoria
$(x; y)$	un par ordenado de números
$d_{(A, B)}$	distancia entre los puntos A y B
$\rightarrow$ o $\therefore$	implica, luego, por lo tanto
$\leftrightarrow$	es equivalente a, implica en ambos sentidos
$\Rightarrow$	entonces

$\Leftrightarrow$	si y solo si
/	tal que
=	igual
$\neq$	desigual, distinto
$\equiv$	idéntico
$\approx$	aproximadamente
$2n$	número par $(n \neq 0)$
$2n + 1$	número impar $(n \in Z)$
$2n - 1$	número impar $(n \in N)$
$\propto$	proporcional a
$\lvert a \rvert$	valor absoluto de a
$a > b$	a es mayor que b
$a < b$	a es menor que b
$a \geq b$	a es mayor o igual que b
$a \leq b$	a es menor o igual que b
$a \gg b$	a es mucho mayor que b
$a \ll b$	a es mucho menor que b
$a < c < b$	c es mayor que a y menor que b
$\sim$	semejante
$\cong$	congruente
$\wedge$	y
$\vee$	o
$f(x)$	función de x
$f^{-1}(x)$	función inversa de x
$n!$	factorial de $n = n.(n-1).(n-2). \ldots ().2.1$
sen x	*seno* del número x
cos x	*coseno* del número x
tg x	*tangente* del número x
ctg x	*cotangente* del número x
sec x	*secante* del número x
csc x	*cosecante* del número x
lím	límite

1 Métodos Básicos de Solución

No basta con que los estudiantes sepan restar o dividir para que sean capaces de resolver y utilizar la resta o la división como instrumentos adecuados para resolver un problema determinado.

Tampoco basta con que hagan muchos ejercicios y problemas tipos para creer que acrecientan convenientemente su capacidad para resolver problemas.

Las dificultades que uno encuentra a la hora de resolver un problema revisten muchos aspectos. A veces son muchas las variables en juego, no es fácil enumerarlas todas y no es posible diseñar una estrategia metodológica general y válida para todos los problemas.

Lo que pretendemos en este capítulo es clasificar en cuanto sea posible aquellos problemas que requieren un proceso de razonamiento básico, que no vaya más allá de cálculos ariméticos que cualquier principiante domine, advirtiendo que en un inicio no le quedará claro el proceso mental posterior, aquel que permite intuir la solución del problema y no podemos dar una receta para lograr este propósito. En este capítulo ejercitaremos una *aptitud* para enfrentarlos y mejorar las técnicas matemáticas ya adquiridas por el estudiante.

I) SUGERENCIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

1.1.1. PROBLEMAS DE SUMAR Y RESTAR

Aquí conviene dominar la relación "*partes-todo*", es decir, la acción reversible de agrupar, así, descomponer es la clave para resolver las situaciones *aditivo-sustractivos*. Es necesario pues que la adición y la sustracción sean concebidas ambas como operaciones mentales que relacionan *el todo y las partes*.

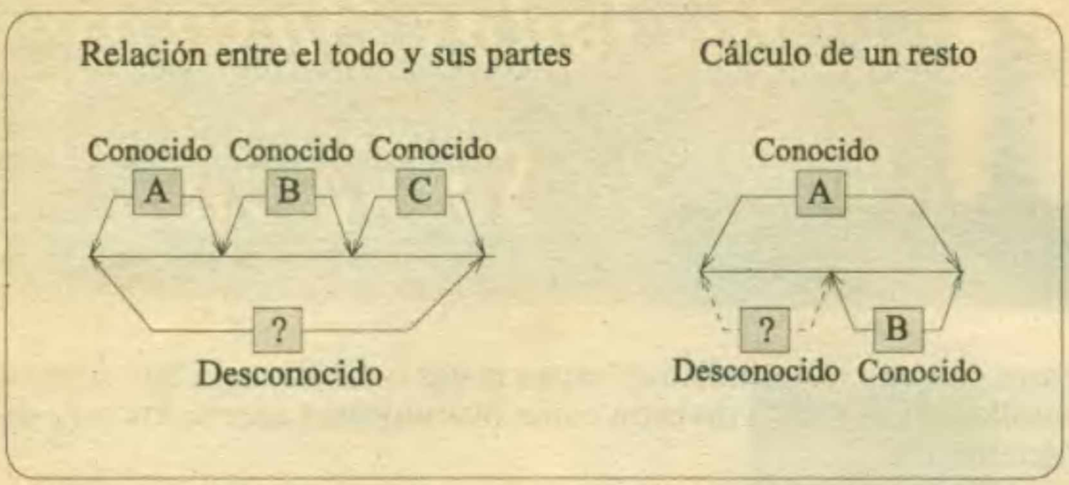
Te recomiendo dominar estas ideas:

a) Al todo le quito una parte para calcular lo que queda

b) ¿Qué tengo que añadir a una parte para conseguir el todo?

c) ¿Cuánto más hay en una parte que en la otra?

Además se pueden realizar esquemas apropiados para cada situación, hasta que la operación que resuelve el problema sea evidente, clara y "salte" a la vista.



1.1.2 PROBLEMAS DE MULTIPLICAR Y DIVIDIR

Se necesita una cabal comprensión del carácter inverso que presentan las acciones "*reunir partes iguales*" y "*repartir en partes iguales*" para tener éxito en el correcto empleo de una multiplicación o división.

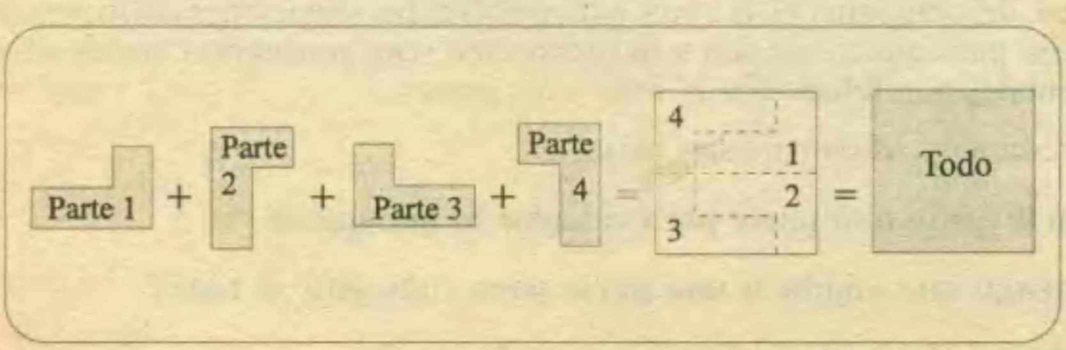
Por ejemplo: "Repartimos lapiceros en 60 cajas. Metemos 6 lapiceros en cada caja. ¿Cuántos lapiceros se repartieron?"

Algunos alumnos pueden plantear una división, aunque el resultado no tenga ningún sentido lógico ni mucho menos objetivo. Digo esto porque es ilógico repartir 60 cajas en 6 lapiceros cuando lo correcto aquí es hacer una multiplicación.

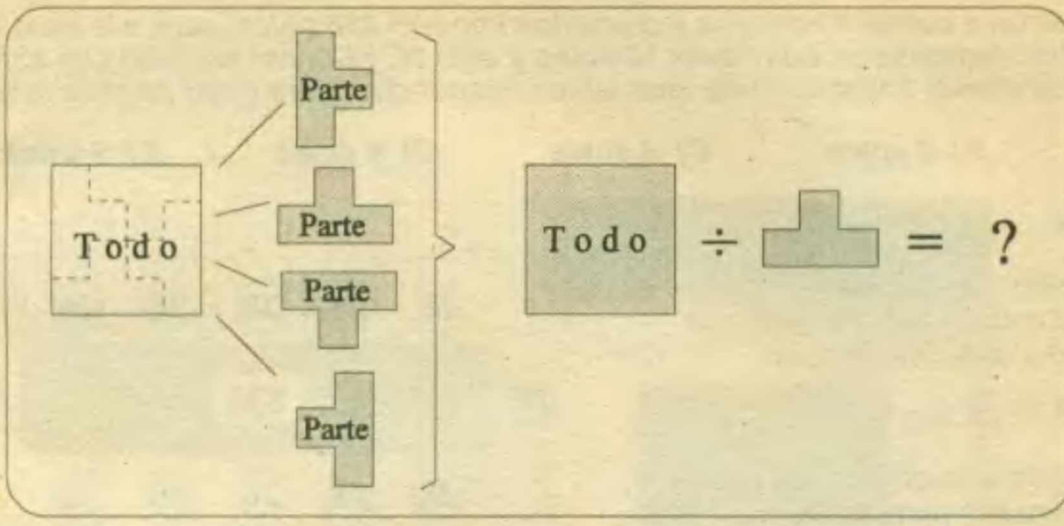
Las reacciones ante este tipo de preguntas suelen ser demasiado rápidas, lo que implica adiestramientos ciegos en la resolución de problemas. Cuando se lee en un problema las palabras "*repartir*"o "*juntar*", el hecho de plantear automáticamente una división o multiplicación respectivamente, puede ser incoherente.

En el fondo, se debe tener en claro dos grandes modelos de problemas:

a) Aquellos en lo que desconociendo "*el todo*" hay que hallarlo, utilizando lo conocido que son "*las partes*". (En estos problemas generalmente hay que sumar y multiplicar)



b) Aquellos en que conociendo "*el todo*" , se pregunta por algo que está relacionado con "*las partes*" (Para estos problemas se debe restar y dividir)



1.1.3. PROBLEMAS COMBINADOS

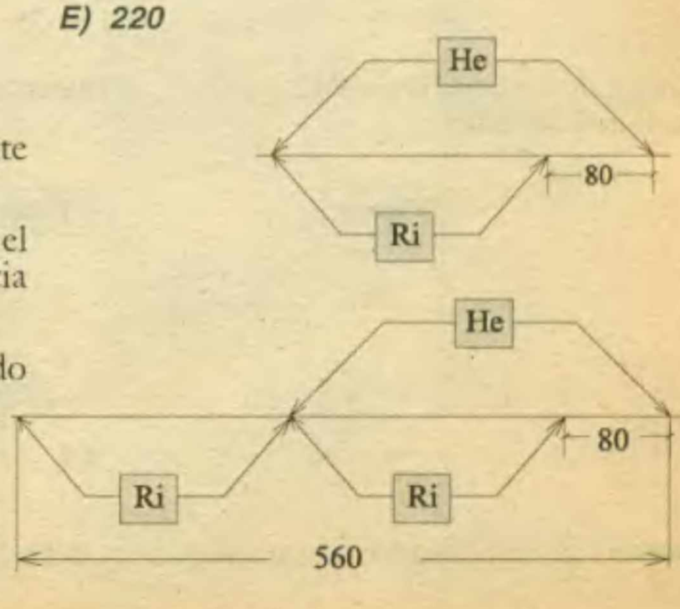
Entenderemos como combinados aquellos problemas que se componen de una asociación de problemas elementales o que requieren para su solución plantear varias operaciones distintas.

Un problema combinado puede tener una redacción con muchos datos y una sola pregunta final. Estos suelen ser más difíciles de resolver, sobre todo si el alumno está falto de entrenamiento, por lo que se hace imprescindible practicar con esmero, recurriendo primero a una adecuada selección de problemas tipos como la que enseguida proponemos, y luego intentar con un grupo de problemas similares.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- La diferencia entre los ingresos semanales de Ricardo y Helena es de 80 dólares. La suma de sus ingresos semanales es 560. Si Helena es la que gana más ¿Cuánto gana Ricardo?

A) 480 B) 240 C) 120 D) 360 E) 220



Resolución:

Para el primer dato (la diferencia) es suficiente con el esquema adjunto :

Para el segundo dato (la suma) repetimos el segmento que representa a Ricardo, pero hacia el lado izquierdo:

Se aprecia que el *doble* de lo que gana Ricardo es: 560 - 80 = 480

Entonces Ricardo gana:

480 ÷ 2 = **240** RPTA. B

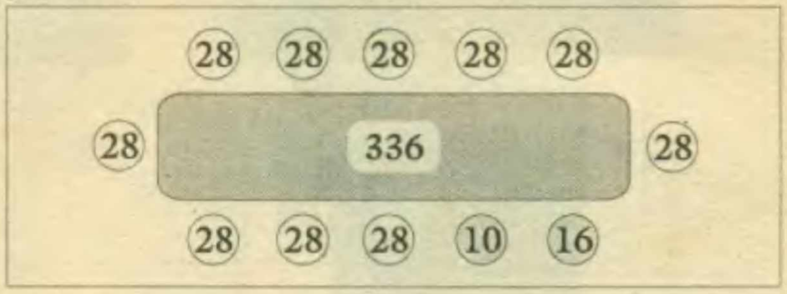
2.- Se reunieron a comer 12 amigos y la comida importó 336 soles ,pero a la hora de pagar, uno de los comensales sólo tenía 10 soles y otro 16. ¿Cuánto tuvieron que abonar cada uno de los demás sobre la cuota que les correspondía , para dejar pagada la cuenta?

A) 1 sol ***B) 2 soles*** ***C) 3 soles*** ***D) 4 soles*** ***E) 5 soles***

Resolución:

Primero dividimos el importe (336) entre el # de amigos (12) para conocer la cuota que a cada uno le toca:

$336 \div 12 = 28$ *soles*



Luego calculamos lo que les falta pagar a los 2 comensales mencionados:

$28 - 10 = 18$ *soles* ; $28 - 16 = 12$ *soles*

Para cubrir esto: $18 + 12 = 30$ *soles*, las 10 personas restantes deben abonar:

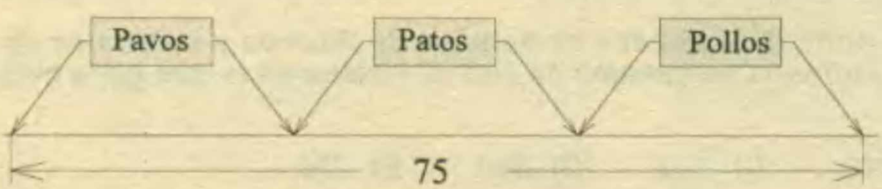
$30 \div 10 =$ **3 *soles* cada uno** RPTA. C

3.- Entre pollos, patos y pavos, un granjero tiene un total de 75 aves. Si tuviera 12 pavos más, 4 patos más y 7 pollos menos, tendría una cantidad igual de aves de cada especie. El número de pollos que tiene es:

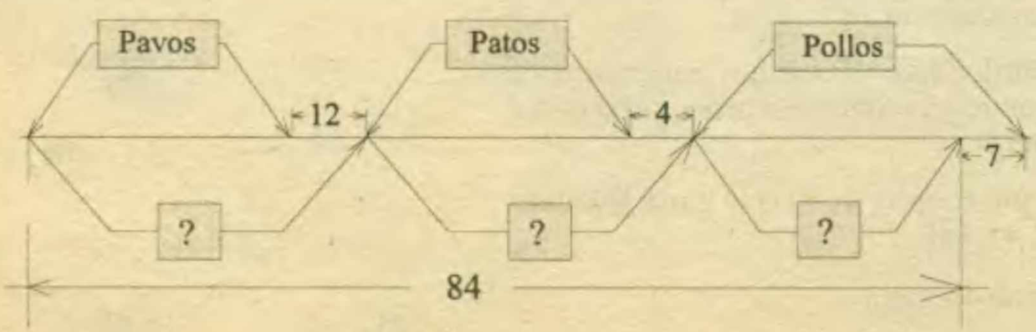
A) 30 ***B) 21*** ***C) 35*** ***D) 33*** ***E) 27***

Resolución:

Planteamos la situación inicial en el siguiente esquema:



Luego de los cambios: +12 , +4, -7, el nuevo total es: $75 + (12+4-7) = 84$ aves y el nuevo esquema sería así :



Dentro de cada signo de interrogación debe figurar la misma cantidad de aves, es decir

$84 \div 3 = 28$, y antes de los cambios los números para cada especie eran:

Pavos : $28 - 12 = 16$; Patos : $28 - 4 = 24$; Pollos : $28 + 7 =$ **35** RPTA.C

4.- Un auto recorre 10 km por litro de gasolina, pero además pierde 2 litros por hora debido a una fuga en el tanque. Si cuenta con 40 litros de gasolina y viaja a 80 km/h. ¿Qué distancia logrará recorrer ?

A) 320 km B) 400 km C) 240 km D) 800 km E) 720 km

Resolución:

Debemos averiguar primero cuántos *litros* gasta el vehículo en cada hora, veamos:



- En una 1 *hora* recorre 80 *km* y esto requiere: $\frac{80}{10} = 8$ *litros* de gasolina.
- A demás pierde 2 *litros* por *hora*.
- Esto da un gasto por *hora* de: $8 + 2 = 10$ *litros*.

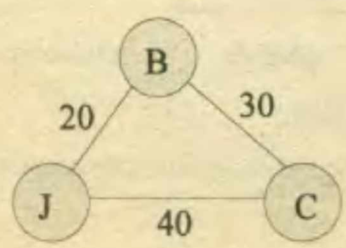
Esta conclusión es importante: En 1 *hora* se consumen 10 *litros*, luego los 40 *litros* le durarán $\frac{40}{10} = 4$ *horas*.

En este tiempo puede recorrer : $80 \times 4 =$ **320 km** RPTA. A

5.- Juan le debe a Bruno 20 soles, Bruno le debe a Carlos 30 soles y Carlos le debe a Juan 40 soles. Todas estas deudas pueden quedar canceladas si:

A) Bruno paga 10 soles a Carlos y Carlos paga 10 soles a Juan.
B) Carlos paga 10 soles a Juan y Bruno respectivamente.
C) Carlos paga 20 soles a Juan.
D) Bruno y Carlos pagan 10 soles cada uno a Juan.
E) Juan paga 20 a Carlos.

Resolución:



Simplificamos las cuentas separadamente:

	Paga	Recibe	Saldo
Juan	- 20	+ 40	+20
Bruno	- 30	+ 20	- 10
Carlos	- 40	+ 30	- 10

Observando los saldos, concluímos que Juan debe recibir 20 *soles* y esto puede suceder si Bruno y Carlos le pagan a Juan 10 *soles* cada uno.

RPTA. C

6.- *Un kilogramo de monedas de un nuevo sol vale el doble de un kilogramo de monedas de 0,20 soles. Si cada moneda de 0,20 nuevos soles pesa 10 gramos. ¿Cuánto valen 5 kilogramos de monedas de un nuevo sol?*

A) S/.250   ***B) S/.100***   ***C) S/.500***   ***D) S/.50***   ***E) S/.200***

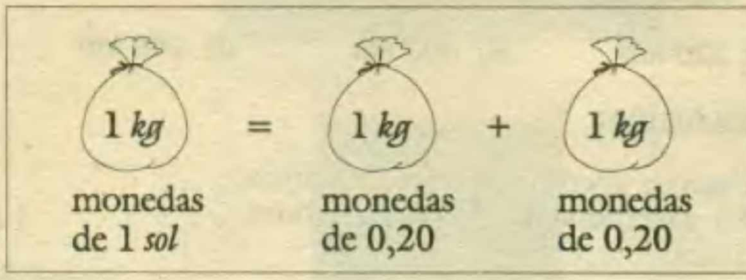
<u>Resolución</u>.-

Si cada moneda de 0,20 pesa 10*gramos*, podemos averiguar cuántas de estas monedas hacen un *kilogramo* (1000*g*).

$1000 \div 10 = 100$ monedas.

En dinero, esto significa :

$100 \times (0{,}20) = 20$ *soles.*



1[era] Conclusión : 1 *kilogramo* de monedas de S/.0,20 vale 20 *nuevos soles.*

2[da] Conclusión : 1 *kilogramo* de monedas de un *sol* vale el doble: 40 *nuevos soles*.

Ya podemos responder que 5 *kilogramos* de monedas de un sol valen :

5 * 40 = **S/.200**   RPTA. E

7.- *Para ganar 500 soles en la rifa de una moto se hicieron 900 boletos pero no se vendieron más que 750 boletos y se originó una pérdidas de 100 soles. ¿Cuánto vale la moto?*

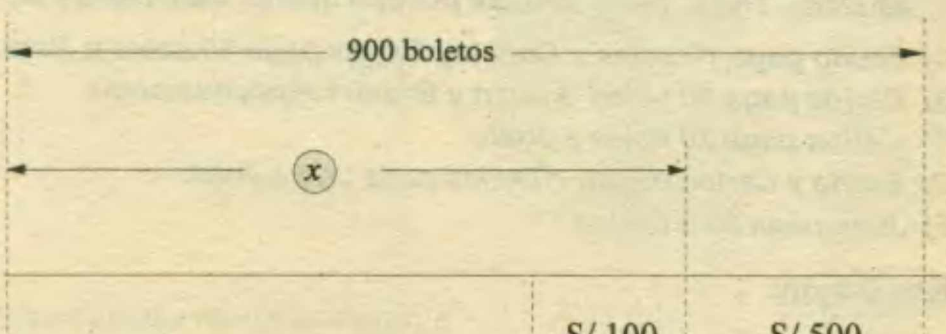
A) 3000   ***B) 3100***   ***C) 3200***   ***D) 3600***   ***E) 2800***

<u>Resolución</u>:

En el siguiente diagrama comprobamos lo que se debía recaudar con 900 *boletos* y lo que se llegó a recaudar con 750 *boletos.*

- x representa el valor de la *moto.*

- La recaudación de 900 boletos deja una ganancia de 500 *nuevos soles.*



- La recaudación de 750 *boletos* deja una pérdida de 100 *nuevos soles.*

- Esto significa que por : 150 *boletos*, la diferencia entre estas recaudaciones corresponde a una suma de : $100 + 500 = 600$ *nuevos soles.*

De esto deducimos que cada *boleto* costaba: $\frac{600}{150} = 4$ *nuevos soles.*

Y el valor de la moto : $x = 750$ *boletos* + S/.100

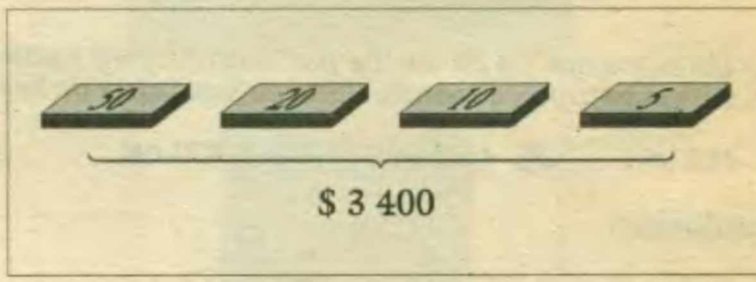
$x = 750 \times 4$ *soles* + S/.100 $\Rightarrow$ $x =$ **S/. 3 100**   RPTA. B

8.- Entre cuatro "cambistas" reunen 3 400 dólares. Los cuatro tienen igual número de billetes. El primero tiene solo billetes de 50 dólares, el segundo de 20 dólares, el tercero de 10 y el cuarto de 5 dólares. ¿Cuánto dinero tiene el poseedor de la mayor cantidad de dólares?

A) 1 600 *B) 400* *C) 2 000* *D) 4 000* *E) 1 500*

Resolución:

Si a cada *cambista* le pedimos 1 *billete*, reuniríamos:



$50 + 20 + 10 + 5 = 85$ *dólares*

Esta cantidad está contenida en el total:

$3\,400 \div 85 = 40$ *veces*

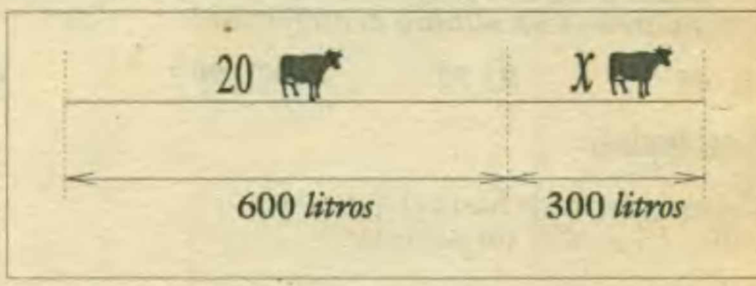
Por lo tanto, cada *cambista* tiene 40 *billetes*.

Luego el que tiene más, posee : $40 \times 50 =$ **2 000 *dólares*** RPTA. C

9.- La clientela de un lechero queda cubierta con 600 litros diarios que obtenía de sus 20 vacas. Pero aumentó la demanda al punto de exigirle 300 litros diarios más. ¿Cuántas vacas de la misma producción tendrá que agregar a las que ya tiene?

A) 12 *B) 8* *C) 15* *•D) 10* *E) 9*

Resolución:



La producción diaria de cada vaca es:

$\frac{600}{20} = 30$ *litros*.

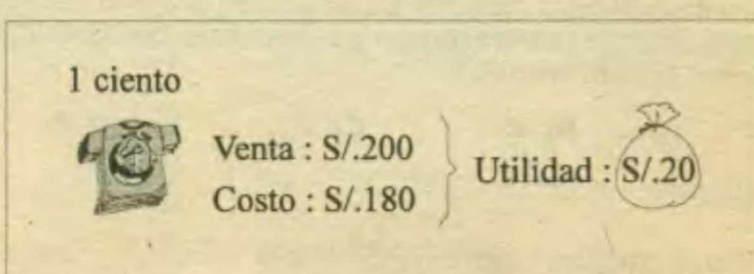
Para satisfacer la demanda adicional son necesarias:

$\frac{300}{20} =$ **10 vacas más** RPTA. D

10.- Compré un lote de polos a 180 soles el ciento y los vendí a 24 soles la docena, ganando en el negocio 600 soles. ¿De cuántos cientos constaba el lote?

A) 20 *B) 25* *C) 30* *D) 24* *E) Otro valor*

Resolución:



El precio de venta por unidad fue :

$\frac{24}{12} = 2$ *nuevos soles*.

El precio de venta por ciento :

$2 \times 100 = 200$ *nuevos soles*.

Como el precio de costo por ciento era 180 *soles*, la ganancia en un ciento de polos es 200 - 180 = 20 *soles*.

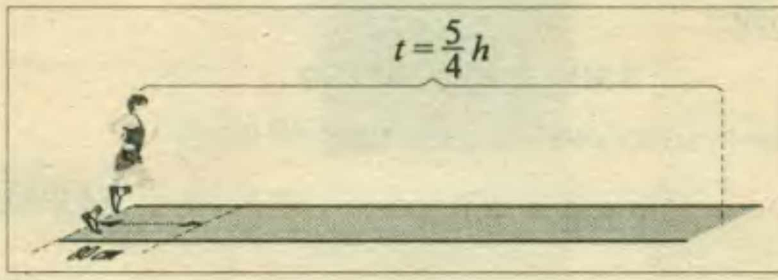
Si la ganancia total fue de 600 *soles*, el # de cientos comercializado fue :

$$600 \div 20 = \boxed{30} \qquad \text{RPTA. C}$$

11.- Un corredor da 80 saltos por minuto y en cada salto avanza 80 centímetros. De esta forma estuvo corriendo durante 5 cuartos de hora. ¿Qué distancia avanzó?

A) 480 m   B) 4,8 km   C) 4 800 cm   D) 48 000 m   E) N.A

Resolución:



El # de saltos en 75 *minutos* (cinco cuartos de *hora* = 5 × 15 = 75 *min*) es :

75 × 80 = 6 000

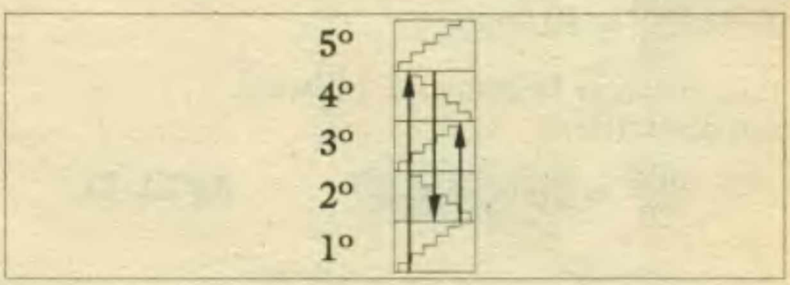
La distancia recorrida en este tiempo:

$$6\,000 \times 80 = 480\,000\ cm = \boxed{4{,}8\ km} \qquad \text{RPTA. B}$$

12.- Un individuo sube hasta el quinto piso de un edificio, luego baja al segundo y vuelve a subir al cuarto piso. Si entre piso y piso las escaleras tienen 15 peldaños ¿Cuántos peldaños ha subido el individuo?

A) 45   B) 75   C) 90   D) 105   E) 120

Resolución:



Cuando asciende hasta el quinto piso, sube: 15 × 4 = 60 *peldaños*.

Cuando desciende hasta el segundo piso, baja: 15 × 3 = 45 *peldaños*.

Cuando asciende hasta el cuarto piso, sube: 15 × 2 = 30 *peldaños*

Hasta aquí ha subido : 60 + 30 = **90 *peldaños*** RPTA. C

13.- Un matrimonio dispone de 32 soles para ir al cine con sus hijos. Si compra las entradas de 5 soles le faltaría dinero y si adquiere las de 4 soles le sobraría dinero ¿Cuántos hijos tiene el matrimonio?

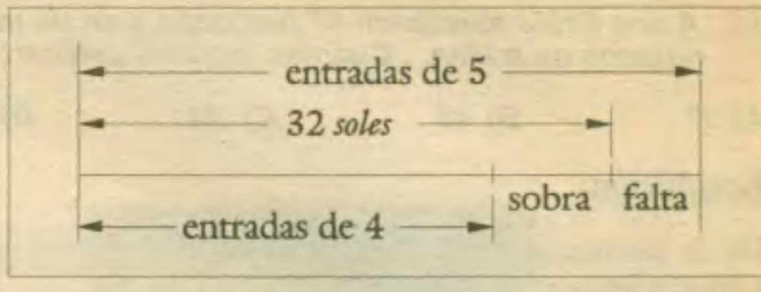
A) 5   B) 4   C) 6   D) 7   E) 8   UNMSM - 93

Resolución:

La 1ª vez pueden comprar $\frac{32}{5} = 6{,}4$ *entradas* y esto significa que son más de 6 *personas* (porque faltó dinero)

La 2^da^ vez pueden comprar $\frac{32}{4} = 8$ *entradas* y esto quiere decir que son menos de 8 *personas* (porque sobró dinero).

Si son más de 6 y menos de 8 *entradas* se trata de 7 *personas* exactamente.



Descontando el matrimonio (2 *entradas*), el número de hijos es :

$7 - 2 =$ **5** RPTA. A

14.- Un empresario decide entregar a cada uno de sus trabajadores 250 soles. Uno de ellos es despedido y el total es repartido entre los demás, recibiendo cada uno 300 soles. ¿Cuántos eran los trabajadores inicialmente?

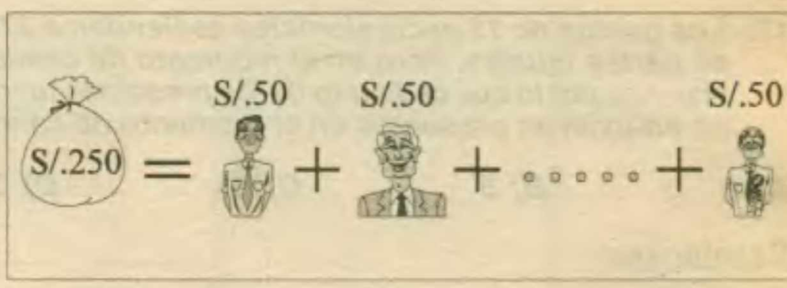
A) 4 *B) 5* *C) 7* *D) 10* *E) 6* ***UNMSM - 95***

Resolución:

Inicialmente a cada uno le tocaba 250 *soles*.

Después del despedido de uno de ellos, a c/u le toca 300 *soles*.

Este aumento: 300 -250 = 50 *soles* procede de repartir la parte que le tocaba (250 *soles*) entre los demás, alcanzando este dinero para que se beneficien 250 ÷ 50 = 5 *trabajadores*, que eran los que quedaban.



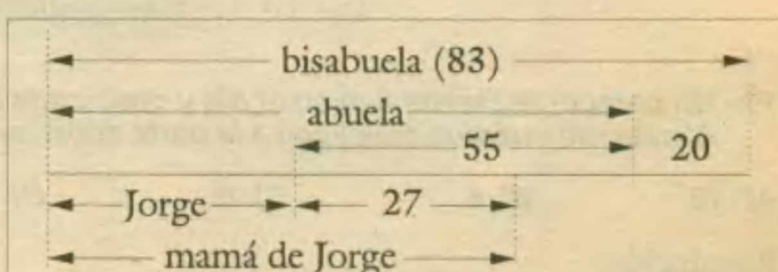
Inicialmente, entonces, eran : 5 + 1 = ***6 trabajadores*** RPTA. E

15.- La bisuabuela de Jorge tiene ahora 83 años y tenía 20 años cuando nació la abuela de Jorge. La madre de Jorge dice: "Tu abuela tiene 55 años más que tú y tú tienes 27 años menos que yo". Calcule la edad de la madre de Jorge.

A) 25 *B) 35* *C) 27* *D) 33* *E) 38*

Resolución:

Ordenemos las sumas y restas según la información proporcionada :



Edad de la bisabuela: 83

Edad de la abuela: 83 - 20 = 63

Edad de Jorge: 63 - 55 = 8

Edad de la mamá de Jorge: 8 + 27 = **35** RPTA. B

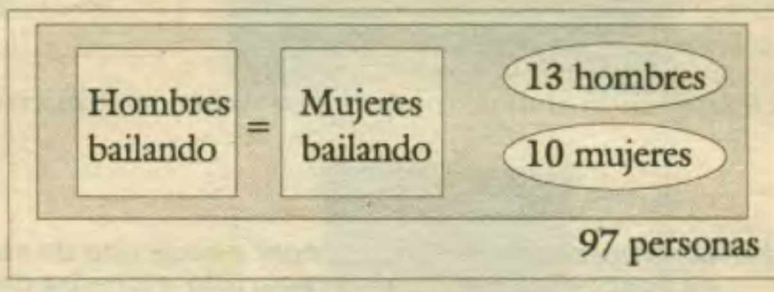
16.- *A una fiesta asistieron 97 personas y en un momento determinado, 13 hombres y 10 mujeres no bailan. ¿Cuántas mujeres asistieron?*

A) 37 *B) 45* *C) 74* *D) 47* *E) 50*

Resolución:

De la asistencia total (97), descontamos a los que no bailan:

$$97 - (13 + 10) = 74$$



Estas 74 personas están bailando por parejas, por ello dividiremos entre 2 para conocer el # de hombres ó mujeres que bailan:

$$74 \div 2 = 37$$

Agregamos ahora las mujeres que no bailan: $37 + 10 =$ **47**

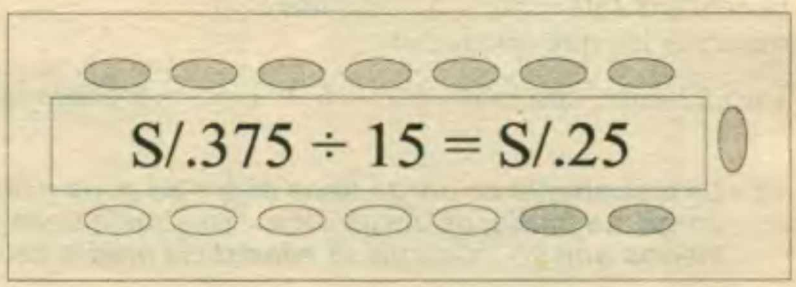
Este último resultado es el # total de mujeres **RPTA. D**

17.- *Los gastos de 15 excursionistas ascienden a 375 soles los cuales deben ser pagados en partes iguales. Pero en el momento de cancelar la cuenta faltaron algunos de los viajeros, por lo que cada uno de los presentes tuvo que abonar 12,5 soles más. ¿Cuántos no estuvieron presentes en el momento de cancelar la cuenta?*

A) 6 *B) 5* *C) 4* *D) 3* *E) 8* ***UNMSM - 92***

Resolución:

Cuota a apagar originalmente:
$375 \div 15 = 25$ *soles.*



Nueva cuota por los motivos ya señalados: $25 + 12,5 = 37,5$ *soles.*

Para cubrir el monto total se necesitan:
$375 \div (37,5) = 10$ *cuotas*

Esto significa que entre 10 personas pagan todo, entonces:

$15 - 10 =$ **5 no pagaron.** **RPTA. B**

18.- *Un caracol asciende 8 m en el día y desciende en la noche 6 m por acción de su peso. Al cabo de cuántos días llega a la parte superior de una pared de 20 m de altura.*

A) 10 *B) 6* *C) 8* *D) 7* *E) N.A* ***UNALM - 92***

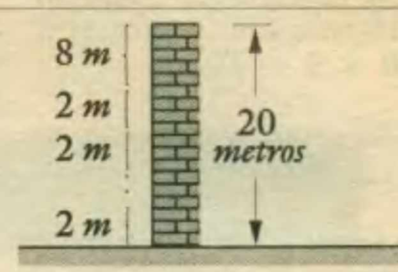
Resolución:

Razonamos la parte de su ascenso: Los útimos 8 *m* de pared que asciende, le permiten culminar su recorrido (ya no resbala) por lo tanto el último día recorre esos 8 *m* y los días anteriores recorrió: $20 - 8 = 12$ *m*

En estos 12 *m*, el ritmo diario de ascenso fue de: 8 - 6 = 2 *m* por lo tanto en esta etapa demoró: 12 ÷ 2 = 6 *días*.

En resumen podemos decir que:

El caracol estuvo 6 *días* subiendo y bajando (8 - 6 = 2) a razón de 2 *m* por día y más 1 *día* para subir los últimos 8 *m* , hacen el siguiente total:



6 × 2 + 8 = 20 *m*

\# de *días* = 6 + 1 = **7 *días*** RPTA. D

19.- Un comerciante compró 600 huevos a 5 soles la docena. En el transporte se rompen 15 huevos y al venderlos, por cada docena, regala uno. ¿A cómo debe vender cada docena para que la ganancia total sea de 65 soles?

A) 6,5 *B) 6* *C) 5* *D) 7,5* *E) 7*

Resolución:

\# de *docenas* compradas :

600 ÷ 12 = 50

Monto de la inversión :

50 × 5 = 250 *soles*



Se desea recuperar esta inversión y ganar 65 *soles*:

Para esto se debe recaudar: 250 + 65 = 315 *soles*.

Los *huevos* aptos para la venta son: 600 - 15 = 585

Se venden de 13 en 13 porque se regala 1 por cada docena vendida.

\# de *docenas* vendidas = 585 ÷ 13 = 45

Para ganar 315 *soles* en la venta 45 *docenas*, cada docena bebe venderse a:

315 ÷ 45 = **7 *soles*** RPTA. E

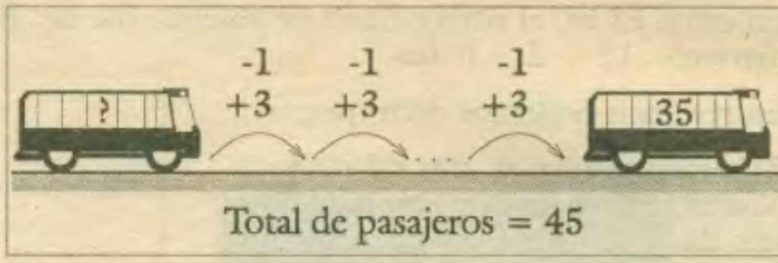
20. - Un bus que hace el servicio de A a B cobra como pasaje único 3 soles y en el trayecto se observa que cada vez que baja 1 pasajero, subían 3. Si llegó a B con 35 pasajeros y una recaudación de 135 soles. ¿Cuántos personas partieron del paradero inicial del bus?

A) 15 *B) 18* *C) 5* *D) 9* *E) 13*

Resolución:

Calculamos el # de pasajes vendidos: 135 ÷ 3 = 45

Si llegó con 35 *pasajeros* quiere decir que en el camino bajaron 45 - 35 = 10 *pasajeros* y subieron el triple: 10 × 3 = 30



Entonces, si 30 *pasajeros* subieron en el camino, y sabemos que 45 abordaron el vehículo, la diferencia 45 - 30 = **15 *pasajeros*** debieron subir en el punto de partida.
RPTA. A

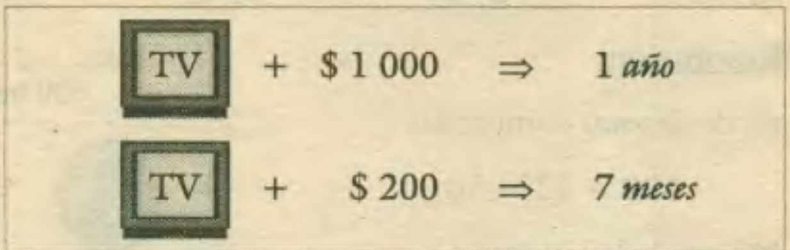
21.- A un criado se le ha prometido la suma de 1 000 dólares en efectivo más un televisor como pago anual. Al cabo de 7 meses el criado renuncia y recibe como pago el televisor y 200 dólares. ¿Cuál es el valor del televisor?

A) 780 *B) 800* *C) 920* *D) 720* *E) 1 200*

Resolución:

La diferencia entre dos pagos es :

(TV + 1000) - (TV + 200) = 800 *dólares.*



Esto se debe a los 5 *meses* que faltaban para acabar el contrato. De aquí deducimos su pago mensual en efectivo:
800 ÷ 5 = 160 *dólaresv*

Por un año debía ganar (en efectivo): 160 × 12 = 1 920 *dólares.*

Este pago se iba a abonar con el televisor y 1000 *dólares*, por lo tanto el televisor se valoró en:

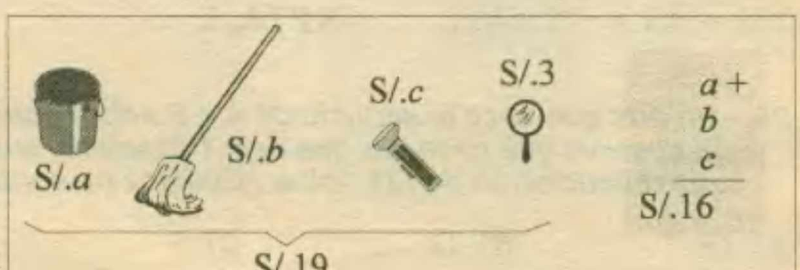
1 920 - 1 000 = **920 *dólares.*** RPTA. C

22.- Al comprar 4 artículos se paga por cada uno un número entero de soles, diferente en cada caso. Si el artículo de menor precio costó 3 soles y en total se pagó 19 soles. ¿Cuánto costó el artículo de mayor precio?

A) 5 *B) 7* *C) 9* *D) 11* *E) 13*

Resolución:

Si cada artículo tuvo diferente precio y el menor costó S/.3 los otros pudieron costar S/.4; S/.5; ó ; S/.6.



De ser estos los valores, daría un pago total de : 3 + 4 + 5 + 6 = 18 *soles* ; pero según el problema , se pagó 19 *soles*, lo que significa que uno de los artículos debió costar 1 *sol* más.

Para que se mantengan diferentes los precios el único artículo que puede incrementar su costo en 1 *sol* es el último y la suma ya corregida nos daría :

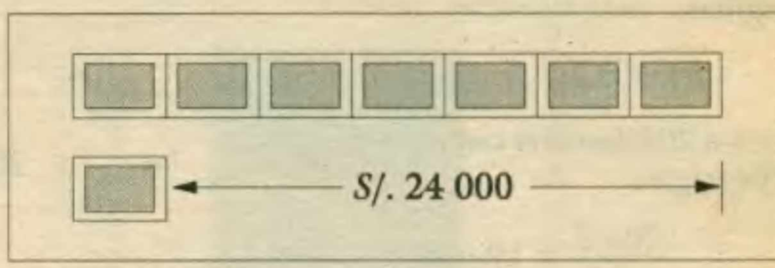
$3 + 4 + 5 + 7 =$ **19 *soles*.** RPTA. B

23.- Una vendedora de billetes de lotería ofreció a un señor un billete y éste le compró 7 del mismo número. Sucedió que salieron premiados y el señor recibió 24 000 soles más que si hubiera comprado un solo billete. ¿Qué cantidad recibió el señor?

A) 25 000 B) 30 000 C) 35 000 D) 7 000 E) 28 000

Resolución:

La suma mencionada sería el primero por: 7 - 1 = 6 *billetes*.



Esto quiere decir que cada *billete* se premia con:

$24\,000 \div 6 = 4\,000$

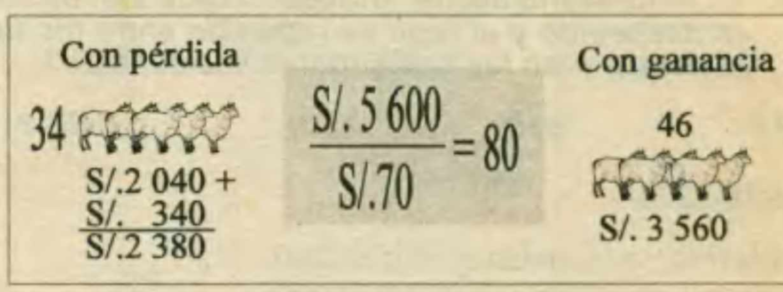
El señor recibió por 7 *billetes*: $4\,000 \times 7 =$ **28 000** RPTA. E

24.- Compré cierto número de ovejas por 5 600 soles. Vendí 34 de ellas por 2 040 soles, perdiendo 10 soles en cada una. ¿A cómo debo vender cada una de las restantes para que la ganancia total sea de 1 960 soles?

A) 90 B) 130 C) 120 D) 180 E) 150

Resolución:

Al vender 34 ovejas perdiendo 10 *soles* en cada una, estoy perdiendo: $34 \times 10 = 340$ *soles*. Esto significa que el costo de las 34 ovejas debió ser: $2\,040 + 340 = 2\,380$ *soles*.



Ahora podemos calcular el precio de costo de 1 *oveja*:

$2\,380 \div 34 = 70$ *soles*.

Del mismo modo podemos calcular el # de *ovejas* compradas : $5\,600 \div 70 = 80$ *ovejas*.

Faltan vender: $80 - 34 = 46$ *ovejas*.

Para recuperar mi inversión debo recibir:

Lo que invertí - Lo que recibí a cuenta = $5\,600 - 2\,040 = 3\,560$ *soles*. Además de ello debe recibir 1 960 *soles* de ganancia, es decir, por las ovejas que me quedan debo recibir :

$3\,560 + 1\,960 = 5\,520$ *soles*

Luego cada *oveja* debo vender en: $5\,520 \div 46 =$ **120 *soles*.** RPTA. C

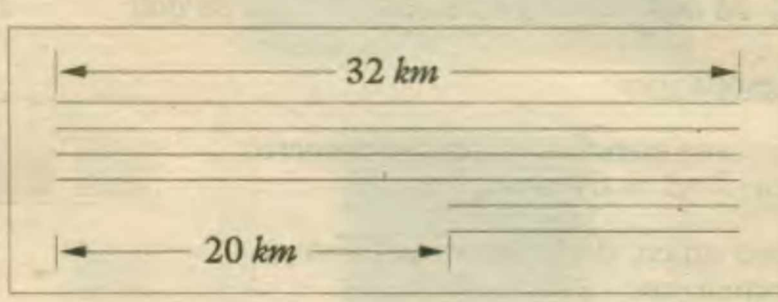
25.- Cuatro personas, pagando por igual, contratan un auto por 64 soles para hacer un recorrido de 32 km. Después de haber recorrido 20 km, permiten subir a 2 personas más en las mismas condiciones, con quienes terminan el trayecto. ¿Cuánto paga en total cada una de las 4 primeras personas?

A) 14 soles ***B) 12 soles*** ***C) 16 soles*** ***D) 13 soles*** ***E) N.A***

Resolución:

Para cada uno de los pasajeros originales cada *kilómetro* cuesta:

$64 \div 32 = 2$ *soles*.



Por los 20 *kilómetros* cada uno de ellos debe pagar:

$$\frac{20 \times 2}{4} = 10 \text{ soles.}$$

Asimismo debemos reconocer que falta pagar: 64 - 40 = 24 *soles*.

Este saldo lo pagan entre 6 pasajeros de modo que a cada uno le toca:

$24 \div 6 = 4$ *soles*.

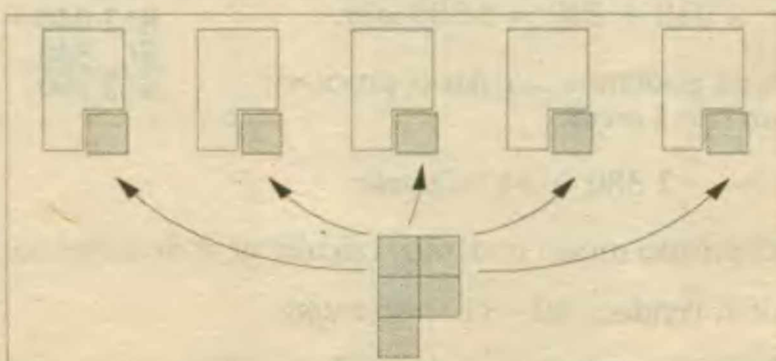
Por consiguiente cada uno de los 4 primeros deberá pagar:

10 + 4 = **14 *soles*.** RPTA. A

26.- Un empresario decide entregar a cada uno de sus trabajadores S/. 250. Uno de ellos es despedido y el total es repartido entre los demás, recibiendo cada uno S/. 300. ¿Cuántos eran los trabajadores inicialmente?

A) 5 ***B) 6*** ***C) 7*** ***D) 8*** ***E) 9***

Resolución:



Cada trabajador debía recibir S/.250, según el reparto original, pero cuando uno de ellos es despedido, su parte (S/.250) se distribuye entre los demás y cada uno recibe ahora S/.300, es decir hay un incremento de:

S/.300 - S/. 250 = S/.50

que se debe a los 250 que se han repartido y los beneficiados son:

$250 \div 50 = 5$ trabajadores

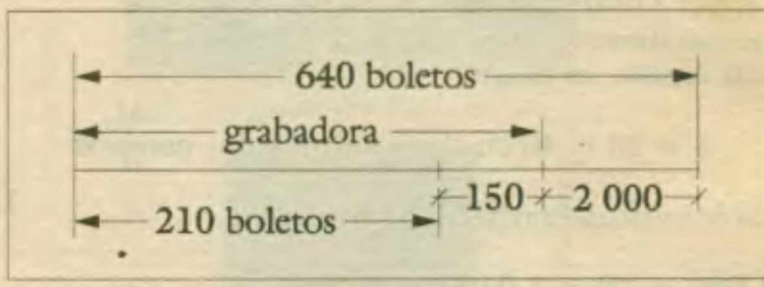
Más el que fue despedido, tenemos como número inicial : 5 + 1 = **6 trabajadores**

RPTA. B

27.- ***Para ganar S/.2 000 en la rifa de una grabadora, se imprimieron 640 boletos ; sin embargo, solo se vendieron 210 boletos originándose una pérdida de S/. 150. Hallar el valor de la grabadora.***

A) S/. 800 B) S/. 900 C) S/. 1 000 D) S/. 1 100 E) S/. 1 200

Resolución:



Se dejaron de ganar 2 000 *soles* y se perdieron 150*soles*, esto dá una recaudación disminuida en:

2 000 + 150 = 2 150 *soles*.

La disminución se debe a los boletos no vendidos :

640 - 210 = 430 boletos.

El valor de un boleto es : 2 150 ÷ 430 = 5 *soles*.

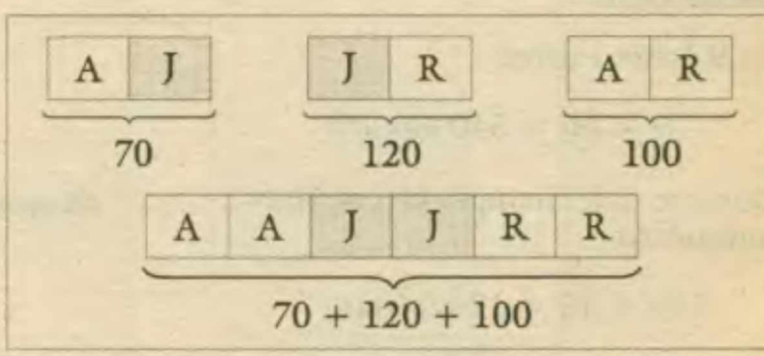
Luego deducimos el valor de la grabadora, que corresponde a la venta de 210 boletos, más 150*soles*:

210(5) + 150 = **1 200 *soles*.** RPTA. E

28.- ***Tres hermanos Aníbal, José y Rosa recibieron una herencia. Aníbal y José recibieron S/. 70, José y Rosa recibieron S/. 120 y Aníbal con Rosa S/. 100 ¿Cuánto recibió Rosa?***

A) S/. 45 B) S/. 55 C) S/. 65 D) S/.75 E) S/. 85

Resolución:



De la información dada reconocemos que:

Aníbal y José recibieron : S/. 70

José y Rosa recibieron : S/. 120

Aníbal y Rosa recibieron : S/. 100

Observamos que cada nombre aparece dos veces, luego, la suma total, es el doble de lo que tienen entre los tres :

Aníbal , José y Rosa : (70 + 120 + 100) ÷ 2 = 145

Luego, si Aníbal y José recibieron S/. 70, entonces Rosa recibió el resto :

S/. 145 - S/. 70 = **S/. 75** RPTA. D

Nota .- Se puede deducir que José recibió S/. 45 y Aníbal S/. 25.

29.- Cuando compro me regalan un cuaderno por cada docena y cuando vendo regalo 4 cuadernos por cada ciento. ¿Cuántos cuadernos debo comprar para vender 1 000?

A) 920 *B) 940* *C) 960* *D) 970* *E) 980*

Resolución:

Vender 1 000 implica vender 10 cientos con sus respectivos regalos: 4 por cada ciento, es decir:

$$4 \times 10 = 40 \text{ cuadernos de regalo}$$

Por lo tanto deben haber disponibles:

$$1\,000 + 40 = 1\,040 \text{ cuadernos}$$



Al comprar: 1 docena + 1 regalo = 13 libros



Al vender: 1 ciento + 4 regalos = 104 libros

La compra se hace por docena, con 1 de regalo, luego podemos asumir que dicha compra se hace de 13 en 13 ; por consiguiente , para hallar el número de docenas compradas deberemos efectuar la siguiente división :

$$1\,040 \div 13 = 80$$

Debemos comprar 80 docenas ó **960 cuadernos** RPTA. C

30.- Una enfermera proporciona a su paciente una tableta cada 45 minutos. ¿Cuántas tabletas necesitará para 9 horas de turno si debe suministrarlas al inicio y término del mismo?

A) 11 *B) 13* *C) 15* *D) 17* *E) 19*

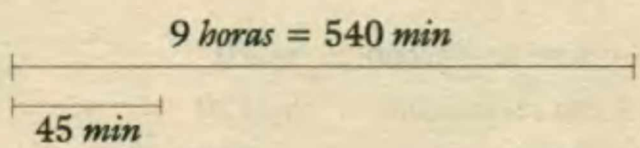
Resolución:

En 9 *horas*, existen :

$$9 \times 60 = 540 \text{ minutos}$$

Durante este tiempo la enfermera suministró :

$$540 \div 45 = 12 \text{ tabletas.}$$



Y agregándole la tableta suministrada al inicio, tendremos :

$12 + 1 =$ **13 tabletas** RPTA. B

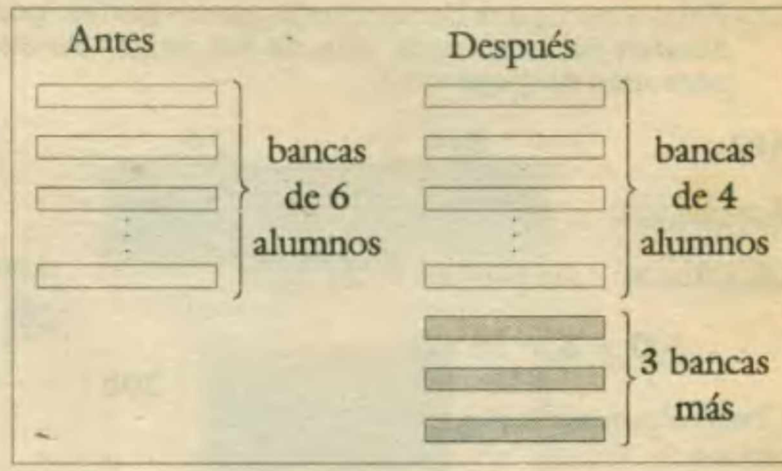
31.- En el aula los alumnos están agrupados en bancas de 6 alumnos cada una ; si se les coloca en bancas de 4 alumnos, se necesitarán 3 bancas más. ¿Cuántos alumnos hay presentes?

A) 36 *B) 38* *C) 40* *D) 42* *E) 44*

Resolución:

Inicialmente los alumnos se agrupan en bancas de 6. Ahora para colocarlos en bancas de 4, se necesitan 3 bancas más, las cuales serán ocupadas por :

$$3 \times 4 = 12 \text{ alumnos}$$



Debemos reconocer que estos alumnos proceden del arreglo inicial.Esto significa que de cada una de las bancas originales se extrajo :

$$6 - 4 = 2 \text{ alumnos}$$

Y en base a esto podemos hallar el número de bancas de a 6 , para lo cual debemos efectuar la siguiente división :

$$12 \div 2 = 6 \text{ bancas}$$

De aquí se concluye que el número de alumnos es : $6 \times 6 =$ **36** **RPTA. A**

32.- Un comerciante tiene al inicio del día 8 lapiceros de S/. 1 cada uno y 4 lapiceros de S/. 2 cada uno; si al final del día tiene S/. 12. ¿Cuántos lapiceros le sobran si le quedan por lo menos 1 lapicero de cada tipo?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

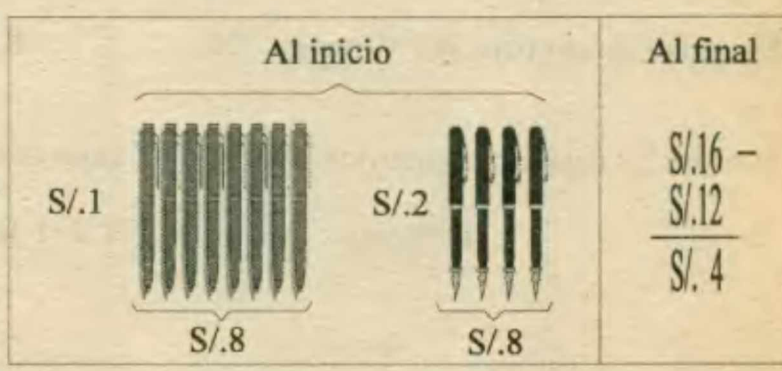
Resolución:

Tenemos 8 lapiceros de S/. 1 y 4 lapiceros de S/. 2, que hacen un total de :

$$8 \times 1 + 4 \times 2 = 16 \textit{ soles.}$$

Si al final hizo ventas por 12 *soles*, le quedaron :

$$16 - 12 = 4 \textit{ soles}$$



Este dinero ha sido obtenido por parte de lapiceros de ambos tipos.Haciendo una simple inspección , reconocemos que estos 4 *soles* los tendremos de una única forma ,y es con por lo menos 1 de dos*soles* y con 2 de un *sol* , esto de acuerdo a las condiciones dadas.

3 **RPTA. C**

33.- Entre 8 personas tienen que pagar en partes iguales S/. 200, como algunos de ellos no pueden hacerlo, cada uno de los restantes tiene que pagar S/. 15 más. ¿Cuántas personas no pagaron?

A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) 6* *E) 7*

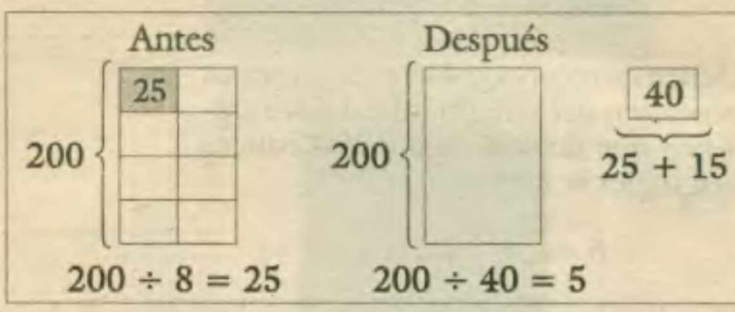
Resolución:

Inicialmente cada persona debía pagar :

$200 \div 8 = 25$ *soles*

Como algunos no pagan, la cuota se eleva a :

$25 + 15 = 40$ *soles*



Con esta nueva cuota, deducimos : $200 \div 40 = 5$ personas

Los demás no pagaron : $8 - 5 =$ **3** RPTA. A

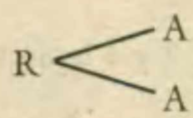
34.- En una caja roja hay 2 cajas de color azul; en cada caja que no es de color rojo hay 4 cajas negras. ¿Cuántas cajas hay en total, si todas las cajas mencionadas se encuentran dentro de 7 cajas de color celeste?

A) 10 *B) 12* *C) 14* *D) 16* *E) 18*

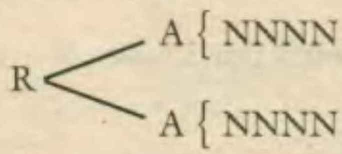
Resolución:

Diagramando en forma de árbol :

En una caja roja (R) hay dos de color azul (A):



En cada caja no roja, hay 4 negras (N) :



Si todas las cajas se encuentran dentro de 7 cajas celestes (C), tenemos en total :

\# de cajas = 8 N + 2 A + 1 R + 7 C = **18**

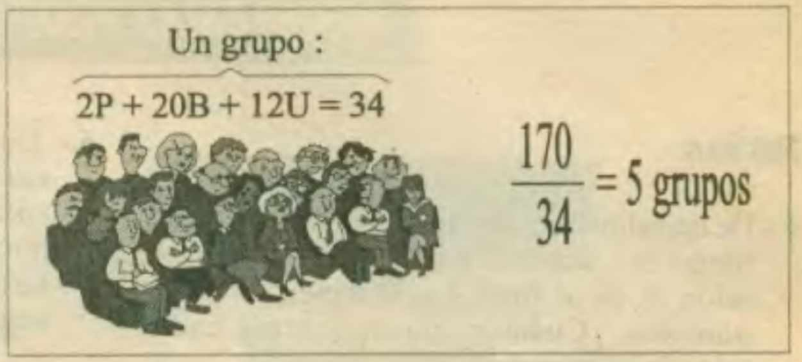
RPTA. E

35.- En un avión viajan 170 personas ; se sabe que por cada 2 peruanos hay 20 brasileños y 12 uruguayos. ¿En cuántos excede el número de brasileños al número de peruanos?

A) 80 *B) 90* *C) 100* *D) 110* *E) 120*

Resolución:

Veamos cuántos grupos de 2 peruanos, 20 brasileños y 12 uruguayos pueden formarse con las 170 personas.



Sumemos : 2+20+12 = 34 personas

Luego el número de grupos es :

$$170 \div 34 = 5$$

Hallamos los totales por nacionalidades.

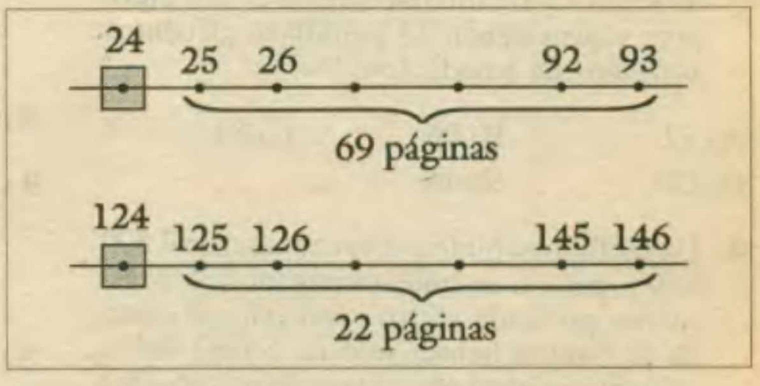
- peruanos : $2 \times 5 = 10$
- brasileños : $20 \times 5 = 100$
- uruguayos : $12 \times 5 = 60$

El exceso de brasileños a peruanos es : 100 - 10 = **90** RPTA. B

36.- Mariela lee dos capítulos de un libro : el capítulo II, desde la página 24 hasta la 93 y el capítulo IV, desde la página 124 hasta la 146. ¿Cuántas páginas lee en total?

A) 90 *B) 91* *C) 92* *D) 93* *E) 94*

Resolución:



* Del capítulo II lee desde la 24 hasta la 93 :

$$93 - 24 = 69$$

Más la 1ra página : 69 + 1 = 70

* Del capítulo IV lee desde la 124 hasta la 145 :

$$146 - 124 = 22$$

Más la 1ra página : 22 + 1 = 23

* Luego el total de páginas leidas vendrá dado así : 70 + 23 = **93** RPTA. D

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- De un salón *A* pasan al salón *B*, 15 *alumnos*, luego del salón *B* pasan 20 *alumnos* al salón *A*. Si al final *A* y *B* tienen 65 y 35 *alumnos*. ¿Cuántos *alumnos* tenía cada salón inicialmente?

A) 55 y 45 B) 50 y 50 C) 60 y 40
D) 65 y 35 E) N.A.

2.- En una *granja* se tiene *pavos*, *gallinas* y *patos*. Sin contar las *gallinas*, tenemos 8 aves, sin contar los *patos* tenemos 7 aves y sin contar los *pavos* tenemos 5 aves. Hallar el número de *patos*.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

3.- José se encuentra en el 6to piso de un edificio; luego baja al 3er *piso*, vuelve a subir al 5to *piso* y finalmente baja al 2do. Si entre piso y piso tienen 12 *peldaños*. ¿Cuántos *peldaños* ha bajado José?

A) 72 B) 96 C) 84
D) 120 E) 48

4.- Un edificio se pintó por la cantidad de 7 500 *soles*, pero si se hubiera pagado 2,5 *soles* menos por cada *metro cuadrado*, el costo de la pintura habría sido de 5 000 *soles*. ¿Cuánto se pagó por cada *metro cuadrado*?

A) 8,4 *soles* D) 15 *soles*
B) menos de 8 *soles* E) más de 18 *soles*
C) 12,5 *soles*

5.- Una botella vacía pesa 425 *gramos* y llena de agua pesa 1 175 *gramos*. ¿Cuántas botellas semejantes serán necesarias para vaciar en ellas el contenido de un barril de 225 *litros*?

A) 150 B) 200 C) 400
D) 350 E) 300

6.- Dos secretarias tienen que escribir 600 *cartas* cada una. La primera escribe 15 *cartas* por hora y la segunda 13 *cartas* por hora. Cuando la primera haya terminado su tarea. ¿Cuántas cartas faltarán escribir a la segunda?

A) 52 B) 40 C) 80
D) 78 E) 120

7.- En un determinado mes existen 5 viernes, 5 sábados y 5 domingos. Se desea saber qué día de la semana fue el 23 de dicho mes y cuántos días trae?

A) sábado, 31 B) viernes, 29 C) viernes, 30
D) sábado, 30 E) domingo, 31

8.- Dieciséis personas tienen que pagar en partes iguales una suma de 760 *soles* y como algunas de ellas no pueden pagar, cada una de las restantes tiene que aportar 78,5 *soles* de más para cancelar la deuda. ¿Cuántas personas no pagaron?

A) 8 B) 9 C) 4 D) 5 E) 6

9.- Un jardinero se propuso sembrar 720 semillas en 8 *días* pero tardó 4 *días* más por trabajar 3 *horas* menos cada día. ¿Cuántas *horas* trabajó diariamente?

A) 8 B) 6 C) 5 D) 9 E) 3

10.- Se pagó 10 *soles* por cada 3 manzanas y se venden 5 por 20 *soles*. ¿Cuántas manzanas se deben vender para ganar 100 *soles*?

A) 120 B) 180 C) 150
D) 100 E) 200

11.- Carlos dice : "Si consiguiera 500 *soles*, podría cancelar una deuda de 1630 *soles* y aún me sobrarían 91 *soles*". ¿Cuánto tiene Carlos?

A) 931 B) 1 221 C) 1 236 D) 936 E) 1 131

12.- El menor de cuatro hermanos tiene 15 *años* y cada uno le lleva 2 *años* al que le sigue. ¿Cuál es la suma de las cuatro edades?

A) 96 B) 60 C) 54 D) 48 E) 72

13.- Entre un padre y su hijo han ganado 1 296 *nuevos soles* en un mes de 24 *días* de trabajo. Calcular el jornal del padre, sabiendo que el del hijo es la mitad del jornal de su padre.

A) 48 B) 18 C) 36 D) 24 E) 54

14.- Mariela logró 3 aciertos en la tinka, sumando dos a dos los números correspondientes a los bolos acertados, se obtiene 30; 36 y 38; el menor de los números de los bolos es :

A) 16 B) 14 C) 12 D) 11 E) 18

15.- Para comprar 16 lapiceros me faltan 12 *soles*, pero si compro 10 lapiceros me sobran 6 *soles*. ¿De cuánto dinero dispongo?

A) 12 B) 24 C) 36 D) 48 E) 54

NIVEL B

16.- Una *señora* tiene 26 *años* al nacer su *hija* y ésta tiene 20 *años* al nacer la *nieta*; hoy, que cumple 14 *años* la *nieta*, la *abuela* dice tener 49 *años* y su *hija* 30. ¿Cuántos *años* oculta cada una?

A) 7 y 4 B) 11 y 12 C) 10 y 6

D) 11 y 4 E) 12 y 5

17.- Cada día un *empleado*, para ir de su casa a su oficina gasta 2 *soles* y de regreso 4 *soles*. Si ya gastó 92 *soles*. ¿Dónde se encuentra el empleado?

A) En la oficina.

B) En la casa.

C) A mitad de camino.

D) A mitad de camino a la oficina.

E) No se puede determinar.

18.- Un ganadero compró cierto número de ovejas por 10 000 *soles* vendió una parte por 8 400 *soles* a 210 *soles* cada oveja, ganando en esta operación 400 *soles*. ¿Cuántas ovejas habría comprado?

A) 60 B) 40 C) 75 D) 70 E) 50

19.- En una fiesta se dispuso repartir 5 *globos* a cada niño, pero como mucho de ellos quedarían sin *globo*, se repartió solamente 3 a cada uno, resultando así beneficiados 80 niños más. ¿Cuántos recibieron *globos*?

A) 120 B) 160 C) 80

D) 280 E) 200

20.- Con un cañón se han hecho 35 disparos por *hora* y con otro 24 *disparos*, también por *hora*. Entre los dos hicieron 518 *disparos*. Cuando empezó a disparar el segundo, llevaba el primero 3 *horas* disparando. ¿Cuántos *disparos* hizo el primero?

A) 168 B) 350 C) 450 D) 178 E) N.A

21.- Un padre dejó una herencia de 15 200 *soles* a cada uno de sus hijos. Antes de efectuarse el reparto muere uno de ellos y la suma que le correspondía se distribuye equitativamente entre sus hermanos, quienes reciben entonces 19 000 *soles* cada uno. ¿Cuántos eran los hijos y cuál fue la fortuna que les dejó el padre?

A) 6 hijos ; 91 200 *soles*

B) 5 hijos ; 76 000 *soles*

C) 4 hijos ; 60 800 *soles*

D) 5 hijos ; 91 200 *soles*

E) 4 hijos ; 76 000 *soles*

22.- Una persona sube una escalera por el curioso método de subir 5 escalones y bajar 4. Si en total subió 65 escalones. ¿Cuántos escalones tiene la escalera?

A) 17 B) 60 C) 64

D) 13 E) N.A

23.- Un caracol se encuentra en el fondo de un pozo de 10 *metros* de longitud. Durante el día, asciende 2 *metros*, pero durante la noche su peso lo hace descender un *metro*. Si la ascensión comienza el día *lunes*. ¿Qué día de la semana llegará a la cima?

A) *lunes* B) *martes* C) *miércoles*

D) *jueves* E) *viernes*

24.- Un ómnibus inicia su recorrido con cierto número de pasajeros. Durante el viaje por cada pasajero que bajaba subían 4, llegando al final con 71 pasajeros. Si se recaudó 790,5 *soles*, averiguar con cuántos pasajeros inició su recorrido si el pasaje costaba 8,5 *soles*.

A) 5 B) 22 C) 10 D) 8 E) N.A

25.- Por 48 días de trabajo 19 obreros ganan un total de 29 760 *soles*. A cada uno de los 12 primeros les corresponde un salario diario doble del que les corresponde a cada uno de los 7 restantes. ¿Cuántos *soles* gana diariamente cada uno de los primeros?

A) 60 B) 25 C) 35 D) 30 E) 40

26.- Para ganar 28 *soles* en la rifa de un reloj se hicieron 90 tickets vendiéndose únicamente 75 y originando así una pérdida de S/. 17. Hallar el valor del reloj.

A) 312 B) 264 C) 242 D) 218 E) 196

27.- 540 *soles* se deben cancelar entre 18 personas pero como algunos de ellos no pueden hacerlo los otros tendrán que pagar 15 *soles* más. ¿Cuántas personas no podían pagar?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

28.- Un comerciante compró 1 800 vasos a 0,65 *soles* cada uno. Después de romper algunos vende los restantes a 0,85 *soles* cada uno, obteniéndose una ganancia total de 325,15 *soles*; ¿Cuántos vasos rompió?

A) 60 B) 58 C) 49 D) 41 E) 72

29.- Si compro 10 plumones y 20 lapiceros, gasto 70 *soles;* sabiendo que el precio de cada plumón excede en un *sol* al de un lapicero. ¿Cuánto cuesta un plumón?

A) S/. 1 B) S/. 2 C) S/. 3

D) S/. 4 E) S/. 5

30.- A un criado se le ha prometido la suma de $ 1 000 en efectivo, más una moto, como pago anual. Al cabo de 7 *meses* el empleado se va y recibe como pago total la moto y $ 200. ¿Cuál es el valor de la moto?

A) $ 800 B) $ 840 C) $ 920

D) $ 1680 E) $ 520

NIVEL C

31.- Un automóvil parte de A con 15 *galones* de gasolina y un agujero en el tanque por lo cual se pierde 1/2 *galón* por hora. Si su velocidad es de 80 *km/h*. ¿Qué distancia habrá recorrido el automóvil cuando se le acaba la gasolina si su rendimiento es de 40 *km/galón*?

A) 400 *km* B) 320 *km* C) 480 *km*

D) 360 *km* E) N.A

32.- Un *lapicero* cuesta 8 *soles* y un *lápiz* 5 *soles*. Se quiere gastar exactamente 86 *soles* de manera que se puede adquirir la mayor cantidad posible de *lapiceros* y *lápices*. ¿Cuál es este número máximo?.

A) 11 B) 13 C) 14 D) 16 E) 17

33.- Un comerciante compró 40 jarrones a 70 *soles* cada uno. Después de haber vendido una docena, con una ganancia de 20 *soles* por jarrón se rompieron 5. ¿A qué precio (en *soles*) vendió cada uno de los jarrones que le quedaron sabiendo que la utilidad es de 810 *soles*?

A) 90 B) 110 C) 120

D) 105 E) N.A

34.- Un obrero debe estar a las 7 y 45 en su trabajo; sale en bicicleta a las 7 y 10 de manera que llega 10 *minutos* antes de la *hora* de entrada. Si fuera a pie tardaría 3 veces más y si toma el ómnibus tardaría 5 veces menos que a pie. ¿A qué *hora* llegaría en ómnibus, saliendo 50 *minutos* más tarde que si fuera a pie con el tiempo justo?

A) 7:25 B) 7:30 C) 7:35
D) 7:40 E) 7:45

35.- Se tienen 2 depósitos, conteniendo uno de ellos 835 *litros* y el otro 527 *litros*. A la 1 *pm* se abre en cada uno un desagüe cuyo caudal es de 5 *litros* / *minuto* y se cierran cuando uno de los volúmenes es 5 veces el otro. ¿A qué hora se cerraron los desagües?

A) 2:00*pm* B) 2:15*pm* C) 2:30*pm*
D) 3:00*pm* E) 1:45*pm*

36.- Un albañil pensó hacer un muro en 12*días* pero tardó 3*días* más, por trabajar 2*horas* menos cada *día*. ¿Cuántas *horas* trabajó diariamente?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

37.- 3 personas que recorrerán 65*km* se ponen de acuerdo con otras 2 personas que tienen que ir a un punto ubicado a 23 *km* en la misma carretera para pagar un taxi el cual les cuesta S/. 241. ¿Cuántos *soles* le corresponde pagar a cada persona de cada grupo en relación a la distancia recorrida?

A) 17 ; 25 B) 31 ; 22 C) 65 ; 23
D) 91 ; 30 E) 45 ; 17

38.- Un obrero trabaja 10 *días* seguidos y descansa dos. Si empieza a trabajar un día Lunes. ¿Cuántos *días* han de pasar para que le toque descansar Sábado y Domingo?

A) 96 B) 82 C) 85 D) 94 E) 102

39.- Un tren al final de su trayecto llega con 40 adultos y 30 niños, con una recaudación de S/. 200. Cada adulto y cada niño pagan pasajes únicos de S/. 2 y S/. 1 respectivamente. ¿Con cuántos pasajeros salió de su punto inicial si en cada paradero por cada 3 adultos que subían, también subían 2 niños y bajan 2 adultos junto con 5 niños?

A) 64 B) 72 C) 90 D) 80 E) 45

40.- Una persona quiere rifar una calculadora a un precio determinado emitiendo para esto cierto número de boletos. Si vende a S/. 2 cada boleto perderá S/. 30 y vendiendo en S/. 3 cada boleto ganará S/. 70 ¿Cuánto vale la calculadora?

A) 230 B) 180 C) 160 D) 270 E) 320

41.- A una iglesia, asisten 399 personas entre hombres, mujeres y niños. Si el número de hombres es el quíntuplo del de mujeres y el de mujeres es el triple que el de los niños. ¿Cuántos hombres hay?

A) 367 B) 98 C) 234
D) 298 E) 315

42.- 3 secciones forman un departamento, 5 compañías forman una determinada empresa. Hay 12 secciones en cada sucursal y 50 sucursales en cada compañía. ¿Cuántos departamentos tiene la empresa?

A) 250 B) 750 C) 3000
D) 1200 E) 1000

43.- Un ómnibus va de un punto A a otro B, en uno de los viajes recaudó S/. 152 . Se sabe que el precio único del pasaje es S/. 4 cualquiera que sea el punto donde el pasajero suba o baje del ómnibus; además cada vez que bajó un pasajero subieron 3 y el ómnibus llegó a "B" con 27 pasajeros. ¿Cuál es el número de pasajeros que llevaba el ómnibus al salir de A?.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA SOLUCION DE PROBLEMAS

La capacidad de soslayar una dificultad, de seguir un camino indirecto cuando el directo no aparece, es lo que coloca al animal inteligente sobre el torpe, lo que coloca al hombre por encima de los animales más inteligentes y a los hombres de talentos por encima de sus compañeros, los otros hombres.

George Pólya

¿Qué es un problema?

La palabra "*problema*" a menudo se emplea con un sentido equivocado en la clase de matemáticas. Un profesor asigna determinado conjunto de problemas para resolverlos en clase o en casa. ¿Qué clase de "problemas" son estos? En matemáticas, el concepto generalmente aceptado de lo que es un problema hace un distingo entre las situaciones tales como esta asignación y aquellas que requieren cierto comportamiento distinto de aplicación rutinaria de un procedimiento ya establecido. Un verdadero problema de matemáticas puede definirse como una situación que es nueva para el individuo a quien se pide para resolverlo.

¿Cómo resuelve una persona un problema?

Se considera que la existencia de ciertas condiciones determina si una situación es un verdadero problema para determinado individuo.

1.- El individuo tiene un propósito deseado y claramente definido que conoce conscientemente.

2.- El camino para llegar a esa meta está bloqueado y los patrones fijos de conducta del individuo, sus respuestas habituales no son suficientes para romper ese bloqueo.

3.- Tiene que haber deliberación. El individuo toma conciencia del problema, lo define más o menos claramente, identifica varias hipótesis (soluciones) posibles y comprueba su factibilidad.

- De acuerdo con la condición 1, en la solución de un problema matemático es importante que el individuo determine primero qué es lo que se le está preguntando y también que se sienta motivado para contestar a lo que se le pregunta.

- La condición 2 anterior "el camino para llegar a la meta está bloqueado", determina, entonces si la cuestión es verdaderamente un problema o no. Si le preguntase al lector cuál es el producto de -3×-4, ¿tal pregunta sería un problema? Supongamos que el lector, ciertamente, desea obtener la contestación a esa pregunta. Si está familiarizado con la multiplicación de enteros, sabe de antemano que el producto de enteros negativos es positivo y por tanto responde automaticamente que 12, luego, no hay bloqueo alguno que se haya presentado y esto no es, para el lector, un verdadero problema. Pero si, por el contrario, aunque el lector esté familiarizado con la existencia de los números negativos, no sabe como multiplicarlos, entonces es evidente que la situación cambia. En tal situación tenemos que deliberar y probablemente comprobar, la factibilidad de diferentes alternativas, por ejemplo, podría suponerse que la contestación debe ser 12 ó -12 e intentar ver después cual de estas dos posibilidades era consistente con lo que el ya lector sabia.

- La condición 3 también es un ingrediente esencial para determinar si una pregunta es un problema para determinado individuo o es simplemente un ejercicio. Es preciso *deliberar* para llegar a un punto en que esté seguro de tener la contestación correcta. Y es, al llegar a este punto, cuando se habrá resuelto el problema.

2 Métodos de Solución Especiales

La resolución de un problema matemático en una prueba de **Razonamiento** se puede hacer empleando técnicas tradicionales como ecuaciones y operaciones elementales, que con el mayor de los propósitos se practican intensivamente hasta depurar un técnica efectiva y apta para la competencia.

Pero algunos de estos problemas se pueden resolver en menor tiempo aún aplicando otras técnicas, como por ejemplo un *artificio* que abrevie un planteo tedioso y saturado de cálculos, entonces la reiterada aplicación de este artificio conduce a desarrollar una metodología que ofrece más ventajas a quienes la dominen, superando así a quienes continúen utilizando las técnicas tradicionales.

El propósito de este capítulo es mostrar qué artificios usados con más frecuencia, se han convertido en métodos que ya han demostrado su eficacia frente a otros procedimientos, aunque es necesario saber reconocer en qué caso se van a aplicar.

I) METODO DE SUMAS Y DIFERENCIAS

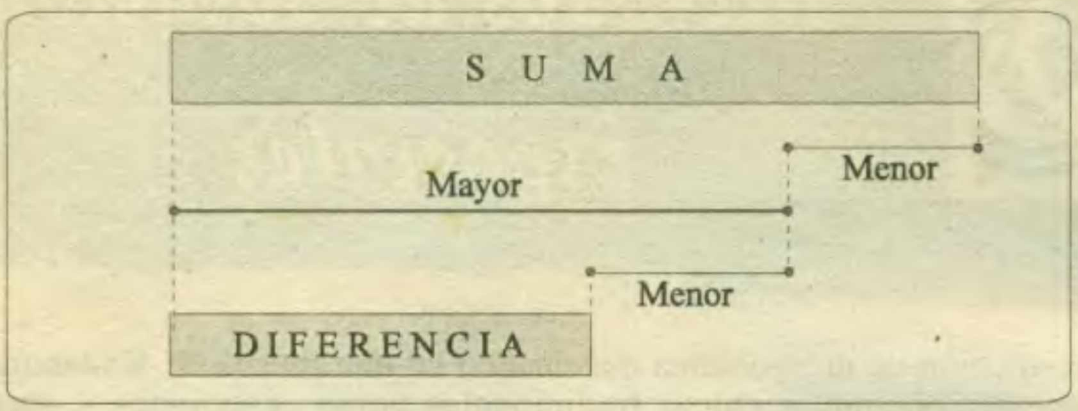
Se emplea cuando el problema a resolver tiene como datos tanto la suma como la diferencia de las cantidades desconocidas. Por lo general el cálculo de estas cantidades se hace operando mecánicamente con los datos (Suma y Diferencia) de la manera como se indica en el siguiente cuadro:

$$\textbf{Cantidad mayor} = \frac{\textbf{Suma} + \textbf{Diferencia}}{2}$$

$$\textbf{Cantidad menor} = \frac{\textbf{Suma} - \textbf{Diferencia}}{2}$$

ESQUEMA ILUSTRATIVO:

Representando por barras a la suma y diferencia de dos números: Mayor y menor, tendremos el siguiente esquema:



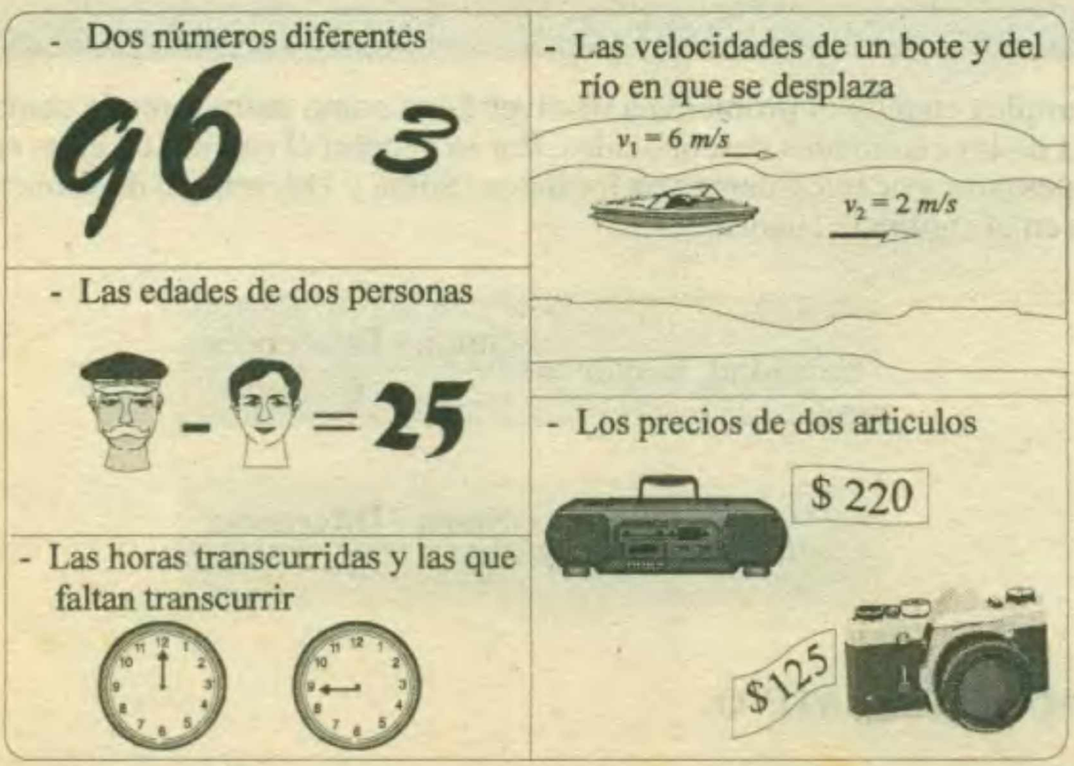
De esto observarás que:

1) Suma - Diferencia = dos veces menor

2) Diferencia + Menor = Mayor

SUGERENCIAS

Se puede aplicar este método en diversas situaciones, donde queden claramente establecidas la suma y la diferencia de las dos cantidades a buscar, las cuales pueden ser :



PROBLEMAS RESUELTOS (1 RA PARTE)

1.- Pedro dice: "lo que tengo, más lo que debo da 2 800 soles; si pagara lo que debo, me quedarían 1 200 soles". ¿Cuánto debe Pedro?

A) 1 800 B) 1 600 C) 800 D) 1 000 E) 1 200

Resolución:

- Las cantidades desconocidas son: Lo que tiene (**T**) y lo que debe (**D**).
- Se sabe que la suma es de 2 800.
- La diferencia es el otro dato (1 200) pero advertimos que la cantidad mayor es lo que tiene (**T** > **D**); puesto que le alcanza para pagar lo que debe.
- Como se trata de hallar la cantidad menor, aplicamos la 2da fórmula:

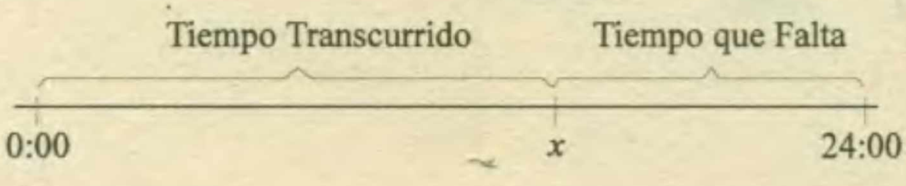
$$\text{Debe} = \frac{2\,800 - 1\,200}{2} = \boxed{800}$$ RPTA. C

2.- En cierto día, las horas transcurridas exceden a las que faltan transcurrir en 6 horas 32 minutos. ¿A qué hora ocurre esto?

A) 10 : 28 am B) 8 : 15 pm C) 6 : 32 pm D) 8 : 44 am E) 3 : 16 pm

Resolución:

Aunque no sea evidente en los datos, es fácil advertir que la suma del tiempo transcurrido (**TT**) y el que falta transcurrir (**TF**) es 24 *horas*.



La diferencia entre los dos tiempos ya se indicó: 6 *horas* 32 *minutos*.

La hora buscada corresponde a la cantidad mayor:

$$TT = \frac{24:00 + 6:32}{2} = 15:16$$

La respuesta es de 15 : 16 ó $\boxed{3:16\,pm}$ RPTA. E

3.- Una lancha navega en un río a favor de la corriente de modo que avanza a razón de 45 km/h y cuando va en sentido contrario lo hace a 19 km/h. ¿A qué velocidad navegará en una laguna?

A) 22 km/h B) 27 km/h C) 13 km/h D) 32 km/h E) 17 km/h

Resolución:

La fase "*a favor de la corriente*" en realidad es la suma de dos velocidades que desconocemos: De la lancha (v_L) y del río (v_R). Análogamente, la fase "*en contra de la corriente*" es la diferencia entre las mismas velocidades, entonces tenemos la suma y la diferencia siguientes:

$$v_L + v_R = 45$$

$$v_L - v_R = 19$$

La velocidad mayor es de la lancha, luego aplicamos:

$$v_L = \frac{45 + 19}{2} = 32\ km/h$$

$$v_R = \frac{45 - 19}{2} = 13\ km/h$$

Y ahora te toca a ti ¿Cuál de estas es la respuesta?

4.- Una correa con su hebilla cuestan 24 soles. Si la hebilla cuesta 4 soles menos que la correa ¿Cuánto cuesta la hebilla?

A) 20 *B) 10* *C) 14* *D) 4* *E) 8*

Resolución:

Aquí la suma es 24 y la diferencia es 4. Las cantidades son el costo de la correa (C) y el costo de la hebilla (H).

Nos piden la menor, entonces:

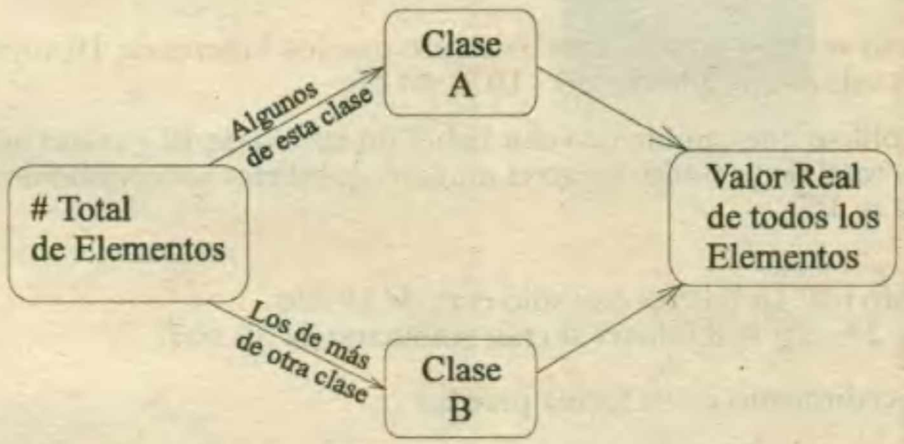
$$H = \frac{24 - 4}{2} = 10$$ RPTA. B

ID FALSA SUPOSICION

Este método se emplea cuando un problema presenta un conjunto de elementos de dos clases diferentes, siendo el objetivo principal averiguar cuántos son de cada clase. Asi pues debes reconocer que en estos problemas existen siempre **dos incógnitas**.

Otra caraterística de estos problemas es la existencia de cuatro (4) datos: Siendo el principal el que consigna el número total (*N*) de elementos desconocidos, que por estar dividido en dos grupos diferentes vendrá acompañado de dos valores respectivos : Clase *A* y clase *B* (dos datos más) y finalmente el valor reunido con todos estos elementos al que llamaremos Valor real (*V.R.*)

El presente diagrama resume estas apreciaciones :



Aclaramos que no se sabe cómo están distribuídos los elementos, sin embargo ,el procedimiento para saber cuántos son de cada clase consiste en suponer que sólo hay una , es decir supondremos que todos los elementos son de una sola clase lo cual generará un valor acumulado diferente al real, a quien llamaremos Valor supuesto(*VS*). La diferencia entre estos dos valores nos permitirá hallar la cantidad de elementos (*n*) que *no fueron tomados en cuenta* en la suposición.

La fórmula para hallar *n* es la siguiente:

$$n = \frac{\textbf{Valor Supuesto - Valor Real}}{\textbf{Valor de clase A - Valor de clase B}}$$

Los demás elementos (2da incógnita) se pueden hallar con una simple diferencia entre el total de elementos (*N*) y "*n*".

Las situaciones en que podemos aplicar el presente método tratan frecuentemente sobre:

- Monedas o billetes de dos clase.
- Tarifas diferenciadas en viajes, entradas a espectáculos etc.
- Cabezas y patas, ojos y cabezas, ...etc, de animales de dos especies.
- Aciertos y errores que se califican con diferente puntuación.
- Leche adulterada con agua en una mezcla, etc.

PROBLEMAS RESUELTOS (2 DA PARTE)

5.- En una billetera hay 24 billetes que hacen un total de 560 soles. Si solo habían billetes de 50 soles y de 10 soles. ¿Cuántas eran de cada clase ?

A) 14 y 10 B) 16 y 8 C) 12 y 12 D) 15 y 19 E) N.A

Resolución:

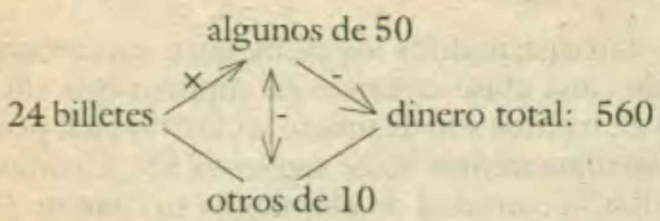
A) Primero explicamos el método sin recurrir a la fórmula.

- Suponemos que 24 *billetes* eran de 50 *soles*
- Esto da un valor supuesto de 24 × 50 = 1 200 *soles*, que excede al valor real (560) en: 1 200 - 560 = 640 *soles*.

- Este exceso se dá porque hemos asumido que los billetes de 10 valen 50 *soles* y les damos un valor agregado de: 50 - 10 = 40 *soles*
- Por cada billete que cambia de valor habrá un exceso de 40 y como hemos calculado un exceso total de 640 *soles*, luego el número de billetes sobrevalorados es: 640 ÷ 40 = 16.

- Por lo tanto hay 16 billetes que solo eran de 10 *soles*. y el resto: 24 - 16 = 8 billetes si eran realmente de 50 *soles*.

B) Ahora el procedimiento en su forma práctica:



Valor Supuesto = 24 × 50 = 1200 , y , Valor Real = 560

Por fórmula: $n = \dfrac{1200 - 560}{50 - 10} = \dfrac{640}{40} = \boxed{16}$

Explicación:

Estos 16 billetes no fueron de la clase supuesta (es decir de 50), por lo tanto son de 10 *soles* y el resto lo calculamos por diferencia:

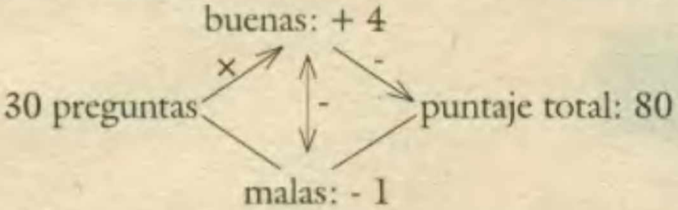
24 - 16 = **8** son billetes de 50 *soles* RPTA. B

6.- En un examen, cada respuesta correcta vale 4 puntos y cada incorrecta vale -1 punto. Si un alumno, luego de responder 30 preguntas obtuvo 80 puntos. ¿En cuántas se equivocó?

A) en 7 B) en 9 C) en 8 D) en 6 E) en 10

Resolución:

Al haber respuestas de dos clases: Buenas ó malas, podemos aplicar el método, aunque considerando los signos. (cada buena tiene puntaje positivo y cada mala puntaje negativo).



Suponemos que solo hay buenas: $30 \times 4 = 120$ pts.

$$n = \frac{120 - 80}{4 - (-1)} = \frac{40}{5} = 8$$

Luego hay 8 preguntas mal contestadas (porque en la suposición se eligieron todas las buenas).

RPTA. C

7.- En un zoológico, entre todas las jirafas y avestruces se podían contar 30 ojos y 44 patas. Determinar el número de alas.

A) 14 ***B) 28*** ***C)16*** ***D) 12*** ***E) 30***

Resolución:

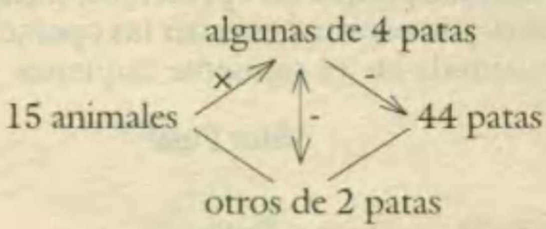
No parece que hubieran 4 datos, pero a pesar de ello los buscamos:

1.- El # de animales se deduce del # de ojos, basta con dividir: $30 \div 2 = 15$

2.- Estos 15 animales son de dos clases: los de 4 patas (jirafas) y los de 2 patas (avestruces).

3.- El total de patas es 44 y se constituye en el cuarto y último dato.

4.- Ahora ubicamos los datos en el esquema habitual y aplicamos el método.



Suponiendo que todos los animales son de 4 patas, el número (n) de animales de 2 patas será:

$$n = \frac{15 \times 44}{4 - 2} = \frac{16}{2} = 8$$

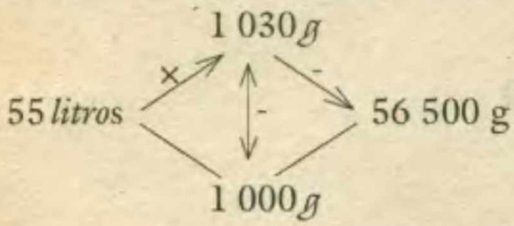
Este número es de avestruces ya que hemos supuesto que todos los animales son jirafas. De aquí, el número de alas es : $8 \times 2 = 16$ RPTA.C

8.- Un litro de leche pura debe pesar 1 030 gramos. Si un vendedor entregó 55 litros que pesaban 56,5 kg, calcular la cantidad de agua que contenía esta entrega.

A) 5 l ***B) 4 l*** ***C) 9 l*** ***D) 13 l*** ***E) 11 l***

<u>Resolución</u>:

En este problema el total de elementos es de 55 *litros*, que pueden ser de leche pura o agua. Los pesos por *litros* de estos líquidos son 1 030*g* y 1 000*g* respectivamente. El último dato es el peso total que expresado en *gramos* es 56 500 .



Suponiendo que todo es leche pura, se obtendrán los litros (n) de agua.

$$n = \frac{55\times1030-6500}{1030\text{-}100} = \frac{150}{30} = 5$$ **RPTA. A**

Nota.- Según las reglas del Sistema Internacional de Unidades (S.I) se tienen que:

1 *gramo* = 1 *g*

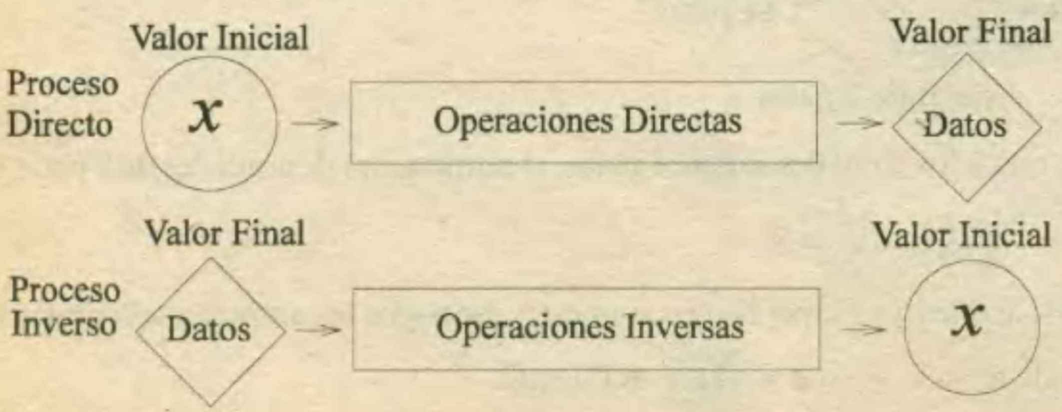
1 *litro* = 1 *l*

III) MÉTODO DEL CANGREJO

Se puede aplicar en aquellos problemas que presentan etapas que modifican un valor inicial desconocido y al final de ellas se tiene un valor resultante que sí se conoce.

El procedimiento para hallar la incógnita se inicia en el último dato y de ahí se retrocede aplicando operaciones inversas a las dadas, hasta obtener el valor inicial. Es a esta forma de proceder que se debe el nombre del método.

En este método no disponemos de ninguna fórmula porque las operaciones a efectuar están condicionadas por el enunciado del problema y lo esencial es tener las operaciones para de ahí invertir el proceso. La idea queda resumida en el siguiente esquema:



Las etapas sucesivas deben emplearse como operaciones aritméticas que sean la correcta interpretación del enunciado. Algunas situaciones acompañadas de sus "traducciones" son como estos ejemplos:

ENUNCIADO	INTERPRETACION (oper. directas)	CANGREJO (oper. indirectas)
Duplicó su dinero	□ × 2 = □	.... □ ÷ 2
Gastó 4 soles	○ - 4 = ○	.... ○ + 4
Triplicó lo que tenía	△ × 3 = △	.... △ ÷ 3
Gastó la mitad más 1	{ ◇ ÷ 2 }- 1 = ◇	.... { ◇ + 1 }× 2

En la última línea: "*gastó la mitad más uno*", no se puede traducir como ÷ 2 , + 1 porque ese "*más uno*" es un gasto y debe ir con signo negativo, dado que la operación final es una sustracción.

PROBLEMAS RESUELTOS (3 RA PARTE)

9.- Una persona ingresó a un restaurante, gastó la mitad de lo que tenía y dejó 3 soles de propina. Luego ingresó a una heladería, gastó la mitad de lo que aún le quedaba y dejó 2 soles de propina, quedándose sin dinero. ¿Cuánto tenía inicialmente?

A) 12 B) 16 C) 10 D) 14 E) 18

__Resolución:__

En el restaurante: gastó la mitad y dejó 3

En la heladería: gastó la mitad y dejó 2

Las operaciones directas son:

x_1 ⟨ ÷ 2; -3 ⟩ x_2 .... (restaurante)

x_2 ⟨ ÷ 2; -2 ⟩ 0 .... (heladería)

El valor final es (0) porque quedó sin dinero.

Las operaciones inversas para hallar x_2 la deducimos de la heladería:

0 ⟨ + 2; × 2 ⟩ 4 ; $x_2 = 4$

Este valor es el intermedio entre la 1ra y la 2da etapa. (el inicio de la 2da y la final de la 1ra)

Para hallar x_1 , seguimos operando al revés con los datos del restaurante:

4 ⟨ + 3; × 2 ⟩ 14 ; $x_1 =$ **14** **RPTA. D**

10.- A un número se le efectuaron las siguientes operaciones: Se le agregó 10, al resultado se le multiplicó por 5 para quitarle enseguida 26. Si a este resultado se extrae la raíz cuadrada y por último se multiplica por 3, se obtiene 24. ¿Cuál es el número?

A) 12 *B) 10* *C) 8* *D) 6* *E) 14*

Resolución:

Las operaciones directas serían:

$$x \rightarrow +10;\ \times 5;\ -26;\ \sqrt{\ };\ \times 3 \rightarrow 24$$

Ahora efectuamos las operaciones inversas empezando en 24:

$$24 \rightarrow \div 3;\ (\ )^2;\ +26;\ \div 5;\ -10 \rightarrow x$$

Los resultados parciales paso a paso son:

1^{era} operación: $24 \div 3 = 8$

2da operación: $(8)^2 = 64$

3^{era} operación: $64 + 26 = 90$

4ta operación: $90 \div 5 = 18$

5ta operación: $18 - 10 = 8$

$x = 8$ RPTA. C

11- El nivel del agua de un pozo en cada hora desciende 3 centímetros por debajo de su mitad, hasta quedar vacío el pozo luego de 4 horas. ¿Qué profundidad tenía el agua inicialmente?

A) 144 cm *B) 120 cm* *C) 80 cm* *D) 72 cm* *E) 90 cm*

Resolución:

"3 *cm* debajo de su mitad" se interpreta como: $\div 2;\ -3$

Puesto que esto ocurre en cada hora, y se repite 4 veces ya que todo el suceso ocurre en 4 *horas*, de modo que al final el nivel es cero (0), las operaciones directas serían así:

$$x \rightarrow \div 2;\ -3;\ \div 2;\ -3;\ \div 2;\ -3;\ \div 2;\ -3 \rightarrow 0$$

Ahora, operando al revés obtenemos: $x = 90$ RPTA. E

12.- En un lejano país existe una imagen milagrosa que duplica el dinero con la condición de que el favorecido deje una ofrenda de 80 monedas después de cada milagro. Uno de sus feligreses resultó favorecido 3 veces seguidas y dejó también sus ofrendas, pero al final quedó poseedor de nada. ¿Cuánto tenía inicialmente?

A) 90 mon *B) 120 mon* *C) 70 mon* *D) 80 mon* *E) 160 mon*

Resolución:

Cada etapa se reduce a estas operaciones: × 2; -80

Como son 3 etapas y al final tiene cero (0):

$x \to \times 2; -80 ; \times 2; -80 ; \times 2; -80 \to 0$

Operando al revés se obtendrá: $x = 70$ RPTA. C

13.- Dos jugadores, acuerdan que después de cada partida, el que pierde duplicará el dinero del otro. Después de dos partidas, que las ha ganado un solo jugador, cada uno tiene 64 soles. ¿Cuánto tenía el perdedor al inicio?

A) 16 B) 128 C) 96 D) 112 E) 32

Resolución:

Este problema requiere una reconstrucción múltiple que se organiza mejor con un diagrama de filas y columnas.

Jugador	Inicio	1ra partida	2da partida
A	?	?	64
B		$\xrightarrow{x2}$	$\xrightarrow{x2}$ 64
	128	128	128

Valores finales conocidos

El total que aparece en esta línea no varía

Efectuando las operaciones al revés, se logra construir los casilleros sombreados, los otros se deducen fácilmente porque cada columna debe sumar 128 y el cuadro terminado quedará así:

Jugador	Inicio	1ra partida	2da partida
A	112	96	64
B	16	32	64
	128	128	128

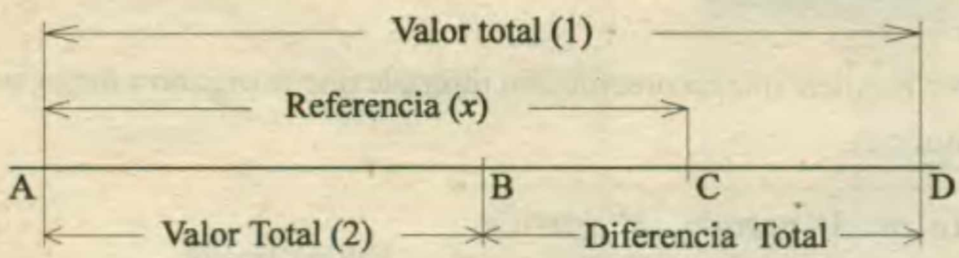
El perdedor (A) al inicio del juego tenía **112 *soles*** RPTA. D

IV) DIFERENCIA UNITARIA Y DIFERENCIA TOTAL

Este método debe su nombre al hecho que un número desconocido (n) de elementos de una misma especie cambia su valor unitario y esto genera una variación en el valor total de los n elementos. Para hallar este número desconocido se aplica esta fórmula sencilla.

$$n = \frac{\textbf{Diferencia Total}}{\textbf{Diferencia Unitaria}}$$

Lo más importante es reconocer correctamente ambas diferencias y esto puede lograrse con ayuda del gráfico. A veces, (ver gráfico) la diferencia entre los valores totales (1) y (2) se asocia con un valor de diferencia que se constituye en una incógnita auxiliar. Los BC y CD completan la información necesaria.



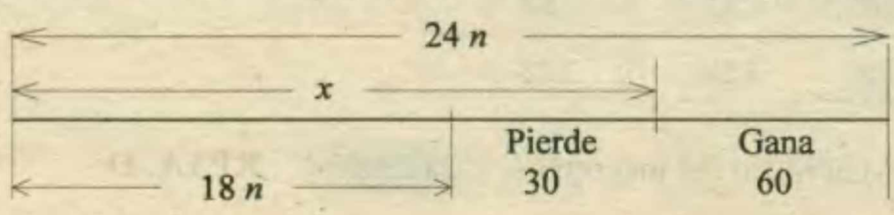
PROBLEMAS RESUELTOS (4 TA PARTE)

14.- Un vendedor ofrece un lote de camisas a 24 soles cada una para ganar 60 soles respecto a su inversión, pero si se decide venderlo a 18 soles cada camisa pierde 30 soles. ¿Cuántas camisas tiene el lote?

A) 15 ***B) 20*** ***C) 18*** ***D) 20*** ***E) 24***

Resolución:

La incógnita principal (n) es el número de camisas. El precio unitario de ellas varía de 18 a 24 soles. Esto da valores totales de $18n$ y $24n$ respectivamente. La comparación se observa en el gráfico:



La diferencia total es: $30 + 60 = 90$

La diferencia (cambio de precio) $= 24 - 18 = 6$

$n = \frac{D.T}{D.U} = \frac{90}{6} = 15$ El lote tenía **15 *camisas.***

Observación.- Nótese que la inversión (x) es la incógnita auxiliar o referencia, que no se pide en la pregunta pero que se puede calcular así:

$$x = 18n + 30 = 18(15) + 30 = 300 \quad \text{RPTA. A}$$

15.- Unos alumnos hacen una colecta para adquirir una pelota para su equipo de básquet. Si cada uno colaborase con 3 soles faltarían 20 soles, entonces deciden aumentar la colaboración a 3,50 soles y ahora les alcanza y sobran 5 soles. ¿Cuánto cuesta la pelota?

A) 150 ***B) 170*** ***C) 180*** ***D) 120*** ***E) 125***

Resolución:

El valor unitario varía de 3 a 3,5, entonces DU = 0,5 los valores totales son de $3n$ y $3{,}5n$ y el valor de referencia el precio de la pelota (x).

$$n = \frac{D.T}{D.U} = \frac{20+5}{0{,}5} = \frac{25}{0{,}5}$$

$$n = 50$$

La pelota cuesta:

$$x = 3 \times 50 + 20 = 170 \quad \text{RPTA. B}$$

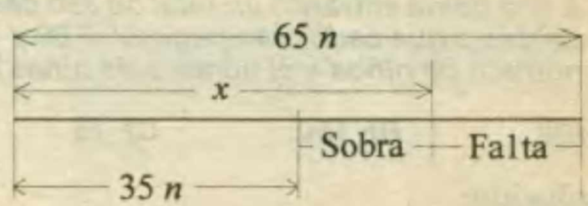
16.- Un padre va con sus hijos a un concierto y al querer comprar entradas de 65 soles observa que le falta para 4 de ellos y tiene que comprar entradas de 35 soles. Es así que entran todos y le sobra 10 soles. ¿Cuántos hijos llevó al concierto?

A) 6 ***B) 7*** ***C) 8*** ***D) 9*** ***E) 10***

Resolución:

El número (n) de entradas es la incógnita y el valor (x) de referencia es el dinero con que cuenta el padre.

La diferencia unitaria es: 65 - 35 = 30



La diferencia total es lo que falta más lo que sobra. Lo que falta es el dinero para las 4 entradas de 65: 4 × 65 = 260 ; lo que sobra ya se conoce: 10 *soles*.

Ahora, si la diferencia total es: 260 + 10 = 270

$$\Rightarrow \ n = \frac{D.T.}{D.U} = \frac{270}{30} = 9$$

A este número de entradas le quitamos la entrada del padre y tendremos:

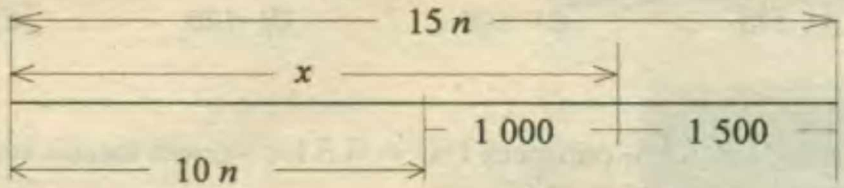
\# de hijos = 9 - 1 = 8. RPTA.C

17.- Se quiere rifar una microcomputadora con cierto número de boletos. Si se vende cada boleto a 10 soles se pierde 1 000 y si se vende a 15 soles se gana 1 500 soles. Determinar el número de boletos y el precio de la computadora.

A) 500 ; 6 400 B) 600 ; 1 200 C) 400 ; 5 000 D) 500 ; 6 000 E) 300 ; 7 000

Resolución:

La referencia (x) es el valor de la computadora y n el número de boletos:



La diferencia total es: 1 000 +1 500 = 2 500

La diferencia es: 15 - 10 = 5

$$\Rightarrow n = \frac{2\,500}{5} = 500$$

$\therefore\ x = 10 \times 500 + 1\,000 =$ **6 000** RPTA. D

A modo de recapitulación proponemos un *TEST* por medio de problemas relacionados con estos métodos y que han sido incluídos en recientes exámenes de ingreso a distintas universidades.

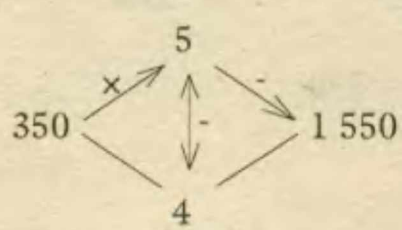
MISCELANEA

18.- A una fiesta entraron un total de 350 personas entre niños y niñas. Se recaudó S/. 1 550 debido a que cada niño pagó S/. 5,00 y una niña S/. 4,00. ¿Cuál es la diferencia entre el número de niños y el número de niñas?

A) 100 B) 150 C) 75 D) 60 E) 50 UNFV - 96

Resolución:

Por falsa suposición:



$$\#\text{ niñas} = \frac{1750 - 1550}{5 - 4} = 200$$

$\#$ niños = 350 - 200 = 150 ; diferencia = **50** RPTA. E

19.- Pedro tiene monedas de S/. 0,50 y Pablo tiene monedas de S/. 1,00. La suma de lo que tienen es 50 soles. Si Pedro le da 12 monedas a Pablo, ambos tendrían igual cantidad. ¿Cuántas monedas tiene Pablo?

A) 12 B) 25 C) 19 D) 31 E) 62 PUCP - 92I

Resolución:

La suma es 50. Como Pedro le da a Pablo: $12(0,5) = 6$ *soles* para igualarse, la diferencia es 12 *soles*.

La cantidad menor la tiene Pablo y es: $\dfrac{50-12}{2} = 19$ *soles* como sus monedas eran de 1 *sol*, Pablo tiene 19 monedas.

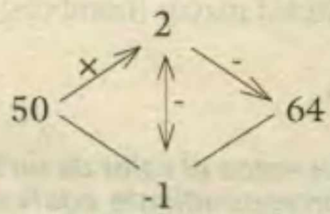
RPTA. C

20.- En una prueba de 50 preguntas, un alumno gana 2 puntos por respuesta correcta pero pierde un punto por cada equivocación. ¿Cuántas respondió correctamente, si obtuvo 64 puntos y contestó a todas?

A) 42 B) 36 C) 38 D) 24 E) 32 UNMSM - 90

Resolución:

Por falsa suposición:

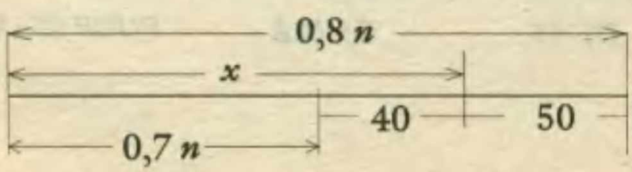


$\# \text{ incorrectas} = \dfrac{100-64}{2-(-1)} = 12$; # correctas = 38 RPTA. C

21.- Se desea rifar un reloj vendiéndose cierto número de boletos. Si se vende cada boleto a S/. 0,70 se pide 40 soles y si se vende cada boleto a S/. 0,80, se gana 50 soles. El precio del reloj en soles es:

A) 90 B) 220 C) 720 D) 670 E) 120 UNALM - 91

Resolución:



D.T = 90

D.U = 0,1

$\Rightarrow n = 900$

$\Rightarrow \quad x = 900\,(0,7) + 40 = 630 + 40$

$\therefore \quad x = 670$ RPTA. D

22.- Jorge le dice a Rosa: "Si a la cantidad de dinero que tengo le agrego 20 soles, luego a ese resultado lo multiplico por 6, para quitarle a continuación 24 soles. Y si a ese resultada le extraigo la raíz cuadrada y por último lo divido entre 3, obtengo 8 soles. Lo que tengo al inicio es: "

A) S/. 92 B) S/. 24 C) S/. 80 D) S/. 576 E) S/. 352 UNFV - 94

Resolución:

$x \rightarrow (+20;\ \times 6;\ -24;\ \sqrt{\ };\ \div 3) \rightarrow 8$

Operando al revés: $x = 80$ RPTA. C

23.- A una velada asistieron 20 personas. María bailó con 7 muchachos; Olga con 8, Victoria con 9 y así hasta llegar a Juana que bailó con todos ellos. ¿Cuántos muchachos había en la velada?

A) 13 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10 UNI - 91

Resolución:

La 1ª dama baila con 7; la 2ᵈᵃ con 8, la 3ª.... etc. Esto quiere decir que la diferencia entre hombres y mujeres es 6. Si la suma es 20 y nos piden la cantidad mayor (hombres), se obtiene :

$(20 + 6) \div 2 =$ **13** RPTA. A

24.- Por la compra de 240 libros se paga en impuestos el valor de un libro más 60 soles. Por 180 libros del mismo tipo el impuesto correspondiente equivale al valor de un libro menos 40 soles. ¿Cuánto cuesta cada libro?

A) 400 soles B) 440 soles C) 340 soles D) 100 soles E) 240 soles UNMSM - 93

Resolución:

Llamamos I al impuesto de un libro. La diferencia entre 240I y 180I es 100 soles, luego si 60I es 100, 240I será 400 *soles* y esto es el precio de un libro más 60 *soles*, entonces un libro cuesta:

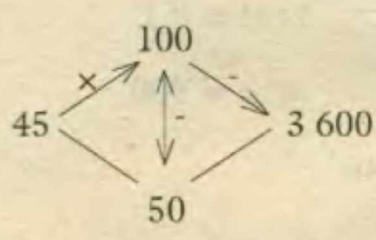
$400 - 60 =$ **340** RPTA. C

25.- Se tiene 3 600 soles en billetes de S/.100 y S/.50 que se han repartido entre 45 personas tocándole a cada una un billete. ¿Cuántas personas recibieron un billete de S/.100?

A) 30 B) 18 C) 27 D) 15 E) N.A PUCP 95 - II

Resolución:

Por la falsa suposición:



$$\frac{45\cdot 100 - 3600}{100 - 50} = \frac{900}{50} = 18$$ billetes son de 50 *soles* y $45 - 18 = 27$ son de: **100** RPTA. C

26.- Dos niños han recorrido en total 64 metros, dando entre los dos 100 pasos. Si cada paso del segundo mide 50 cm y cada paso del primero mide 70 cm ¿Cuántos pasos más que el segundo ha dado el primero?

A) 10 *B) 20* *C) 30* *D) 40* *E) 50*

Resolución:

Método Analítico.- Si todos los pasos fueran de 70 *centímetros*, el recorrido sería de :

$$100 \times 70 = 7\,000\ cm = 70\ metros$$

Pero el recorrido exacto es de 64 *metros*; luego hay :

$$70 - 64 = 6\ metros\ ,\text{ó},\ 600\ cm \text{ de más.}$$

Sabemos que por cada paso de 50 *cm*, que ha sido tomado como de 70 *cm*, se genera un exceso de 20 *cm*, por ello el # de pasos de 50 *cm* se obtendrá por medio de la siguiente división :

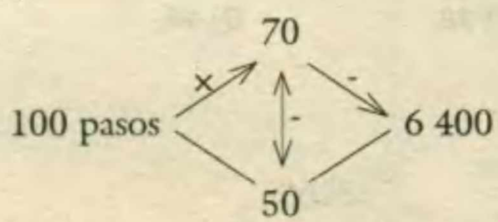
$$600 \div 20 = 30 \text{ pasos}$$

En resumen :- El primero dió 100 - 30 = **70** pasos de 70 *cm* : 49 *metros*

- El segundo dió **30** pasos de 50 *cm* : 15 *metros*.

El 1ro dió : 70 - 30 = 40 pasos más que el 2do.

Método abreviado .- Este consistirá en reconocer los elementos que componen al llamado Método del Rombo :



\# de pasos de 50 : $\dfrac{100 \times 70 - 6\ 400}{70 - 50} = 30$

\# de pasos de 70 : 100 - 30 = 70

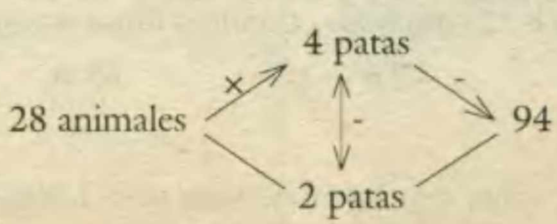
Exceso de unos sobre los otros : 70 - 30 = **40** **RPTA. D**

27.- En un establo hay vacas, caballos y aves. Si el número total de animales es 28 y el número contado de patas es 94 ¿ Cuántas aves hay?

A) 9 *B) 10* *C) 11* *D) 12* *E) 13*

Resolución:

Por el método abreviado :



\# de animales de 2 patas (aves) : $\dfrac{28 \times 4 - 94}{4 - 2} = 9$ RPTA. A

28.- Los pasajeros en microbús valen S/. 0.30 y S/. 0.60 para universitarios y adultos respectivamente. Luego de una vuelta en la que viajaron 90 de estas personas se recaudó S/. 36. ¿Cuántos universitarios viajaron?

A) 20 *B) 40* *C) 60* *D) 80* *E) 100*

Resolución:

Por falsa suposición : 90 p → (×) S/. 0,60 → (-) S/. 36 ; S/. 0,60 (-) S/. 0,30

\# de universitarios : $\dfrac{90(0,6) - 36}{0,6 - 0,3} = \dfrac{18}{0,3} = 60$ RPTA. C

29.- El examen de un concurso de admisión consta de 100 preguntas, por cada respuesta correcta le asigna 5 puntos a favor y 0,75 en contra por respuesta equivocada. Si un postulante ha obtenido en dicha prueba 316 puntos habiendo respondido la totalidad de las preguntas, el número de respuestas correctas excede a las incorrectas en :

A) 34 *B) 36* *C) 38* *D) 40* *E) 42*

Resolución:

Por falsa suposición : 100 → (×) 5 → (-) 316 ; 5 (-) - 0,75

Suponiendo todas buenas, hallamos el # de malas :

\# incorrectas : $\dfrac{100 \cdot 5 - 316}{5 - (-0,75)} = \dfrac{184}{5,75} = 32$

\# correctas : 100 - 32 = 68

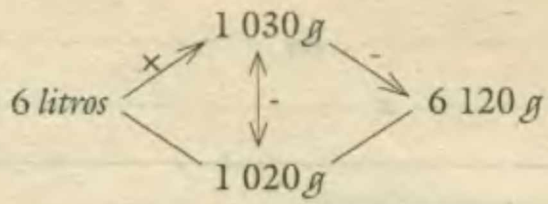
Entonces : 68 - 32 = 36 RPTA. B

30.- Un litro de leche pura pesa 1 030 gramos; cierto día se compraron 6 litros de leche adulterada que pesan 6 120 gramos. ¿Cuántos litros de agua contiene esta leche?

A) 2 *B) 4* *C) 6* *D) 8* *E) 10*

Resolución:

En este caso, tenemos que saber que 1 *litro* de agua pesa 1 000 *gramos*, además de los otros datos, luego aplicamos el método de falsa suposición :



$\# \text{ de litros de agua} : \dfrac{6 \cdot 1\ 030 - 6\ 120}{1\ 030 - 1\ 000} = \dfrac{60}{30} = \boxed{2}$ RPTA. A

31.- Lilí, cada día gasta la mitad de lo que tiene más S/. 20; si gastó todo en 4 días. ¿Cuánto gasto el segundo día?

A) 100 ***B) 110*** ***C) 120*** ***D) 130*** ***E) 140***

Resolución:

En cada día sucede lo siguiente : "gasta la mitad; gasta S/. 20"

Es decir, en operaciones : " $\div 2$; -20 "

Repetido 4 veces, porque son 4 días, tendremos :

$$x \to \boxed{\div 2 \,;\, -20} \xrightarrow{\;y\;} \boxed{\div 2 \,;\, -20} \xrightarrow{\;z\;} \boxed{\div 2 \,;\, -20} \xrightarrow{\;w\;} \boxed{\div 2 \,;\, -20} \to 0$$

Aplicamos el método del cangrejo y obtendremos los valores del dinero que tenía al inicio de cada proceso :

1ra iteración : $(0 + 20) \times 2 = 20$; $w = 20$

2da iteración : $(20 + 20) \times 2 = 80$; $z = 80$

3ra iteración : $(80 + 20) \times 2 = 200$; $y = 200$

4ta iteración : $(200 + 20) \times 2 = 440$; $x = 440$

Lo que gastó el 2do día es : $y - z = 200 - 80 = \boxed{120}$ RPTA. C

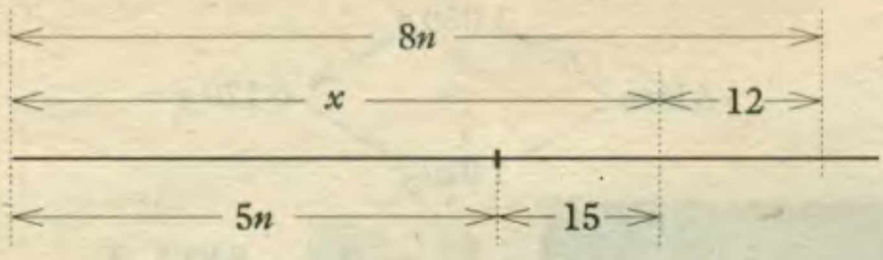
32.- Un matrimonio dispone de una suma de dinero para ir al teatro con sus hijos. Si compra entradas de S/. 8 le faltaría S/. 12 y si adquiere entradas de S/. 5 le sobraría S/. 15. ¿Cuántos hijos tiene el matrimonio?

A) 1 ***B) 3*** ***C) 5*** ***D) 7*** ***E) 9***

Resolución:

Siendo n el # de entradas compradas, el matrimonio puede gastar : $8n$, ó , $5n$ *soles*.

Si lo que el matrimonio tiene es x *soles*, según los datos podemos elaborar el siguiente esquema :



Vemos que $8n - 5n = 15 + 12 \rightarrow n = 9$ entradas

Descontando al matrimonio, los hijos son : 9 - 2 = **7** RPTA. D

33.- A una reunión asistieron 20 personas. María bailó con siete muchachos; Olga con ocho, Anita con nueve, y así sucesivamente hasta llegar a Carlota, que bailó con todos ellos. ¿Cuántos muchachos habían en la velada?

A) 13 *B) 14* *C) 15* *D) 16* *E) 17*

Resolución:

María bailó con siete : la 1ra con 7

Olga bailó con ocho : la 2da con 8

Anita bailó con nueve : la 3ra con 9

....

Esto significa que el # de muchachos supera al de muchachas en 6 y como en total son 20, tenemos:

Suma = 20 ; Diferencia = 6

∴ # de muchachos : $\frac{20+6}{2} =$ **13**

de muchachas : $\frac{20-6}{2} = 7$ RPTA. A

34.- Magaly y Lucy tienen entre las dos S/. 650; Magaly gasta S/. 75 y entonces Lucy tiene S/. 85 más que Magaly. ¿Cuánto tiene ahora Magaly?

A) 241 *B) 243* *C) 245* *D) 247* *E) 249*

Resolución:

Después que Magaly gasta sus S/. 75, entre las dos tienen 650 - 75 = 575 *soles*, y además se sabe que Lucy tiene 85 más que Magaly, entonces tenemos la suma y la diferencia :

5 = 575 ; D = 85

Lo que tiene Magaly es : $\frac{S-D}{2} = \frac{575-85}{2} =$ **245** RPTA. C

35.- Entre dos personas tienen 600 soles. Si uno de ellos diera S/.100 al otro, ambos tendrían la misma suma. ¿Cuánto tiene cada uno?

A) 100 y 80 B) 200 y 90 C) 300 y 100 D) 400 y 200 E) 500 y 300

Resolución:

Cuando uno de ellos da 100 a otro, ambos tienen la misma suma, esto indica que uno tiene 200 más que el otro, es decir, la diferencia es 200. Además sabemos que la suma es 600, luego si conocemos la suma (S) y la diferencia (D) de dos números , podemos establecer que :

Cantidad mayor : $\frac{S+D}{2} = \frac{600+200}{2} = 400$

Cantidad menor : $\frac{S-D}{2} = \frac{600-200}{2} = 200$ RPTA. D

36.- Hallar la profundidad de un pozo de agua sabiendo que cada día su nivel desciende en 4 metros por debajo de su mitad ; quedando vacío al cabo del cuarto día.

A) 110 B) 120 C) 130 D) 140 E) 150

Resolución:

El nivel del agua desciende a su mitad y luego desciende 4 *m*.

Es decir, las operaciones son : " ÷ 2 ; - 4 "

Luego de 4 etapas, el nivel es cero, entonces elaboramos el siguiente diagrama :

x → ÷ 2 ; - 4 → ÷ 2 ; - 4 → ÷ 2 ; - 4 → ÷ 2 ; - 4 → 0

Salta a la vista que es recomendable aplicar el método del cangrejo ; por tal razón realizamos las siguientes operaciones inversas :

$(0 + 4) . 2 = 8$; $(8 + 4) . 2 = 24$; $(24 + 4) . 2 = 56$; $(56 + 4) . 2 = 120$

Luego la profundidad del pozo era 120 *metros* RPTA. B

37.- Tengo cierta cantidad de caramelos que voy a repartirlos entre mis hermanos. Si les doy 10 a cada uno me sobran 7, pero si les doy 12 a cada uno , al último sólo podría darle 3 caramelos. ¿Cuántos hermanos somos?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

Resolución:

Sea *n* el # de hermanos que reciben caramelos. Ahora analizamos los datos :

"Si les doy 10 a cada uno me sobran 7", es decir, para 10 *n* sobran : 7

"Si les doy 12 a cada uno solo podría darle 3 al último", es decir, para 12 *n* faltan : 12 - 3 = 9

Entonces, si para $12n$ faltan 9 y para $10n$ sobran 7; la diferencia entre $12n$ y $10n$ es : $9 + 7 = 16$, osea n es 8.

Agregamos el hermano que reparte y tenemos que son **9** RPTA. D

38.- Tres jugadores acuerdan que el perdedor de cada juego triplicará el dinero de los otros dos. Juegan 3 veces y pierden un juego cada uno en el orden A, B, C, quedando con 36; 12 y 85 soles respectivamente. ¿Cuánto tenía A al principio?

A) S/. 90 *B) S/. 80* *C) S/. 70* *D) S/. 60* *E) S/. 50*

Resolución:

Preparamos este esquema y ordenamos los datos para aplicar el método del cangrejo.

	Inicio	1ro	2do	3ro
A		4 ←	12 ←	36
B	30 ←	90	4 ←	12
C	13 ←	39	117 ←	85
Total	133	133	133	133

* Cada flecha indica que hemos dividido entre 3 : $\xleftarrow{\div 3}$

* El total no cambia.

Se obtiene que A al inicio tenía 133- (13 + 30) = **90 *soles*** RPTA. A

39.- Un niño le dice a su padre : "De los 140 soles que me diste, gasté 58 soles más de los que no gasté". ¿Cuánto no llegó a gastar el niño?

A) 21 *B) 25* *C) 31* *D) 37* *E) 41*

Resolución:

Sea G lo que gastó y NG lo que no gastó.

De los datos, la suma de G y NG es 140

También, G excede a NG en 58, es decir la diferencia es 58.

Luego, por suma y diferencia : $\frac{140+58}{2} = 99$ es la cantidad mayor (G) y : $\frac{140-58}{2} = 41$ es la cantidad menor (NG).

Entonces no gastó : **41** RPTA. E

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Un jugador hizo 3 apuestas: En la 1ª duplicó su dinero y gastó 30 soles; en la 2ª triplicó su dinero y gastó 54; en la 3ª cuadruplicó su dinero y gastó 72 soles quedándole al final 48 *soles*. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

A) 28 *soles* B) 29 *soles* C) 31 *soles*

D) 62 *soles* E) 56 *soles*

2.- La suma de dos números excede en 16 a 64 y la diferencia excede en 12 a la mitad de la suma. ¿Cuáles son estos números?

A) 48 y 32 B) 52 y 38 C) 36 y 20

D) 66 y 14 E) 64 y 16

3.- Una persona quiere repartir cierto número de caramelos a sus sobrinos. Si les da 8 caramelos a cada uno, le sobran a 45 y si les da 11 a cada uno, le faltan 27. ¿Cuántos caramelos quiere repartir?

A) 237 B) 327 C) 273 D) 723 E) 372

4.- Juan le dice a Luis: "Si el doble de mi edad, lo multiplicas por 8, luego divides por 10, al cociente lo multiplicas por 3, agregas 36 y por último, divides el resultado entre 6, obtendrías 30 años" ¿Cuántos años tiene Juan?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

5.- Ana pregunta: "¿Qué hora es?" y Betty le responde: "Quedan del día 5 horas menos de las ya transcurridas". ¿A qué hora conversan?

A) 1:30 *pm* B) 2:00 *pm* C) 11:00 *am*

D) 2:30 *pm* E) 5:00 *pm*

6.- Una persona decide comprar la edición popular antes que la edición de lujo de un libro, ahorrándose así 32 soles. Esto representa la mitad de lo que pagaría por comprar ambas ediciones. ¿Cuánto pagó por la edición que adquirió?

A) 36 B) 48 C) 18 D) 32 E) 16

7.- Si se forman filas de 7 niños sobran 5, pero faltarían 4 niños para formar 3 filas adicionales de 6 niños. ¿Cuántos niños son?

A) 72 B) 61 C) 68 D) 116 E) 12

8.- Con 34 monedas de 5 y 10 pesos se desea colocar una a continuación de otra hasta alcanzar la longitud de un metro. Si los diámetros de las monedas son de 20 y 30 *mm* respectivamente, el # de monedas de 5 pesos es:

A) 20 B) 32 C) 18 D) 30 E) 2

9.- En un corral donde hay galllinas y conejos el número total de cabezas es 48 y el número de patas es de 122. ¿Cuántas gallinas y conejos hay en dicho corral?

A) 18 y 20 B) 35 y 13 C) 27 y 21

D) 21 y 27 E) 28 y 20

10.- Paola escribe cada día la mitad de las hojas en blanco de un cuaderno más 5 hojas. Si al cabo de 4 días gastó todas las hojas. ¿Cuántas hojas tenía el cuaderno?

A) 200 B) 175 C) 225 D) 120 E) 150

NIVEL B

11.- En un concurso de admisión, la prueba de **R.M.** tenía 100 preguntas. Por respuesta correcta se le asigna un punto y cada incorrecta tiene puntaje en contra de 1/4 de punto. César ha obtenido en dicha prueba 50 puntos, habiendo respondido la totalidad de preguntas planteadas. ¿Cuántas erró?

A) 10 B) 50 C) 30 D) 25 E) 40

12.- Un padre va con su hijos al teatro y al querer comprar entradas de 30 soles observa que le falta para 3 de ellos, y resuelve comprar de 15 soles. De esta manera entran todos y le sobran 30 soles. ¿Cuántos eran los hijos?

A) 5 B) 8 C) 7 D) 6 E) 9

13.- Tres jugadores A, B y C acuerdan que después de cada partida el perdedor duplicará el dinero de los otros dos. Habiendo perdido cada jugador una partida en el orden ABC, resulta que el 1ro tiene 24 soles, el 2do 28 y el 3ro 14. ¿Cuánto dinero perdió A?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 18

14.- Si compro 10 camisas me faltarían 100 *soles* para comprar 4 más, pero si solo compro 6 camisas me sobran 200 *soles*. Entonces el dinero que tengo es:

A) 750 B) 425 C) 525 D) 325 E) 875

15.- Martín trabaja en una compañía en la cual, por cada día de trabajo le pagan 300 *soles* y por cada día que falta le descuentan 100 *soles* de su sueldos. ¿Cuántos días ha trabajado si al final de 40 días adeuda a la empresa la suma de 2 000 *soles*?

A) 12 B) 13 C) 18 D) 5 E) 10

16.- Cada vez que una persona ingresa a una cafetería gasta la tercera parte de lo que tiene en ese momento, más cuatro soles. Al salir por 3^{era} vez se queda sin dinero. ¿Cuánto tenía al comienzo?

A) S/. 48 B) S/. 15,6 C) S/. 28,5

D) S/. 22,5 E) S/. 17,5

17.- Si se posaran 3 palomas en cada poste, sobrarían 4 postes, pero si se posara una paloma en cada poste, sobrarían 6 palomas. ¿Cuál es la cantidad de postes?

A) 6 B) 7 C) 10 D) 8 E) 9

18.- El cumpleaños de María será en Julio, cuando el # de días transcurridos del mes excedan en una semana al número de días que aún faltan del mes. Su cumpleaños es:

A) 27 de Julio B) 21 de Julio C) 19 de Julio

D) 17 de Julio E) 22 de Julio

19.- A Jorgito, por cada día que asiste al colegio, le dan 4 caramelos y por cada día que falta le quitan uno. ¿Cuántos días faltó si después de 28 días reunió 12 caramelos?

A) 24 B) 20 C) 25 D) 12 E) 4

20.- Si trabaja los lunes inclusive, Juan economiza 40 soles semales; en cambio, la semana que no trabaja el día lunes, debe retirar 20 *soles* de sus ahorros. Si durante 10 semanas se logra economizar 220 *soles*. ¿Cuántos lunes dejó de trabajar en esas 10 semanas?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8

21.- En un corral donde hay gallinas y conejos, el número de cabezas es 18 y el número de patas 122. ¿Cuántas gallinas y conejos hay en dicho corral?

A) 13 y 35 B) 26 y 22 C) 35 y 13

D) 28 y 20 E) 32 y 16

22.- En un examen de 100 preguntas, por la respuesta correcta se le asigna 1 punto y por cada error se descuenta 1/4 de punto. Un alumno después de haber contestado todas las preguntas obtiene 50 puntos. ¿Cuántos errores cometió?

A) 45 B) 60 C) 35 D) 40 E) N.A.

23.- La suma de las edades de un padre y su hijo, es 35 *años*. Si el padre tuviera 17 *años* menos y el hijo 8 *años* más, los dos tendrán la misma edad. Determinar la edad del padre.

A) 30 B) 32 C) 36 D) 40 E) N.A.

24.- Un caminante ha recorrido 1 000 *metros*, unas veces avanzando, otras retrocediendo. Si sólo ha avanzado 350 *metros*. ¿Cuánto anduvo retrocediendo?

A) 300*m* B) 400*m* C) 325*m*

D) 650*m* E) N.A.

25.- Con un cierto número se hacen estas operaciones : Se eleva al cubo, al resultado se suma 9 y se extrae raíz cuadrada; al número resultante se divide entre 3 para luego restarle 1 y por último elevarlo al cuadrado, obteniéndose 16. ¿De qué número se trata?

A) 4 B) 6 C) 9 D) 12 E) N.A.

NIVEL C

26.- Un tren de 325 pasajeros tiene que recorrer 150 *km*. Los pasajeros de 1ra clase pagan 4 *soles* por *km* y los de 2da clase pagan 2 *soles* por *km*. ¿Cuántos pasajeros iban en primera

clase, si en ese viaje se ha recaudado 129 600 por concepto de pasajes?

A) 125 B) 218 C) 99 D) 145 E) 107

27.- Dos jugadores acuerdan que después de cada partida, el que pierda dará 15 *soles* al que gane. Al terminar el juego, luego de 18 partidas, el 1ro ha ganado 120 *soles*. ¿Cuántas veces ganó?

A) 9 B) 8 C) 10 D) 13 E) 14

28.- Para instalar tuberías de agua, un gasfitero solicitó 10 soles por cada metro, incluyendo material y mano de obra, y calculó ganar 96 *soles*; pero acuerda una rebaja de 3 *soles* por cada metro y resulta ganando solamente 63 *soles*. ¿Cuánto invirtió el gasfitero en el material de gasfitería?

A) 79 B) 15 C) 49 D) 97 E) 14

29.- María gasta 180 *soles* en comprar 100 frutas entre manzanas, peras y duraznos. Las manzanas y las peras cuestan 2 *soles* cada una, y los duraznos 1 *sol* cada uno. Si en su compra llevó 10 manzanas más que peras. ¿Cuántas manzanas más que duraznos compró?

A) 15 B) 25 C) 30 D) 40 E) 50

30.- Cuatro jugadores A, B, C y D acuerdan que después de cada juego, el que gane recibirá la mitad del dinero que tengan cada uno de los otros tres. Sabiendo que cada uno ganó una partida en el orden indicado (ABCD) y que al final quedaron: A con 80 *soles*, B con 120 *soles*; C con 250 y D con 480 soles. ¿Cuánto tenía A al principio?

A) 240 B) 160 C) 480 D) 350 E) 300

31.- El nivel del agua de una piscina desciende a 3 *cm* por debajo de su mitad y luego de 4 *horas* se desagüa toda la piscina. ¿Qué profundidad tenía el agua actualmente?

A) 80*cm* B) 90*cm* C) 96*cm*
D) 108*cm* E) 120*cm*

32.- Un alumno dice a otro; si quiero comprar 15 chocolates me faltan 10 *soles*, pero comprando tan solo 10 me sobran 15 *soles*. ¿Cuánto dinero tenía?

A) 80 B) 75 C) 48 D) 90 E) 65

33.- En una fiesta donde hay 90 personas la diferencia entre los caballeros y damas que no bailan es 8. ¿Cuántas damas asistieron?

A) 21 B) 49 C) 39 D) 41 E) N.A.

34.- Los pasajes en bús valen S/. 2,5 y S/. 1,3, para adultos y universitarios, respectivamente. Luego de una vuelta en que viajaron 255 personas, se recaudó S/. 523,5. ¿Cuántos universitarios viajaron?

A) 95 B) 80 C) 90 D) 100 E) 98

35.- Un litro de leche pura debe pesar 1 030 *gramos*; cierta mañana se reciben 6 *litros* que pesan 6 120 *gramos*. ¿Cuántos *litros* de agua contiene la leche recibida?

A) 3 B) 1.5 C) 2 D) 1.8 E) N.A.

36.- Tres jugadores A, B y C acuerdan jugar tres partidas donde el que pierda en cada turno, duplicará el dinero de los otros dos. Si cada uno perdió una partida en el orden de presentación y al final el primero tiene 48 *soles*, el segundo 56 *soles* y el tercero 28 *soles*. ¿Cuánto tenía A al inicio del juego?

A) S/. 72 B) S/. 64 C) S/. 96
D) S/. 84 E) N.A.

37.- Un grupo de personas decide ir al teatro; si van a platea les falta 240 *soles* y si van a galería les sobra 160 *soles*. Si invitan a uno les sobraría solo 10 *soles*, pero si uno de ellos se va sólo les faltaría 40 *soles*. ¿Cuántos son en el grupo?

A) 5 B) 8 C) 6 D) 7 E) N.A.

38.- ¿A qué hora del día se cumple que el tiempo transcurrido excede al que falta transcurrir en 3 *horas* 40 *minutos*?

A) 14 : 25 B) 13 : 50 C) 14 : 20
D) 12 : 20 E) 13 : 30

39.- Dos jugadores acuerdan que después de cada partida, el perdedor pague al otro S/. 60; después de 30 juegos uno de ellos ha ganado S/. 720. ¿Cuántos juegos lleva perdiendo el otro?

A) 9 B) 21 C) 6 D) 24 E) 22

40.- María cada día gasta la mitad de lo que tiene más S/. 2 ; si después de 3 *días* le queda S/. 30. ¿Cuánto tenía al inicio?

A) 256 B) 268 C) 144 D) 320 E) 450

ESTRATEGIAS DE PENSAMIENTO

En este proceso debes tratar de hacerte con un montón de posibles modos de ataque del problema. Se trata de que fluyan de tu mente muchas ideas, aunque en principio puedan parecerte totalmente descabelladas. Las ideas más estrafalarias pueden resultar después ser las mejores. Para facilitar este flujo de ideas posibles aquí tienes unas cuantas pautas que puedes ensayar. Estoy seguro de que tu experiencia irá aumentando esta lista con sugerencias-. Veamos :

E.1 *Busca semejanzas con otros juegos y problemas.*

Nada hay nuevo bajo el sol. ¿A qué te recuerda la situación? ¿No presientes que tal vez sea como aquella otra?

E.2 *Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil.*

El problema es complicado tal vez porque hay muchos elementos. ¿Porqué no te lo haces más fácil tú mismo? Fabrícate uno semejante, con menos piezas. Tal vez en él te saltará la chispa que te sirva para resolver el más complicado.

E.3 *Experimenta y busca regularidades, pautas.*

La experiencia es la madre de la ciencia, también de la matemática. Los grandes teoremas de la historia de la matemática son fruto de muchos experimentos, más o menos locos. También la matemática procede por ensayo y error, otro ensayo y otro error....

E.4 *Hazte un esquema y si se tercia....., píntalo en colores.*

Somos muchos los que pensamos mejor con imágenes que con palabras. Una imagen vale más que mil palabras. Si tu modo de pensar es así, estás en buena compañía. Einstein afirmaba que su pensamiento, cuando investigaba, no era nunca verbal, sino con imágenes sensoriales.

E.5 *Modifica el problema, cambia en algo el enunciado, para ver si se te ocurre así un posible camino.*

No será ya el problema propuesto, pero te puede proporcionar una escalera a la que puedes añadir otra y así llegar a tu objetivo.

E.6 *Escoge una buena notación.*

Muchos problemas resultan endiablados con una notación inadecuada y se vuelven transparentes como el agua en cuanto tomas los ejes adecuados, los nombres apropiados de los elementos,...etc.

E.7 *Explota la simetría......, si puedes.*

Son muchos los juegos, los problemas que se resuelven mediante el apoyo de la simetría que presentan de forma expresa o velada. Piensa en esta posibilidad en tu caso particular.

E.8 *Supongamos que no..... ¿a dónde nos lleva?*

Este es el argumento que se llama indirecto o por reducción al absurdo. ¿Cómo marcha la cosa? Son muchos los problemas que se pueden manejar asi. Quieres demostrar que una situación se comporta de la forma A. Empiezas suponiendo que no se comporta así. Vas deduciendo y razonando correctamente y tu cadena de razonamiento te conduce a que lo blanco es negro. Entonces es claro que tu punto de partida, no A, tiene que ser falso. Así, la situación inicial tiene que ser A.

3 Sucesiones

Iniciamos este tema con dos conceptos importantes:

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números, que se establece de acuerdo con una *regla de formación* o *patrón*.

Ejemplos:

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 , ...
5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; ....
4 ; 9 ; 15 ; 22 ; 30 ; ....

Una **serie** es una *adición indicada* de los términos de una sucesión.

Ejemplos:

1 + 2 + 3 + 4+ 5 + ...
5 + 10 + 15 + 20 + 25 + ...
4 + 9 + 15 + 22 + 30 + ...

A menudo el objetivo en cada *serie o sucesión* es descubrir cómo se ordenan los números para poder agregar nuevos términos.

Aclaramos que la forma general simbólica: $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ que representa a una *serie* carece del sentido de suma mientras no se indique hasta dónde se va a sumar, ante tal situación la serie es considerada simplemente como una *sucesión* de valores. Para evitar confusiones advertimos que usaremos indistintamente la denominación *serie* o *sucesión* para referirnos a ellos. Los métodos para calcular la *suma de series* los estudiaremos en el Cap. 5.

I) RECONOCIMIENTO DE REGLAS DE FORMACION

En una **sucesión** se notará que todos los números poseen una propiedad especial, la misma que puede expresarse mediante una regla o fórmula. Veamos algunos ejemplos:

SUCESION	PROPIEDAD	REGLA O FORMULA
2; 4; 6; 8;	Todos son pares consecutivos	$2n$
1; 4; 9; 16;	Todos son cuadrados	n^2
3; 6; 9; 12;	Todos son múltiplos de 3	$3n$
1; 3; 5; 7; 9;	Todos son impares	$2n - 1$

Sobre esto tenemos dos comentarios que hacer:

1ra) Conforme las *sucesiones* se van haciendo más complicadas no puede esperarse que la regla de formación aparezca inmediatamente por la simple observación de los números.

2do) Las expresiones: $2n$; n^2; $3n$; $2n - 1$, representan al llamado *término general* de la *sucesión* donde "n" es la variable que al tomar los valores de la serie natural 1; 2; 3; .... permite conocer uno por uno todos los términos de dicha serie.

Ejemplo: Si el término general es : $\mathbf{2n + 5}$.
El primer término ($n = 1$) es : $2 \times 1 + 5 = 7$
El segundo término ($n = 2$) es: $2 \times 2 + 5 = 9$
El tercer término ($n = 3$) es : $2 \times 3 + 5 = 11$ ....etc.

II) METODO FUNDAMENTAL

Consiste en establecer diferencias entre los términos consecutivos de la sucesión principal, hasta obtener una" línea" donde las diferencias sean constantes (diferencia común).

Ejemplo: En : 2; 7; 12; 17; 22; x . ¿Cuál es valor de x ?

Resolución: Escribiendo las diferencias en una línea auxiliar (debajo de la sucesión) vemos que la diferencia común es 5.

2 7 12 17 22 x
5 5 5 5 5

Por consiguiente: $x = 22 + 5 = 27$

Ejemplo: Hallar el valor de x en : 1 , 5 , 12 , 22 , 35 , x

Aquí, la diferencia constante solo es visible cuando hacemos aparecer una segunda linea auxiliar (diferencia común = 3)

1 5 12 22 35 x
4 7 10 13 ....
3 3 3 3

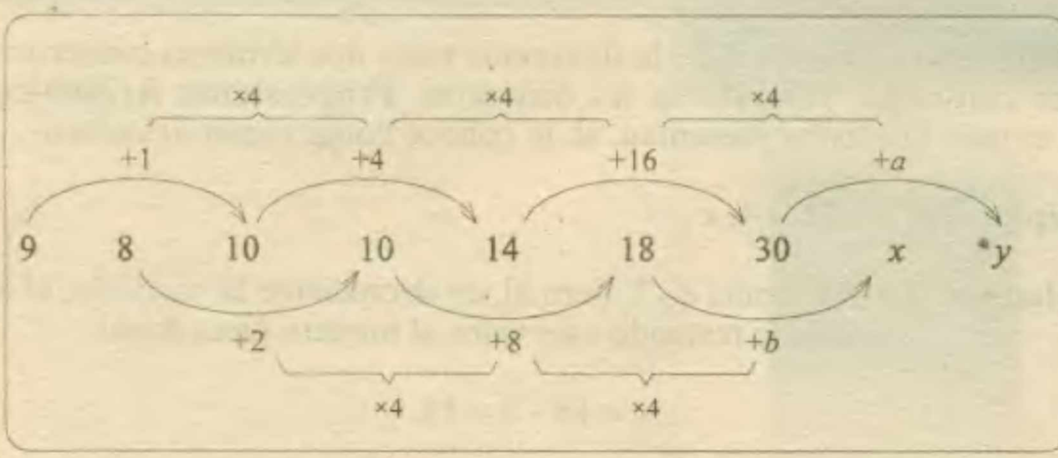
Agregamos la diferencia común 3, al 13 y obtenemos 16, que agregado al 35 nos da 51 que es el valor de x.

Llegar a una diferencia común nos puede llevar a la solución del problema. Una ventaja de este enfoque es que no es necesario esperar un instante de inspiración, simplemente se restan los términos de las diferencias hasta obtener una diferencia común.



IV) ALTERNADAS.- Cuando los números pertenecen a dos o más series que al escribirse juntas, aparentan formar una sola secuencia que se hace incoherente.

Ejemplo: Se trata de dos sucesiones cuyas primeras diferencias forman progresiones geométricas (razón = 4).



De este modo, primero obtenemos $a = 64$ y $b = 32$
Finalmente:

$$x = 18 + 32 = 50 \quad ; \quad y = 30 + 64 = 94$$

Hay además, otros tipos de sucesiones que escapan a todo intento de clasificarlas, pero con los casos expuestos y combinándolos adecuadamente estoy seguro que podrás encarar su solución.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- De la siguiente sucesión:

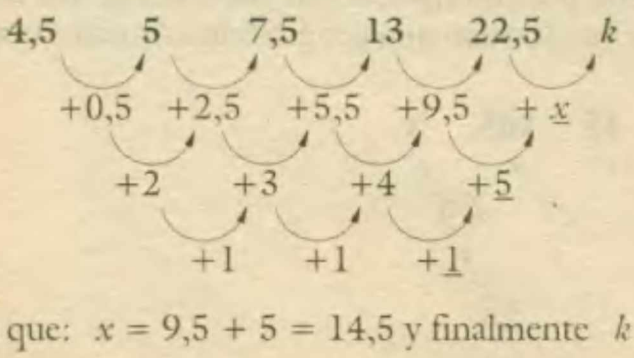
4,5 ; 5 ; 7,5 ; 13 ; 22,5 ; k

Entonces el valor de 5k - 5 es:

A) 165	*B) 180*	*C) 185*	*D) 195*	*E) 200*	*UNFV - 96*

<u>Resolución:</u>

Por diferencias sucesivas (método fundamental) se obtiene una diferencia común en la 3ra línea:



Vemos que: $x = 9{,}5 + 5 = 14{,}5$ y finalmente $k = 22{,}5 + 14{,}5 = 37$

Por lo tanto: $5k - 5 = 5(37) - 5 =$ **180** **RPTA. B**

2.- En la siguiente sucesión hay un número equivocado, identifíquelo y señale cuál lo debe reemplazar.

2 ; 5 ; 10 ; 12 ; 26 ; 29 ; 58 ; 61 ; 122

A) 12 ; 13 *B) 61; 62* *C) 58 ; 56* *D) 58 ; 34* *E) 26 ; 25*

Resolución:

Las operaciones para formar la serie son: $+3$; $\times 2$.

El término incorrecto escrito es el 4to, en su lugar debería ir 13 y la serie sería : 2; 5; 10; 13; 26; ....

RPTA. A

3.- ¿Cuál es el décimo término de esta sucesión :

1; 3; 7; 15; 31; .... ?

A) 527 *B) 513* *C) 624* *D) 1 023* *E) 2 048*

Resolución:

Por el orden que ocupan los términos, vemos que hay un término general que se puede reconocer así:

$$a_1 = 1 = 2 - 1$$
$$a_2 = 3 = 2^2 - 1$$
$$a_3 = 7 = 2^3 - 1 \text{ , ... etc.}$$

Entonces $a_{10} = 2^{10} - 1 = 1\,024 - 1 =$ **1023** RPTA. D

4.- Señale el número que completa la sucesión :

7 13 24 45 86 ___

A) 162 *B) 147* *C) 142* *D) 167* *E) 125* ***UNI - 93II***

Resolución:

Aplicamos el método de las diferencias sucesivas:

7 13 24 45 86 $\underline{x}$

+6 +11 +21 +41 $+\underline{y}$

+5 +10 +20 $+\underline{40}$

×2 ×2 $\times\underline{2}$

Se obtiene: $y = 41 + 40 = 81$

Luego: $x = 86 + 81 =$ **167** RPTA. D

5.- Dada la siguiente sucesión:

R (1) = 1 × 2

R(2) = 2 + 3

R(3) = 3 × 4

R(4) = 4 + 5

....

El valor de R(22) es:

A) 506 *B) 43* *C) 500* *D) 420* *E) 45* ***UNMSM - 93***

Resolución:

La regla de formación presenta dos casos: producto para lugares impares y suma para lugares pares.

Se deduce esta doble fórmula: $R(n) = n + (n+1)$ .... n par

$R(n) = n \times (n+1)$ .... n impar

Por lo tanto: $R(22) = 22 + 23 =$ **45** RPTA. E

6.- En la siguiente sucesión :

2; 7; 24; 77; x

El valor de x es:

A) 46 *B) 223* *C) 143* *D) 238* *E) 243* ***UNFV - 95***

Resolución:

Las potencias de 3: $3^1 = 3$; $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $3^4 = 81$ se pueden relacionar con la serie propuesta según esta ley de formación:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 = 3^1 - 1 \\ a_2 = 7 = 3^2 - 2 \\ a_3 = 24 = 3^3 - 3 \\ a_4 = 77 = 3^4 - 4 \end{array}\right\} \text{Término general } a_n = 3^n - n$$

El 5to término (x) será: $3^5 - 5 = 243 - 5 =$ **238** RPTA. D

7.- Identifique la alternativa que completa correctamente la sucesión :

5 ; ? ; 32 ; 68 ; 140 ; 284

A) 20 *B) 10* *C) 12* *D) 14* *E) 24* ***UNI - 95I***

Resolución:

Escribiendo la serie al revés y aplicando diferencias sucesivas:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 284 & & 140 & & 68 & & 32 & & \underline{x} & & 5 \\ & 144 & & 72 & & 36 & & \underline{y} & & \underline{z} & \\ & & \div 2 & & \div 2 & & \div 2 & & \div 2 & & \end{array}$$

Se deduce que: $y = 18$; $z = 9$

Finalmente: $x = 32 - 18 = \boxed{14}$ RPTA. D

8.- ¿ Cuál es el quinto término de la sucesión siguiente, sabiendo que cada término se obtiene multiplicando al anterior por una constante :

27 ; - 18 ; 12 , ... ?

A) 6 *B) 8* *C) $\frac{16}{3}$* *D) -8* *E) $-\frac{16}{3}$* *PUCP - 92*

Resolución:

Para calcular la constante, dividimos: $\frac{-18}{27} = -\frac{2}{3}$

Hallamos entonces a_4 y a_5:

$$a_4 = 12\left(-\frac{2}{3}\right) = -8$$

$$a_5 = (-8)\left(-\frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{16}{3}}$$ RPTA. C

9.- ¿Qué número sigue en esta secuencia :

20 ; 85 ; 260 ; 629 ; 1 300 ; 2 405 ; x ?

A) 3 500 *B) 3 600* *C) 4 100* *D) 5 001* *E) 3 725*

Resolución:

La regla de la formación se relaciona con potencias de 4:

$$a_1 = 20 = 2^4 + 4$$

$$a_2 = 85 = 3^4 + 4$$

$$a_3 = 260 = 4^4 + 4$$

....

$$a_n = (n + 1)^4 + 4$$

Por lo tanto, $x = a_7 = (7 + 1)^4 + 4 = \boxed{4\,100}$ RPTA. C

10.- En esta sucesión, ¿qué fracción sigue :

$$\frac{1}{3} ; \frac{7}{12} ; \frac{5}{6} ; \frac{13}{12} ; x \quad ?$$

A) $\frac{15}{16}$ *B)* $\frac{4}{3}$ *C)* $\frac{5}{3}$ *D)* $\frac{7}{6}$ *E)* $\frac{1}{2}$

Resolución:

Escribiendo todas las fracciones con denominador común, tendremos:

$$\frac{4}{12} ; \frac{7}{12} ; \frac{10}{12} ; \frac{13}{12} ; x$$

Se deduce fácilmente que: $x = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ RPTA. B

11.- ¿Cuál es el 15to término de esta sucesión :

1 ; 2 ; 4 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 7 ; ....

A) 16 *B) 15* *C) 14* *D) 13* *E) 12*

Resolución:

Hagamos una relación de términos, de 4 en 4:

$a_1 = 1$ $a_5 = 5$
$a_2 = 2$ $a_6 = 6$
$a_3 = 4$ $a_7 = 8$
$a_4 = 3$ $a_8 = 7$

Veamos que cada término cuyo lugar es múltiplo de 4, intercambia su valor con el término precedente, luego:

$a_{15} = 16$; $a_{16} = 15$ RPTA. A

12.- ¿Cuál es el décimo término de la sucesión :

625 ; 125 ; 500 ; 1 000 ; 200 ; 800 , ... ?

A) 2 560 *B) 2 500* *C) 1250* *D) 1375* *E) 6 000*

Resolución:

Las operaciones son: $\div 5$; $\times 4$; $\times 2$; $\div 5$; $\times 4$; $\times 2$ (se repiten de 3 en 3)

Se obtienen estos términos: $a_7 = 800 \times 2 = 1\,600$;

$a_8 = 1600 \div 5 = 320$; $a_9 = 320 \times 4 = 1\,280$;

$a_{10} = 1\,280 \times 2 =$ 2 560. RPTA. A

13.- Hallar los términos que siguien en esta secuencia :

3 ; 7 ; 14 ; 25 ; 43 ; ....

A) 84 ; 141 *B) 69 ; 109* *C) 73 ; 122* *D) 57 ; 144* *E) 77 ; 150*

Resolución:

Por diferencias sucesivas:

3 7 14 25 43 x y

4 7 11 18 a b

3 4 7 12 19

1 3 5 7

Calculamos: $a = 30$; $b = 49$

Finalmente: $x = 43 + 30 = 73$;

$y = 73 + 49 =$ **122** RPTA. C

14.- En la siguiente sucesión , faltan el primero y el último término:

.... ; 217 ; 126 ; 65 ; 28 ; 9 ; ....

La diferencia entre dichos términos es:

A) 271 *B) 343* *C) 321* *D) 323* *E) 342*

Resolución:

Escribiendo la serie nuevamente:

$x; 6^3 + 1; 5^3 + 1; 4^3 + 1; 3^3 + 1; 2^3 + 1; y$

Se deduce que: $x = 7^3 + 1 = 344$; $y = 1^3 + 1 = 2$

La diferencia es: $344 - 2 =$ **342.** RPTA. E

15.- En la sucesión :

2 4 6 4 8 10 8 x y

El valor de x + y , es :

A) 34 *B) 30* *C) 48* *D) 28* *E) 36*

Resolución:

Se aplican tres operaciones sucesivamente, que luego se repiten:

$\times 2;\ +2;\ -2$

$$2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{-2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{+2} 10 \xrightarrow{-2} 8 \xrightarrow{\times 2} x \xrightarrow{+2} y$$

Obtenemos: $x = 8 \times 2 = 16$; $y = 16 + 2 = 18$

$\therefore \quad x + y =$ **34** RPTA. A

16.- En la secuencia : 8 ; 10 ; 9 ; 12 ; 10 ; 13

El número que no corresponde es:

A) 10 *B) 12* *C) 13* *D) 9* *E) 8* *UNFV - 95*

Resolución:

Tenemos 2 series alternadas:

8 (+1) 9 (+1) 10

10 (+2) 12 (+2) 13

El número que no corresponde es **13.** (En su lugar debe ir 14) RPTA. C

17.- ¿Qué número sigue?

2 3 5 6 9 10 14 15 _ _

A) 19 ; 21 *B) 20 ; 21* *C) 21 ; 22* *D) 23 ; 25* *E) 23 ; 24*

Resolución:

2 (+3) 5 (+4) 9 (+5) 14 (+6) x

3 (+3) 6 (+4) 10 (+5) 15 (+6) y

$x = 20$; $y = 21$ $\Rightarrow$ RPTA. B

18.- ¿Qué número sigue :

2 4 1 4 9 3 21 x ?

A) 32 *B) 16* *C) 30* *D) 29* *E) 15*

Resolución:

2   4   1   4   9   3   21 x

+2   -3   ×4   +5   -6   ×7   +8

$x = 29$ RPTA. D

19.- ¿Qué número sigue :

8 ; 20 ; 24 ; 60 ; 64 ; 160 ; 164 ; x ?

A) 410 *B) 360* *C) 324* *D) 390* *E) 260*

Resolución:

La secuencia se forma, multiplicando por 2,5 y sumando 4:

8   20   24   60   64   160   164 x

×2,5   +4   ×2,5   +4   ×2,5   +4   +2,5

$x = 164 \times 2{,}5 =$ 410 RPTA. A

20.- El número que falta es:

7 ; 15 ; 32 ; ? ; 138 ; 281

A) 67 *B) 70* *C) 65* *D) 71* *E) 45*

Resolución:

Se duplica cada número y se va agregando 1, 2, 3, etc.

El número que falta es: $32 \times 2 + 3 =$ 67 RPTA. A

21.- Se tiene las dos sucesiones siguientes:

I) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \ldots\ldots$

II) $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}; \ldots\ldots$

Se multiplican ordenadamente los pares de términos entre sí (1º con 1º. 2º con 2º, ...etc). El producto de los vigésimos términos es:

A) 20 *B) 420* *C) 1/21* *D) 21* *E) 1/20*

Resolución:

El 1ro producto es: $\frac{1}{2}\times 2 = 1$

El 2ro producto es: $\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

El 3ro producto es: $\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$.

El n-ésimo producto será: $Pn = \frac{1}{n}$

Luego: $P_{20}=\frac{1}{20}$ **RPTA. E**

22.- ¿Qué número sigue?

2 ; 3 ; 4 ; 9 ; 16 ; 29 ; 54 ; x

A) 89 *B) 72* *C) 81* *D) 96* *E) 99*

Resolución:

A partir del 4to término, cada término es igual a la suma de los 3 anteriores a él:

$$a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 3 + 4 = 9$$

$$a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 3 + 4 + 9 = 16$$

De esta manera, $x = 16 + 29 + 54 =$ **99** **RPTA. E**

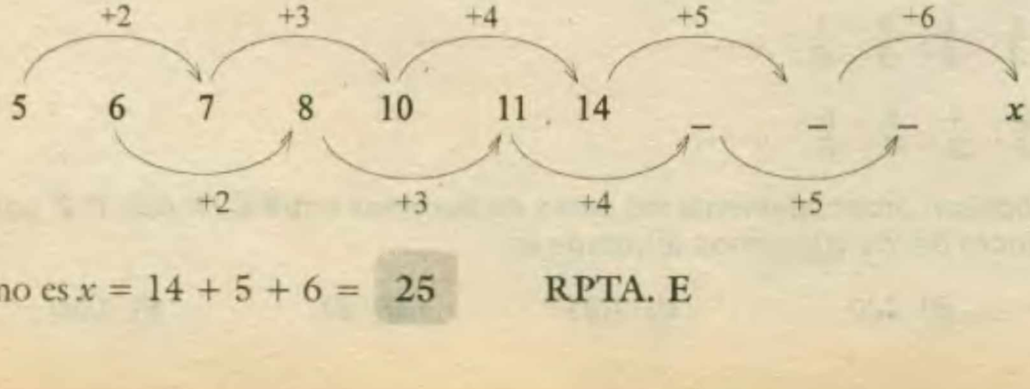
23.- En esta sucesión:

5 6 7 8 10 11 14 ....

El término que ocupa el undécimo lugar es:

A) 31 *B) 36* *C) 27* *D) 19* *E) 25*

Resolución:



El undécimo es $x = 14 + 5 + 6 =$ **25** **RPTA. E**

24.- ¿Qué número falta :

324 ; 216 ; 144 ; 96 ; x ?

A) 64 ***B) 48*** ***C) 72*** ***D) 80*** ***E) 54***

Resolución:

Es una progresión geométrica: Cada término está multiplicado por $\frac{2}{3}$; entonces :

$x = 96 \times \frac{2}{3} = $ **64** RPTA. A

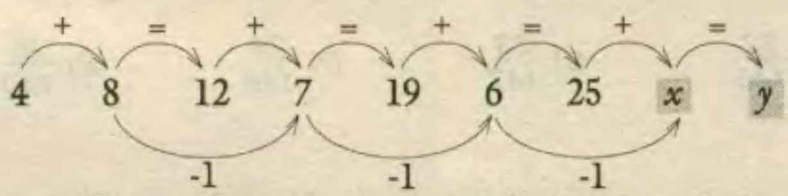
25.- Los números que completan esta secuencia son:

4 ; 8 ; 12 ; 7 ; 19 ; 6 ; 25 ; __ ; __

A) 6 y 30 ***B) 5 y 30*** ***C) 4 y 20*** ***D) 5 y 20*** ***E) 4 y 16***

Resolución:

Entre los términos se alteran los signos (+) e (=) de la siguiente manera:



Entonces: $x = 6 - 1 = $ **5** ; $y = 25 + 5 = $ **30** RPTA. B

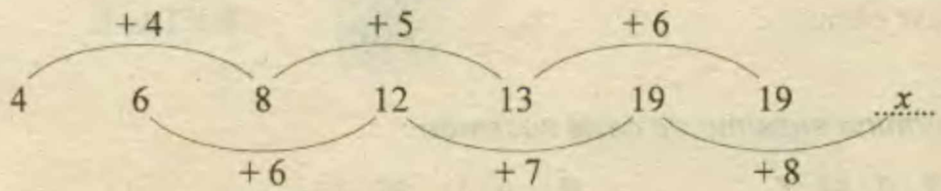
26.- ¿Qué número continúa en la sucesión :

4 6 8 12 13 19 19 .... ?

A) 27 ***B) 28*** ***C) 29*** ***D) 30*** ***E) 31***

Resolución:

Se trata de una sucesión alternada, formada por dos sucesiones diferentes cuyos términos aumentan según lo que enseguida indicamos :



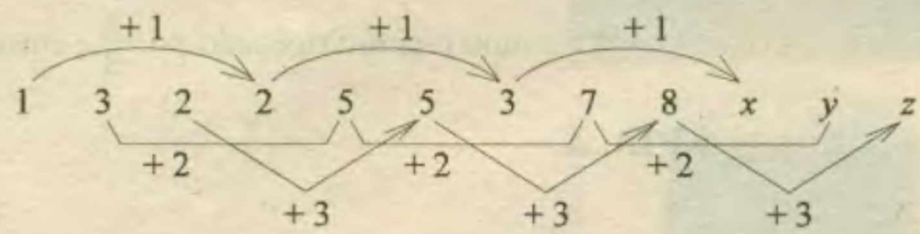
Luego el términos x siguiente es : $19 + 8 = $ **27** RPTA. A

27.- Hallar la suma de los tres términos que continúan en: 1 ; 3 ; 2 ; 2 ; 5 ; 5 ; 3 ; 7 ; 8 ; ..... ; .....

A) 22 *B) 24* *C) 26* *D) 28* *E) 30*

Resolución:

Aquí hay 3 sucesiones, cuyas reglas de formación se pueden deducir por incrementos sucesivos:



Observamos que : $x = 3 + 1 = 4$; $y = 7 + 2 = 9$; $z = 8 + 3 = 11$

Nos piden $x + y + z = 4 + 9 + 11 = 24$ **RPTA. B**

28.- Calcular el valor del término 50 en la siguiente sucesión : $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{2}{11}$; ....

A) $\frac{21}{144}$ *B)* $\frac{22}{145}$ *C)* $\frac{23}{147}$ *D)* $\frac{24}{148}$ *E)* $\frac{25}{149}$

Resolución:

Haremos sencillos cambios en algunas fracciones, sin alterar su valor, para que aparezca un orden definido, ya sea en los numeradores o en los denominadores. Veamos :

$$\frac{1}{4} \; ; \; \frac{2}{10} \; ; \; \frac{3}{16} \; ; \; \frac{4}{22} \; ; \; ....$$

Los numeradores siguen la serie :1 ; 2 ; 3 ; .... ; n y los denominadores: 4 ; 10 ; 16 ; ..... ; $6n$ -2.

Donde $6n - 2$ es el término general de los denominadores.

Así, el término general de la sucesión es: $t_n = \dfrac{n}{6n-2}$

Entonces para $n = 50$, tendremos : $t_{50} = \dfrac{50}{6 \cdot 50 - 2} = \dfrac{50}{198}$

Simplificando, se obtiene : $t_{50} = \dfrac{25}{149}$ **RPTA. E**

29.- Hallar el término enésimo de cada sucesión :

A : 1 ; 2 ; 9 ; 64 ; .... *B : 2 ; 11 ; 26 ; 47 ; ....*

A) n^{n-2} ; $1n^2 - 2$ *B)* n^{n+1} ; $4n^2 + 1$ *C)* n^{n-1} ; $3n^2 - 1$

D) n^{n+4} ; $2n^2 + 4$ *E)* n^{n+7} ; $7n^2 + 7$

Resolución:

En A, los términos se pueden expresar como potencias:

$1^0 ; 2^1 ; 3^2 ; 4^3 ;$ .... , donde el término general es : $t_n = n^{n-1}$

En B, partimos de la serie de cuadrados : 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; ...... y la multiplicamos por 3 : 3 ; 12 ; 27 ; 48; .... y notamos que disminuyendo cada término en 1 se obtiene la sucesión en B, por lo tanto el término general de B es : $3n^2 - 1$.

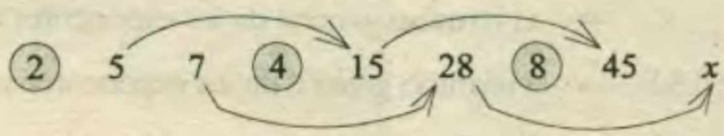
n^{n-1} ; $3n^2 - 1$ RPTA. C

30.- Calcular "x" : 2 ; 5 ; 7 ; 4 ; 15 ; 28 ; 8 ; 45 ; x

A) 108 *B) 109* *C) 110* *D) 111* *E) 112*

Resolución:

En la sucesión se distinguen 3 secuencias alternadas, las cuales mostramos a continuación :



- En la secuencia de círculos : 2 ; 4 ; 8 ; .... , cada término se va multiplicando por 2.
- En la secuencia : 5 ; 15 ; 45 ; ...... , cada término se va multiplicando por 3.
- Y en la secuencia : 7 ; 28 ; x ,......... , cada término se va multiplicando por 4.

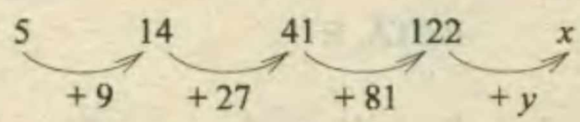
es decir : $x = 28 . 4 =$ **112** RPTA. E

31.- ¿Qué número sigue : 5 14 41 122 ......?

A) 361 *B) 363* *C) 365* *D) 367* *E) 369*

Resolución:

Aplicando el método de diferencias sucesivas, podemos reconocer :



En la 2da línea (sucesión) , cada número es el triple del anterior, luego : $y = 81 . 3 = 243$

Finalmente : $x = 122 + 243 =$ **365** RPTA. D

32.- ¿Qué número sigue : 1 ; 3 ; 6 ; 1 ; 9 ; 36 ; 1 ; 27 ; z ?

A) 213 *B) 216* *C) 219* *D) 221* *E) 223*

Resolución:

Los números aparecen por "ternas" donde cada terna comienza en 1, los demás se deducen así :

× 6   × 6

(1) 3 6 (1) 9 36 (1) 27 z

× 3   × 3

Entonces : $z = 36 \times 6 =$ **216**   RPTA. B

33.- Calcular el valor de x en la siguiente sucesión : $a^2 + 2$; $a^5 + 7$; $a^8 + 12$; ...... ; $a^x + 152$

A) 86   B) 88   C) 90   D) 92   E) 94

Resolución:

Analizando por separado las sucesiones de exponentes y de términos independientes, tenemos :

A) 2 ; 5 ; 8 ; .... ; x $\rightarrow$ el término general de los exponentes es : $3n - 1$

B) 2 ; 7 ; 12 ; .... ; 152 $\rightarrow$ el término general de los exponentes es : $5n - 3$

Luego para hallar n, igualamos : $5n - 3 = 152 \Rightarrow n = 31$

Entonces, en la otra sucesión : $x - 3\,(31) - 1 =$ **92**   RPTA. D

34.- ¿Qué letra continúa en esta secuencia : A Z B Y C ....

A) J   B) G   C) E   D) D   E) X

Resolución:

Hay dos sucesiones alternadas, una en el orden alfabético conocido y la otra en sentido contrario.

A Z B Y C ...?...

La letra que falta es **X**   RPTA. E

35.- ¿Qué letra continúa : A E H J ..... ?

A) B   B) P   C) K   D) M   E) O

Resolución:

Si nos basamos en el siguiente abecedario : (sin CH , ni , LL)

A B C D E F G H I J K L M N Ñ O P ....

Notamos que la sucesión dada queda determinada por otra serie de letras indicada debajo, en el que el número de letras va disminuyendo de uno en uno :

A E H J **K**

BCD FG I

RPTA. C

36.- ¿Qué letra continúa : R O M J .... ?

A) J *B) K* *C) L* *D) M* *E) P*

Resolución:

Observamos que las letras se suceden en orden inverso y que además hay dos letras de separación entre los términos de la sucesión :

R O M J ..?..

QP ÑN LK IH

Así la letra que continúa es la **J** RPTA. A

37.- Indicar las dos letras que continúan : C A D B E C ....

A) C y A *B) D y B* *C) E y C* *D) F Y D* *E) G y E*

Resolución:

Hay dos sucesiones que se alternan, del modo que se indica a continuación :

C A D B E C [?] (?)

Según esto, en el cuadrado debe ir F y en el círculo debe ir D.

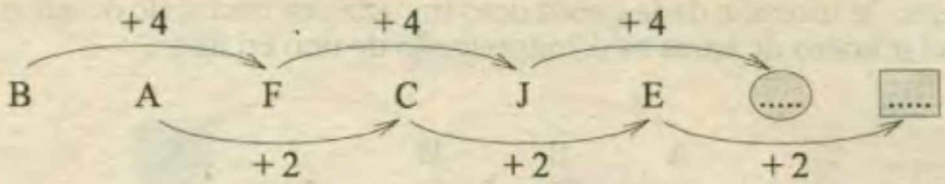
Las letras son pues **F y D** RPTA. D

38.- ¿Qué letras completan esta sucesión : B A F C J E .... ?

A) L y E *B) M y F* *C) N y G* *D) O y H* *E) P y O*

Resolución:

Aquí también se presentan dos secuencias : En la 1ra las letras se suceden de 4 en 4 letras y en la 2da de 2 en 2 letras.



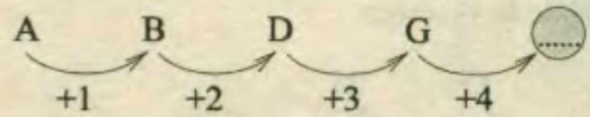
Luego en el círculo va la **N** y en el cuadrado la **G** RPTA. C

39.- ¿Qué combinación de letras continúa : AB ; BD ; DG ; GK ; .... ?

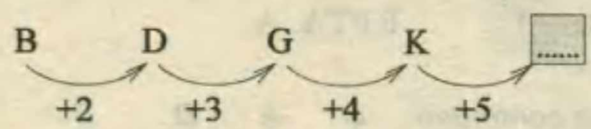
A) PQ ***B) KO*** ***C) RS*** ***D) ST*** ***E) PO***

<u>Resolución</u>:

Analizando las primeras letras de cada combinación, encontramos que éstas se suceden así :



Y en cuanto a las segundas letras, éstas se suceden del siguiente modo :



En el círculo la K y en el cuadrado la O

Así la combinación faltante es : **KO** RPTA. B

40.- ¿Qué letra sigue en : T ; S ; N ; D ; .... ?

A) Q ***B) O*** ***C) S*** ***D) T*** ***E) P***

<u>Resolución</u>:

Las letras dadas son las *iniciales* de los nombres de los números que forman la sucesión :

$$3 ; 6 ; 9 ; 12 ; ..... ;$$

donde el siguiente término es 15 . Luego la letra que corresponde en la sucesión de letras dadas es la inicial de QUINCE, es decir :

Q RPTA. A

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- ¿Qué número sigue en esta secuencia :

4 11 17 22 26 29 __?

A) 31 B) 27 C) 30 D) 28 E) 32

2.- ¿Qué número sigue :

67 64 59 52 43 __?

A) 34 B) 32 C) 30 D) 29 E) 28

3.- 2 10 30 68 __ __

El término general de la serie anterior es:

A) $n + n^2$ B) $n(n-1)$ C) $n + n^3$

D) $n(n^3 + 1)$ E) $n(n+4)$

4.- ¿Qué número sigue :

11 17 24 34 49 71 __?

A) 131 B) 101 C) 102 D) 98 E) 100

5.- ¿Qué número falta en esta serie :

0 3 10 __ 36 55 ?

A) 21 B) 19 C) 20 D) 22 E) 24

6.- ¿Qué números deben continuar en esta serie:

3 4 7 9 16 19 __ __?

A) 30 y 35 B) 25 y 29 C) 35 y 39

D) 35 y 37 E) 21 y 25

7.- ¿Qué número sigue :

$24 \quad 21\frac{1}{4} \quad 18\frac{1}{2} \quad 15\frac{3}{4}$ __?

A) $12\frac{1}{4}$ B) $13\frac{1}{2}$ C) $11\frac{3}{4}$ D) 12 E) 13

8.- Hallar : $a + b$ en la sucesión :

12 48 9 36 6 24 a b

A) 12 B) 28 C) 24 D) 18 E) 15

9.- El siguiente término de la sucesión :

2 + 3 ; 3 + 5 ; 5 + 7 ; 7 + 11 ; .... es:

A) 13 B) 20 C) 22 D) 24 E) 9

10.- La suma del 7mo término de la sucesión:

$\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{10}; \frac{1}{17};$ ....

Con el 8vo término de la sucesión $\frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{3}{10}; \frac{4}{17};$ ...... es:

A) $\frac{75}{237}$ B) $\frac{65}{288}$ C) $\frac{65}{388}$ D) $\frac{57}{325}$ E) $\frac{93}{650}$

NIVEL B

11.- ¿Qué números completan esta serie :

2 3 4 6 12 20 18 48 __ __?

A) 80 y 36 B) 90 y 38 C) 100 y 54

D) 60 y 60 E) N.A

12.- En la siguiente serie :

1 5 15 34 x 111 y

El valor de $x + y$ debe ser:

A) 180 B) 210 C) 240 D) 270 E) 300

13.- ¿Qué número sigue :

1 2 9 64 __?

A) 128 B) 256 C) 125 D) 625 E) 120

14.- ¿Qué número sigue :

16 15 30 10 8 24 6 3 __ ?

A) 12 B) 15 C) 9 D) 5 E) 4

15.- ¿Qué número sigue en la sucesión :

3 7 22 89 __ ?

A) 484 B) 3' C) 88 D) 446 E) 7

16.- ¿Qué número sigue :

1 1 2 2 4 6 7 15 11 __ ?

A) 33 B) 27 C) 19 D) 16 E) 31

17.- ¿Qué número sigue :

1 2 9 121 __ ?

A) 260 B) 629 C) 16900

D) 1300 E) 2500

18.- Calcular el producto de los términos que ocupan las posiciones 49 y 50 en la sucesión en la sucesión siguiente:

$1 \quad -\frac{1}{2} \quad 2 \quad -\frac{1}{3} \quad 3 \quad -\frac{1}{4} \quad 4 \quad — \quad —$

A) -1 B) $-\frac{25}{26}$ C) $\frac{48}{49}$ D) $-\frac{24}{25}$ E) 1

19.- La ley de formación que corresponde a la sucesión :

0 10 24 42 64 90 — —

es:

I) $2n^2 + 4n - 6$ II) $2n^2 - 4n + 2$

III) $2(n+3)(n-1)$

Son ciertos:

A) sólo I B) sólo I y II C) sólo I y III

D) sólo II E) I, II y III

20.- El octavo término de la sucesión :

$\frac{1}{2}; \frac{7}{6}; \frac{17}{12}; \frac{31}{20}; ....$ es:

A) $\frac{127}{72}$ B) $\frac{129}{56}$ C) $\frac{128}{72}$

D) $\frac{129}{72}$ E) $\frac{127}{56}$

21.- ¿Qué número continúa :

2 7 4 9 6 12 ... ?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

22.- ¿Qué número sigue :

1 3 5 15 17 ... ?

A) 19 B) 28 C) 34 D) 45 E) 51

23.- ¿Qué número falta :

1 6 3 10 5 14 7 ... ?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

24.- Indicar la alternativa que completa correctamente la siguiente sucesión numérica :

5 ; 9 ; 17 ; 33 ; 65 ; 129 ; 257 ; ... ?

A) 386 B) 464 C) 513

D) 928 E) 10965

25.- Señale la alternativa que completa coherentemente la siguiente sucesión numérica :

2 ; 8 ; 32 ; 128 ; 512 ; ... ?

A) 624 B) 706 C) 1024

D) 1586 E) 2048

NIVEL C

26.- ¿Qué número sigue :

$2 \quad 2 \quad \frac{3}{2} \quad 1 \quad \frac{5}{8} \quad — ?$

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

27.- Si: $a_1 = 2$ y $a_2 = 3$ y la relación general :

$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$

Hallar el valor de $a_4 + a_6$

A) 33 B) 40 C) 36 D) 42 E) 49

28.- ¿Qué número sigue :

3 970   65   10   5   __ ?

A) 4   B) 3   C) 2
D) 1   E) 0

29.- ¿Qué número falta :

7   10   __   94   463 ?

A) 20   B) 25   C) 30
D) 32   E) 35

30.- Dadas las sucesiones :

$\frac{1}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{16}{5}$; ....

$\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; ....

La diferencia de los términos n-ésimos es:

A) $\frac{n(n+1)}{n-1}$ B) $\frac{n}{n+1}$ C) $\frac{n(n-1)}{n+1}$

D) $\frac{n+1}{n(n-1)}$ E) $\frac{n-1}{n(n+1)}$

31.- Indicar la alternativa que continúa adecuadamente la siguiente sucesión numérica :

3 ; 4 ; 6 ; 10 ; 18 ; 34 ; 66 ; 130 ; 258

A) 422 B) 514 C) 632 D) 694 E) 786

32.- Indique el número que continúa :

12 ; 26 ; 81 ; 328 ; ?

A) 1312   B) 1645   C) 984
D) 1640   E) 1454

33.- Señale el siguiente par de la sucesión :

3 - 6 ; 9 - 12 ; 21 - 24 ; ... ?

A) 45 - 48   B) 21 - 48   C) 28 - 24
D) 42 - 48   E) 1454

34.- Señale el número que continúa :

107 256 ; 111 577 ; 115 898 ; 120 219 ;.... ?

A) 307 890   B) 125 990   C) 124 540
D) 123 780   E) 126 150

35.- Halle el número siguiente de la sucesión :

1 ; 1 000 ; 112 ; 889 ; 223 ; 778 ;.... ?

A) 9   B) 422   C) 669   D) 334   E) 998

36.- ¿Qué letra continúa :

A C F J ....?

A) P   B) Ñ   C) O   D) Q   E) T

37.- ¿Qué letra falta en esta sucesión :

B ...... H N U ?

A) C   B) F   C) G   D) D   E) E

38.- ¿Qué letra completa la secuencia :

A B E F I J ....?

A) K   B) M   C) Ñ   D) P   E) Q

39.- ¿Qué letra falta :

W T R O N .....?

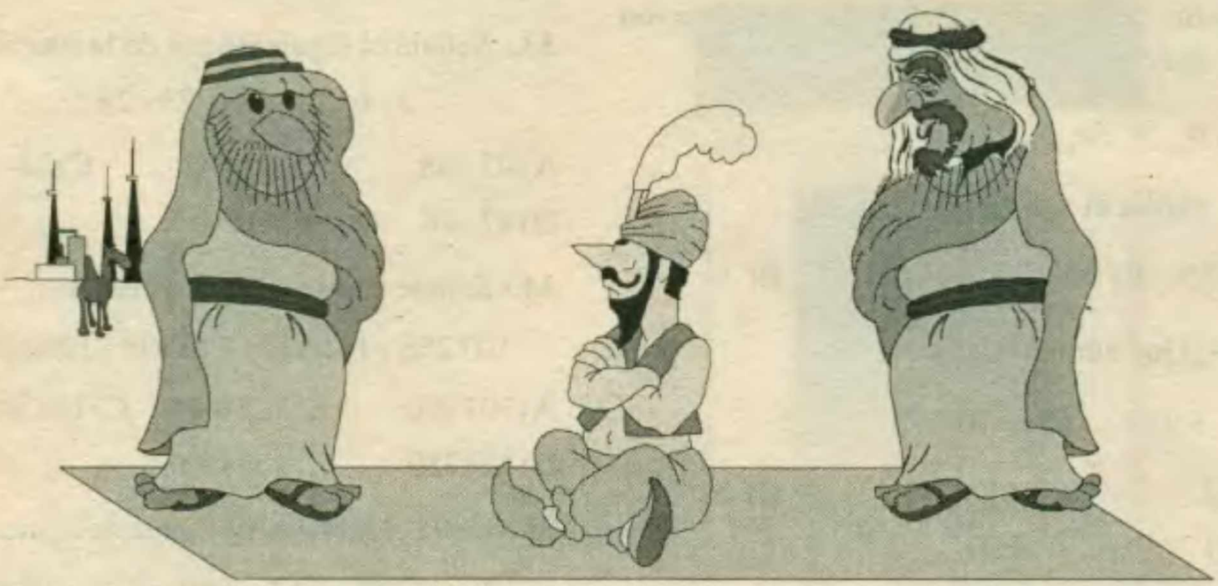
A) M   B) J   C) Ñ   D) L   E) K

40.- ¿Qué letra continúa en esta sucesión :

D C S O D .....?

A) C   B) D   C) T   D) U   E) N

LOS CUATRO CUATROS
(DE "EL HOMBRE QUE CALCULABA")



Al ver a Beremiz interesado en comprar el turbante azul, le dije:

- Me parece una locura ese lujo. Tenemos poco dinero, y aún no pagamos la hostería.

- No es el turbante lo que me interesa, respondió Beremiz. Fíjate en que esta tienda se llama "*Los cuatro cuatros*". Es una coincidencia digna de la mayor atención.

- ¿Coincidencia? ¿Por qué?

- La inscripción de ese cartel recuerda una de las maravillas del Cálculo : Empleando cuatro cuatros podemos formar un número cualquiera .....

Y antes de que le interrogara sobre aquel enigma, Beremiz explicó mientras escribía en la arena fina que cubría el suelo:

- ¿Quieres formar el cero?

Pues nada más sencillo. Basta escribir : $44 - 44 = \mathbf{0}$

Ahí tienes los cuatro cuatros formando una expresión que es igual a cero.

Pasemos al número 1.

Esta es la forma más cómoda : $\frac{44}{44} = \mathbf{1}$

Esta fracción representa el cociente de la división de 44 por 44. Y este cociente es 1.

¿Quieres ahora ver el número 2?

Se puede utilizar fácilmente los cuatro cuatros y escribir :

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \mathbf{2}$$

La suma de las dos fracciones es exactamente igual a 2.

El tres es más fácil. Basta escribir la expresión :

$$\frac{4+4+4}{4}=\mathbf{3}$$

Fíjate en que la suma es doce que dividida por cuatro da un cociente de 3. Así pues, el tres también se forma con cuatro cuatros.

- ¿Y cómo vas a formar el número 4? - le pregunté-.

- Nada más sencillo - explicó Beremiz-; el 4 puede formarse de varias maneras diferentes. He aquí una expresión equivalente a 4 :

$$4+\frac{4-4}{4}=\mathbf{4}$$

Observar que el segundo término : $\frac{4-4}{4}$ es nulo y que la suma es igual a cuatro. La expresión escrita equivale a : $4 + 0$, o sea 4

Me di cuenta de que el mercader sirio escuchaba atento, sin perder palabra de la explicación de Beremiz, como si le interesaran mucho aquellas expresiones aritméticas formadas por *cuatro cuatros*.

Beremiz prosiguió :

- Quiero formar por ejemplo el número 5.

No hay dificultad. Escribiremos : $\frac{4\times 4+4}{4}=\mathbf{5}$

Esta fracción expresa la división de 20 por 4 y el cociente es 5. De este modo tenemos el 5 escrito con *cuatro cuatros*.

Pasemos ahora al 6, que presenta una forma muy elegante :

$$\frac{4+4}{4}+4=\mathbf{6}$$

Una pequeña alteración en este interesante conjunto lleva al resultado 7 :

$$\frac{44}{4}-4=\mathbf{7}$$

Es muy sencilla la forma que puede adoptarse para el número 8 escrito con cuatro cuatros :

$$4+4+4-4=\mathbf{8}$$

El número 9 también es interesante :

$$4+4+\frac{4}{4}=\mathbf{9}$$

Y ahora te mostraré una expresión muy bella, igual a 10, formada con cuatro cuatros:

$$\frac{44-4}{4}=\mathbf{10}$$

En este momento, el jorobado, dueño de la tienda, que había seguido las explicaciones de

Beremiz con un silencio respetuoso, observó :

- Por lo que acabo de oir, el señor es un eximio matemático. Si es capaz de explicarme cierto misterio que hace dos años encontré en una suma, le regalo el turbante azul que quería comprarme. Y el mercader narró la siguiente historia :

Presté una vez 100 dinares, 50 a un jeque de Medina y otros 50 a un judío de El Cairo. El medinés pagó la deuda en cuatro partes, del siguiente modo : 20 , 15 , 10 y 5 , es decir :

Pagó	20	y quedó	debiendo	30
"	15	"	"	15
"	10	"	"	5
"	5	"	"	0
Suma	50		Suma	50

Fíjese, amigo mío, que tanto la suma de las cuantías pagadas como la de los saldos deudores, son iguales a 50.

El judío cairota pagó igualmente los 50 dinares en cuatro plazos, del siguiente modo :

Pagó	20	y quedó	debiendo	30
"	18	"	"	12
"	3	"	"	9
"	9	"	"	0
Suma	50		Suma	51

Conviene observar ahora que la primera suma es 50 - *como en el caso anterior* - mientras la otra da un total de 51. Aparentemente esto no debería suceder.

No sé explicar esta diferencia de 1 que se observa en la segunda forma de pago. Ya sé que no quedé perjudicado, pues recibí el total de la deuda, pero ¿cómo justificar el que esta segunda suma sea igual a 51 y no a 50 como en el primer caso?

- Amigo mío, explicó Beremiz, esto se explica con pocas palabras. En las cuentas de pago, los saldos deudores no tienen relación ninguna con el total de la deuda. Admitamos que la deuda de 50 fuera pagada en tres plazos, el primero de 10; el segundo de 5; y el tercero de 35. La cuenta con los saldos sería :

Pagó	10	y quedó	debiendo	40
"	5	"	"	35
"	35	"	"	0
Suma	50		Suma	75

En este ejemplo, la primera suma sigue siendo 50, mientras la suma de los saldos es, como veis, 75; podía ser 80 , 99, 100, 260, 800 o un número cualquiera. Sólo por casualidad dará exactamente 50, como en el caso del jeque, o 51, como en el caso del judío.

El mercader quedó muy satisfecho por haber entendido la explicación de Beremiz, y cumplió la promesa ofreciendo al calculador el turbante azul que valía cuatro dinares.

4 Analogías y Distribuciones

No cabe duda que existe relación entre la inteligencia y la capacidad de desenvolverse con los números; de captar relaciones entre ellos y realizar operaciones entre ellos. Sobre esto trata este capítulo.

Indudablemente la inteligencia no es solo numérica, pero se acepta que la habilidad demostrada en el dominio de los números es expresión de inteligencia. No es ninguna casualidad que en los **Tests** de inteligencia y las pruebas de aptitud matemática, ocupan un lugar importante las preguntas sobre series, analogías y distribuciones númericas, cuyas peculiaridades presentamos a continuación.

I) ANALOGIAS NUMERICAS

En su forma más simple, son un grupo de números distribuídos en dos líneas horizontales (filas). La primera fila contiene tres números y el que ocupa la posición central, es el resultado de efectuar ciertas operaciones con los que ocupan los extremos.

Extremos
\# central

1ra Fila → □ (□) □

2da Fila → □ (?) □

En la segunda fila solo se conocen los extremos y falta el central, que será hallado efectuando las mismas operaciones que se aplicaron en la primera fila.

En su forma más elaborada, la analogía presenta tres filas de los cuales dos tienen todos sus términos y la fila restante está incompleta, debiendo completarse según el procedimiento ya expuesto.

Ejemplo 1: ¿Qué número falta?

20 (99) 5
7 ( ) 13

Resolución:

Si multiplicamos los extremos de la primera fila.

Hallamos $20 \times 5 = 100$ y si el número central es 99, no hay que pensar mucho para decir que el producto está disminuído en 1. Esta será la regla de formación:

central = (producto de extremos) - 1

Procediendo igual en la 2da fila: $7 \times 13 - 1 =$ **90** **RPTA**

Ejemplo 2: ¿Qué número falta?

9 (20) 4

8 (12) 5

6 ( ) 4

Resolución:

El número central es la diferencia de los extremos multiplicada por 4.

1ra fila: $9 - 4 = 5 \rightarrow 5 \times 4 = 20$

2da fila: $8 - 5 = 3 \rightarrow 3 \times 4 = 12$

3ra fila: $6 - 4 = 2 \rightarrow 2 \times 4 =$ **8** **RPTA**

Ejemplo 3: ¿Qué número falta?

196 (25) 324

216 ( ) 159

Resolución:

Si queremos encontrar una relación sencilla y elegante no la encontramos operando con los números tal como están, pero si utilizamos los dígitos de dichos números encontramos:

$1 + 9 + 6 + 3 + 2 + 4 = 25$

Suma de dígitos = # central.

De esta manera, en la segunda fila:

central = $2 + 1 + 6 + 1 + 5 + 9 =$ **24** **RPTA**

Observaciones:

- Entre las múltiples operaciones que puedan explicar la relación entre los extremos y el número central, será siempre mejor aceptada la que implique los cálculos más simples y verosímiles, sin caer en operaciones rebuscadas o cálculos extravagantes.

- También es pertinente señalar que el requisito de claridad y sencillez en algunas soluciones se alcanza operando los dígitos de los números, tal como se hizo en el ejemplo 3.

II) DISTRIBUCIONES NUMERICAS

En este caso se consideran grupos de números distribuídos en filas (*horizontales*) y columnas (*verticales*) pudiendo establecerse analogías entre filas, como en el caso anterior; también entre columnas, sin que la incógnita sea necesariamente el número central, por este motivo las operaciones a realizarse alcanzan una mayor diversidad y exigen más raciocinio.

Ejemplo 4: ¿Qué número falta?

18	25	4
16	20	3
6	15	_

<u>Resolución</u>:

En cada columna el último número es el triple de la diferencia de los primeros; entonces:

1ra columna: $18 - 16 = 2 \rightarrow 2 \times 3 = 6$

2da columna: $25 - 20 = 5 \rightarrow 5 \times 3 = 15$

3ra columna: $4 - 3 = 1 \rightarrow 1 \times 3 =$ **3** **RPTA**

Ejemplo 5: ¿Qué número falta?

8	17	5
12	16	_
10	11	9

<u>Resolución</u>:

En cada fila, la suma de los números es constante.

1ra fila: $8 + 17 + 5 = 30$

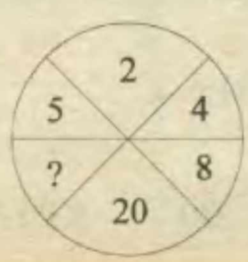
3da fila: $10 + 11 + 9 = 30$

1ra fila: $12 + 16 + x = 30 \Rightarrow$ $\mathbf{x = 2}$ **RPTA**

III) DISTRIBUCIONES GRAFICAS

Una manera de representar analogías numéricas, se basa en distribuir los números que se van a relacionar, dentro de una ó varias figuras. De este modo la forma de la figura es un elemento adicional que se debe considerar al plantear la estrategía de solución.

Ejemplo 6: ¿Qué número falta?



Resolución:

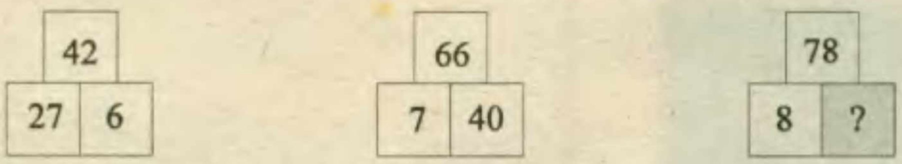
Los números se relacionan con sus opuestos diametralmente.
Cada par de opuestos da un producto constante.

Así: $5 \times 8 = 40$; $2 \times 20 = 40$

Por esta razón el opuesto a 4 debe ser 10.

RPTA: 10

Ejemplo 7: ¿Qué número falta?



Resolución:

Los casilleros inferiores, como si fueran pilares, deben operarse para obtener el casillero superior. Esta es la relación que se descubre:

superior = doble de la diferencia entre bases

Efectivamente, tendremos para cada figura:

$42 = (27 - 6) \times 2$

$66 = (40 - 7) \times 2$

$78 = (x - 8) \times 2 \quad \Rightarrow \quad x = 47$

RPTA: 47

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- ¿Qué número falta?

27 (31) 35

23 ( ) 17

A) 19 ***B) 21*** ***C) 25*** ***D) 20*** ***E) 18***

Resolución:

Comenzamos por la 1ra fila.

Al sumar los extremos: 27 + 35 = 62, notamos que el número central (31) es la mitad de esta suma, por tanto la relación será:

central = (suma de extremos) ÷ 2

En la 2da fila:

central = (23 + 17) ÷ 2 = 20 RPTA. D

2.- ¿Qué número falta?

3 (144) 9

8 ( ) 6

A) 324 ***B) 196*** ***C) 256*** ***D) 169*** ***E) 221***

Resolución:

Relacionamos 144 con 12^2, ahora, 12 es la suma de los extremos ($3 + 9 = 12$), entonces tendremos como conclusión:

$$\# \text{ central} = (\text{suma de extremos})^2$$

Y en la 2da fila: $(8+6)^2 =$ **196** RPTA. B

3.- ¿Qué número falta?

4 (20) 9

8 (14) 5

10 ( ) 3

A) 12 ***B) 16*** ***C) 7*** ***D) 11*** ***E) 15***

Resolución:

En cada fila, la mitad del número de la izquierda, sumada con el doble del número de la derecha, da el número central.

En la 3ra fila: $(10 \div 2) + (3 \times 2) = 5 + 6 =$ **11** RPTA. D

4.- ¿Qué número falta?

23 (15) 21

15 (18) 12

13 ( ) 24

A) 20 ***B) 24*** ***C) 21*** ***D) 27*** ***E) 32***

Resolución:

La suma de los dígitos de los números de la izquierda, multiplicada por la suma de los dígitos del número de la derecha, da el número central.

1ra fila: $(2 + 3)(2 + 1) = 15$

2da fila: $(1 + 5)(1 + 2) = 18$

3ra fila: $(1 + 3)(2 + 4) =$ **24** RPTA. B

5.- Indicar el número que falta en la siguiente relación:

5	*(60)*	*15*
3	*(45)*	*12*
8	*( )*	*5*

A) 12 *B) 13* *C) 45* *D) 39* *E) 5* ***UNFV - 96***

Resolución:

El número central es el triple de la suma de los extremos. Entonces, en la 3ra fila tendremos:

$3\,(8 + 5) =$ **39** RPTA. D

6.- En la diagrama, hallar x:

24	*30*	*36*
18	*11*	*4*
37	*x*	*65*

A) 13 *B) 20* *C) 51* *D) 30* *E) 11* ***UNMSM - 84***

Resolución:

\# central = (suma de extremos) ÷ 2

$= (37 + 65) \div 2 =$ **51** RPTA. C

7.- En el siguiente arreglo ¿cuál es el número que falta?

4	*7*	*9*	*5*
7	*7*	*6*	*5*
6	*4*	*7*	*8*
8	*7*	*3*	*...*

A) 12 *B) 11* *C) 9* *D) 5* *E) 7*

Resolución:

En el arreglo está oculta la siguiente relación: Cualquier línea de 4 números (horizontal o vertical) da una suma constante (25). Entonces el número que completa el arreglo es:

7 RPTA. E

8.- ¿Qué número falta en este cuadro?

0	*1*	*2*	*3*
1	*2*	*3*	*4*
1	*2*	*9*	*x*

A) 36 *B) 12* *C) 81* *D) 64* *E) 125*

Resolución:

La 1^{ra} fila son exponentes que aplicados a los números de la 2^{da} fila dan los resultados que aparecen en la 3^{ra} fila.

$1^0 = 1$; $2^1 = 2$; $2^2 = 9$; $2^3 =$ **64** RPTA. D

9.- ¿Qué número falta?

1	*0*	*2*	*9*
2	*1*	*3*	*36*
3	*2*	*4*	*x*

A) 81 *B) 64* *C) 49* *D) 72* *E) 90*

Resolución:

El último número de cada fila es el resultado de elevar al cuadrado la suma de los 3 primeros, entonces en la última fila:

$x = (3 + 2 + 4)^2 =$ **81** RPTA. A

10.- ¿Qué triada no concuerda con la forma de construcción de las otras?

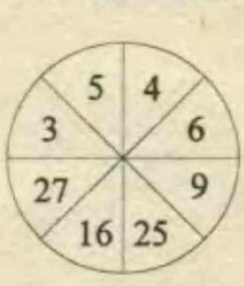
A) 2 - 4 - 8 *B) 3 - 9 - 27* *C) 4 - 16 - 64* *D) 5 - 25 - 12* *E) 6 - 36 - 218*

Resolución:

En cada tríada tenemos un número, luego su cuadrado y después su cubo. La última no concuerda con esto porque 6^3 no es 218, porque lo cierto es : $6^3 = 216$.

RPTA. E

11.- ¿Qué número se ha instalado equivocadamente ?



A) 25 *B) 16* *C) 27* *D) 6* *E) 9*

Resolución:

Los números de la mitad superior (3 , 5 , 4 y 6) deben tener a sus respectivos cuadrados, diametralmente opuestos en la mitad inferior. En esta segunda mitad, el número que se ha colocado equivocadamente es el :

27 RPTA. C

12.- Hallar x :

	4			2			9
2	6		4	7		5	11
0			-1			x	

A) 1 *B) -2* *C) 3* *D) -4* *E) 5* ***PUCP 92 - I***

<u>**Resolución**</u>:

Empleando una letra representativa para cada casillero, vemos que en todos se cumple la siguiente relación:

	a
b	c
d	

$\Rightarrow \quad d = a + b - c$

Entonces, $x = 9 + 5 - 11 = 3$ RPTA. C

13.- Si la relación arimética entre los cuadros horizontales es la misma.

a)

16	8		8	
8	4			m

b)

27	9		9	
9	3			n

Entonces, m + n es:

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 1* ***UNMSM 95***

<u>**Resolución**</u>:

Tenemos que resolver dos analogías (a) y (b).

Explicación de (a):

$16 \xrightarrow{\div 2} 8$ $\qquad 8 \xrightarrow{\div 2} 4$

$8 \xrightarrow{\div 2} 4$ $\qquad 4 \xrightarrow{\div 2} 2 \;\ldots\; m = 2$

Explicación de (b):

$27 \xrightarrow{\div 3} 9$ $\qquad 9 \xrightarrow{\div 3} 3$

$9 \xrightarrow{\div 3} 3$ $\qquad 3 \xrightarrow{\div 3} 1 \;\ldots\; n = 1$

Luego, $m + n = 2 + 1 = 3$ RPTA. B

14.- Determine el número que faltaría en el siguiente cuadro :

17	18	2
78	80	10
200	?	29

A) 405 *B) 210* *C) 220*
D) 356 *E) 203*

UNI 95 - II

Resolución:

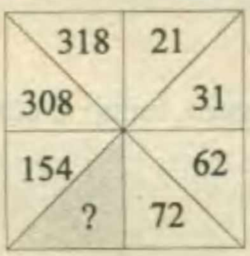
1ra Fila $17 \xrightarrow{+1} 18 \xrightarrow{\div 9} 2$

2da Fila $78 \xrightarrow{+2} 80 \xrightarrow{\div 8} 10$

3ra Fila $200 \xrightarrow{+3} x \xrightarrow{\div 7} 29$

El número que completa la 3ra fila es $x =$ **203** RPTA. E

15.- Hallar el número que mejor completa la figura mostrada:



A) 66 *B) 124* *C) 128* *D) 142* *E) 144*

UNI 95 - II

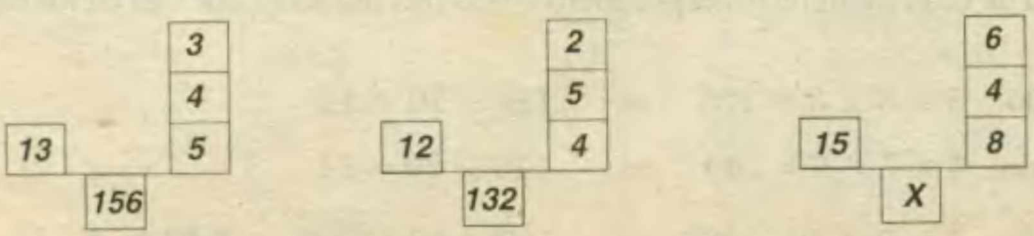
Resolución:

Al revisar los números en sentido horario se forma una serie basada en dos operaciones que se repiten: + 10 ; × 2.

21 →(+10) 31 →(×2) 62 →(+10) 72 →(×2) x →(+10) 154 →(×2) 308 →(+10) 318

El número que falta es: **144** RPTA. E

16.- El valor de x es:



A) 186 *B) 193* *C) 214* *D) 270* *E) 290* ***UNFV - 94***

Resolución:

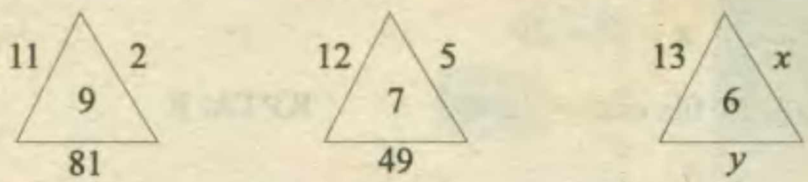
Al multiplicar el número de la izquierda por la suma de los números de la derecha, se obtiene en número central. Así:

1ra figura: $13\,(3 + 4 + 5) = 156$

2da figura: $12\,(2 + 5 + 4) = 132$

3ra figura: $15\,(6 + 4 + 8) =$ **270** RPTA. D

17.- En los siguientes triángulos hay una serie numérica. El valor de y - x es:



A) 36 *B) 30* *C) 28* *D) 32* *E) 29* *UNMSM - 92*

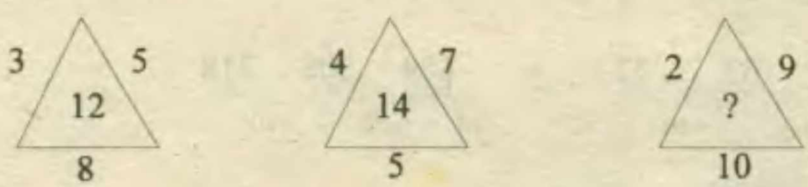
Resolución:

Restando los lados se obtiene el número que va dentro del triángulo, luego el cuadrado de este número dará el que va en la base. Entonces:

$13 - x = 6 \Rightarrow x = 7$

Luego: $y = 6^2 =$ **36** RPTA. E

18.- ¿Qué número falta?



A) 18 *B) 16* *C) 24* *D) 27* *E) 15*

Resolución:

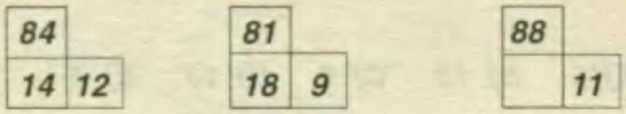
El número central de cada triángulo es el producto de los tres números que van en los lados, dividido por 10.

1er triángulo: $3 \times 5 \times 8 = 120 \Rightarrow 120 \div 10 = 12$

2do triángulo: $4 \times 7 \times 5 = 140 \Rightarrow 140 \div 10 = 14$

3er triángulo: $2 \times 9 \times 10 = 180 \Rightarrow 180 \div 10 =$ **18** RPTA. A

19.- ¿Qué número falta?



A) 20 ***B) 8*** ***C) 16*** ***D) 18*** ***E) 12***

Resolución:

El número de arriba se divide entre el número de la derecha, y duplicando el cociente se obtiene el número del vértice.

El número faltante es: $(88 \div 11) \times 2 =$ **16** RPTA. C

20.- ¿Qué número falta?



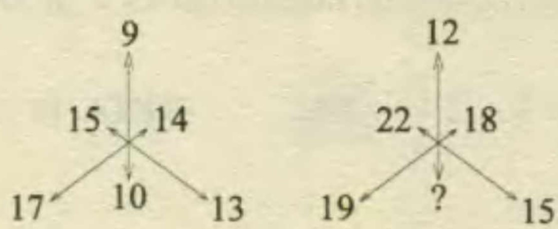
A) 95 ***B) 97*** ***C) 89*** ***D) 91*** ***E) 79***

Resolución:

Comenzando en 4, y como al dibujar un "ocho" enlazamos los números 7; 13; 25; 49 donde cada uno es el doble del anterior disminuído en 1.

De este modo sigue $49 \times 2 - 1 =$ **97.** RPTA. B

21.- ¿Qué número falta?



A) 11 ***B) 7*** ***C) 6*** ***D) 9*** ***E) 5***

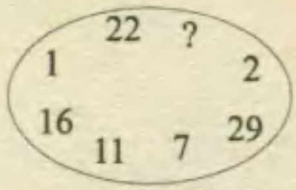
Resolución:

Los números señalados por las fechas más largas, dan la misma suma que los números señalados por las flechas cortas.

1ra figura: $17 + 9 + 13 = 15 + 14 + 10$

2da figura: $19 + 12 + 15 = 22 + 18 + x \Rightarrow$ $x = 6$ RPTA. C

22.- ¿Qué número falta?



A) 6 *B) 13* *C) 9* *D) 18* *E) 4*

Resolución:

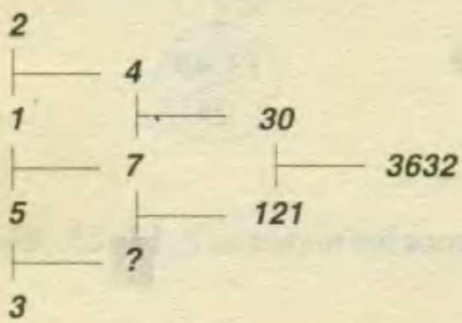
Ordenando de menor a mayor los números del círculo, se forma la serie :

1 2 ... 7 11 16 22 29

Donde los números aumentan en 1; 2; 3; 4; 5; 6 y 7 unidades.

El número que falta es **4** RPTA. E

23.- ¿Qué número falta?



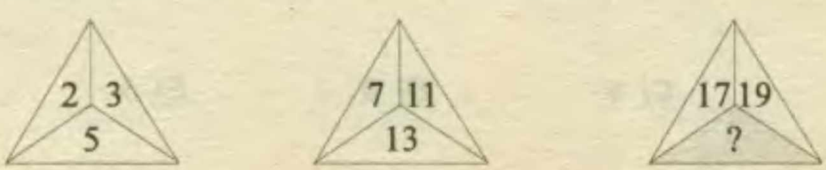
A) 11 *B) 9* *C) 15* *D) 17* *E) 10*

Resolución:

Cada "*T*" inclinada a la derecha señala un número que es el producto de dos números de la izquierda más 2.

El número faltante es: $5 \times 3 + 2 =$ **17.** RPTA. D

24.- ¿Cuál es el número?



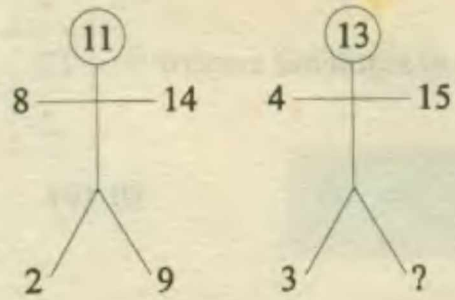
A) 40 *B) 27* *C) 23* *D) 31* *E) 29*

Resolución:

Todos los números son primos consecutivos (estoa solo se pueden dividir entre sí mismos o por la unidad). Luego el número que continúa la serie es **23.**

RPTA. C

25.- ¿Qué número falta?



A) 7 *B) 3* *C) 5* *D) 6* *E) 8*

<u>Resolución</u>:

A la suma de los números de los brazos, se le resta la suma de los números de las piernas y se obtiene el número de la cabeza.

$$13 = (4 + 15) - (3 + x) \quad \Rightarrow \quad x = 3$$ RPTA. B

26.- ¿Cuál es el número que falta en la figura "b" para tener la misma relación que en las figuras "a" y "c"?

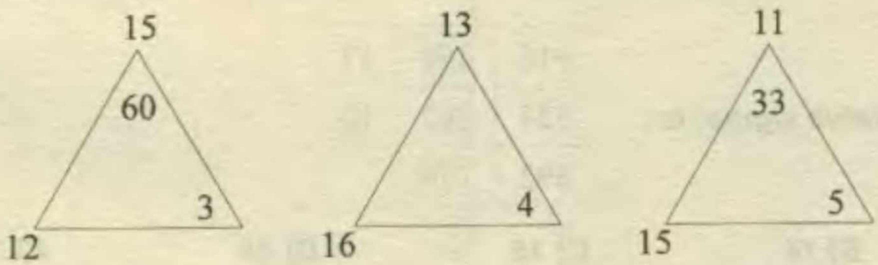


Fig. a *Fig.* b *Fig.* c

A) 52 *B) 53* *C) 54* *D) 55* *E) 56*

<u>Resolución</u>:

En la figura (a) los número en el exterior del triángulo son 12 y 15, mientras que en el interior son 60 y 3. Nótese que se cumple :

$$12 \times 15 = 60 \times 3$$

En la figura (c) se cumple lo mismo : $15 \times 11 = 33 \times 5$

Entonces, siendo n el número que falta en (b) : $16 \times 13 = 4 . n$

$$48 = 4n$$

$$\therefore \quad n = 52$$ RPTA. A

27.- Indique el número faltante en el siguiente cuadro :

4	12	64
12	36	?
2	6	32

A) 188 **B) 189** **C) 190** **D) 191** **E) 192**

<u>Resolución:</u>

En la 1ra línea : 4 → 12 (× 3) ; 4 → 64 (× 16)

En la 3ra línea : 2 → 6 (× 3) ; 2 → 32 (× 16)

Por lo tanto en la 2da línea : 12 36 x ;

el número que falta es : $x = 12 \times 16 =$ **192** RPTA. E

28.- Completa la tabla siguiente :

916	458	17
524	262	10
392	196	

A) 12 **B) 14** **C) 16** **D) 18** **E) 20**

<u>Resolución:</u>

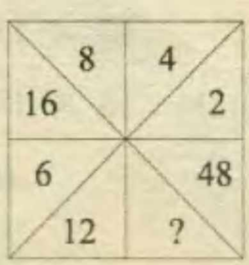
En la 1ra línea se verifica que : 916 ÷ 2 da el segundo número : 458 y el tercer número se obtiene sumando los dígitos del segundo :

$$4 + 5 + 8 = 17$$

En la 2da linea ocurre lo mismo: 524 ÷ 2 = 262 ; luego : 2 + 6 + 2 = 10

Finalmente en la 3ra línea el número que falta es : $1 + 9 + 6 =$ **16** RPTA. C

29.- Indique el número faltante :



A) 22 **B) 24** **C) 26** **D) 28** **E) 30**

Resolución:

Cada número de la región superior del cuadrado se multiplica por 3 para obtener el opuesto, en la parte inferior. Así :

$$16 \times 3 = 48 \;;\; 4 \times 3 = 12 \;;\; 2 \times 3 = 6$$

Entonces el número faltante es : $8 \times 3 = $ **24** RPTA. B

30.- Del siguiente cuadro determine el número faltante :

15	30	90
20	80	400
25	150	?

A) 1 010 ***B) 1 020*** ***C) 1 030*** ***D) 1 040*** ***E) 1 050***

Resolución:

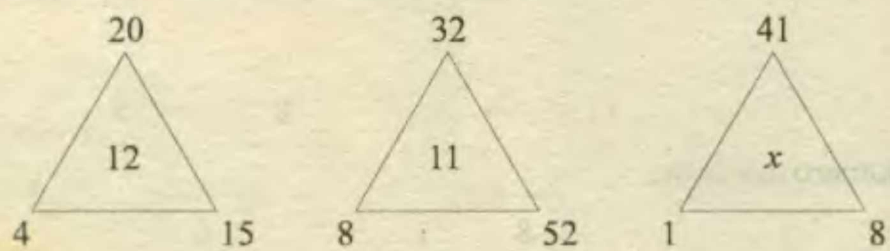
En la 1ra línea : $15 \times 2 = 30$; $30 \times 3 = 90$

En la 2da línea : $20 \times 4 = 80$; $80 \times 5 = 400$

En la 3ra línea : $25 \times 6 = 150$; $150 \times 7 = 1\,050$

El número faltante es : **1050** RPTA. E

31.- ¿Qué número falta en el tercer triángulo?



A) 5 ***B) 10*** ***C) 15*** ***D) 20*** ***E) 25***

Resolución:

En el primer triángulo :

La suma de los número externos es : $4 + 20 + 15 = 39$

Y el número central es 12 ; la relación es : $3 + 9 = 12$

En el segundo triángulo : $8 + 32 + 52 = 92$

Luego : $9 + 2 = 11$

Finalmente en el tercer triángulo : $1 + 41 + 8 = 50$; entonces : $x = 5 + 0 = $ **5** RPTA. A

32.- De la serie dada en el cuadro, hallar el número faltante :

1	2	4	7
7	8	12	21
21	22	30	57
57	58	74	?

A) 50 ***B) 100*** ***C) 150*** ***D) 155*** ***E) 200***

Resolución:

Cada fila es una sucesión creciente cuyos términos aumentan de acuerdo a las potencias de 1 ; 2 ; 3 ; 4 ;....; etc.

1ra fila : 1 → 2 → 4 → 7 ($+1$, $+2$, $+3$)

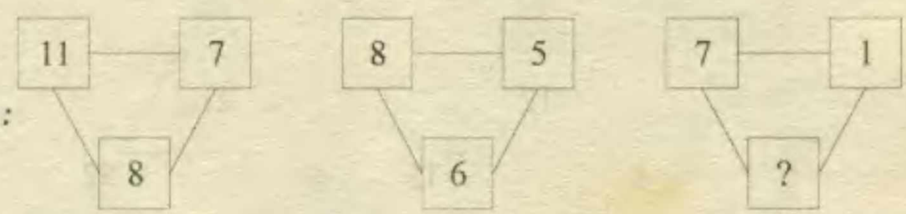
2da fila : 7 → 8 → 12 → 21 ($+1^2$, $+2^2$, $+3^2$)

3ra fila : 21 → 22 → 30 → 57 ($+1^3$, $+2^3$, $+3^3$)

4ta fila : 57 → 58 → 74 → x ($+1^4$, $+2^4$, $+3^4$)

Entonces : $x = 74 + 3^4 = 74 + 81 =$ **155** RPTA. D

33.- Escriba el número que falta :



A) 10 ***B) 12*** ***C) 14*** ***D) 16*** ***E) 18***

Resolución:

En cada esquema, la diferencia de los números de arriba, se multiplica por 2 para obtener el número de abajo. Así :

$11 - 7 = 4$; $4 \times 2 = 8$

$8 - 5 = 3$; $3 \times 2 = 6$

$7 - 1 = 6$; $6 \times 2 = 12$

El número faltante es **12** RPTA. B

34.- ¿Qué pareja de símbolos completa la última figura?

C	10	I	23	?
5	E	16	Ñ	?

A) I ; 27 *B) II ;28* *C) III ; 29* *D) IV ; 30* *E) V ; 31*

Resolución:

Observando con cuidado reconocemos que aparecen alternadamente una secuencia literal y otra numérica ; veamos :

A) C → E → I → Ñ → ..?..
(+2, +4, +6, +8)

La octava letra después de la Ñ es la **V**

B) 5 → 10 → 16 → 23 → .....
(+5, +6, +7, +8)

El octavo número después de 23 es **31** RPTA. E

35.- ¿Qué letra falta :

K	*N*	*H*
P	*T*	*M*
I	*N*	.... ?

A) B *B) C* *C) D* *D) A* *E) F*

Resolución:

Al tener de referencia al abecedario, reconocemos que :

En la 1ra línea, K equidista de N y H

En la 2da línea, P equidista de T y M

En la 3ra línea, I equidista de N y ..?..

... C [D] R G G H [I] J K L M [N] Ñ O P Q R S T ......

Observamos que la letra faltante es **D** RPTA. C

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- ¿Qué número falta?

2 10 4
3 17 5
3 __ 4

A) 15 B) 14 C) 16 D) 17 E) 12

2.- ¿Qué número falta ?

5 8 12
7 12 18
13 4 __

A) 12 B) 15 C) 16 D) 19 E) 11

3.- ¿Qué número falta?

17(271)16
14( )13

A) 141 B) 125 C) 136 D) 181 E) 223

4.- ¿Qué número falta?

0 1 2 3
1 2 3 4
0 2 6 _

A) 7 B) 10 C) 12 D) 9 E) 11

5.- ¿Qué número falta?

6 8 7
36 64 49
24 48 __

A) 28 B) 42 C) 35 D) 43 E) 41

6.- ¿Cuál de las alternativas continúa la serie?

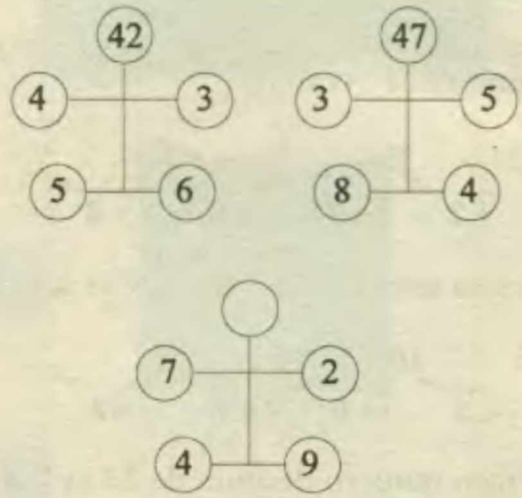
1 - 1 - 2 ; 1 - 2 - 3 ; 1 - 3 - 4

A) 1 - 3 - 5 B) 1 - 4 - 5 C) 1 - 5 - 7
D) 1 - 5 - 9 E) 1 - 7 - 13

7.- Indentifique la terna de números que se excluye por no guardar relación con los restantes.

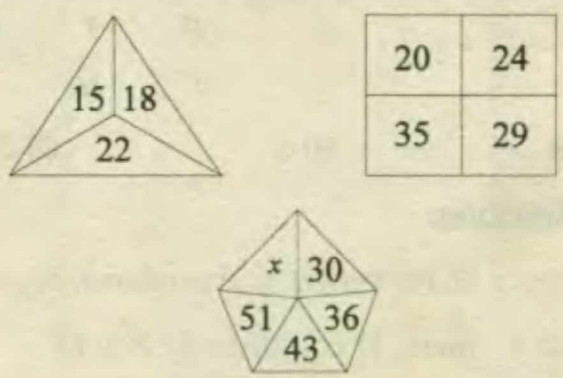
A) 3 3 4 B) 7 1 2 C) 4 4 2
D) 8 1 1 E) 6 2 3

8.- Observe los siguientes gráficos y determine el # que falta.



A) 50 B) 48 C) 46 D) 44 E) 42

9.- En el último esquema; el valor de x es :



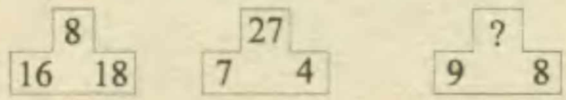
A) 59 B) 61 C) 24 D) 26 E) 25

10.- El número que completa la tabla es:

123 21^3 31^2
456 54^6 ?

A) 56^2 B) 64^5 C) 65^4 D) 45^6 E) 30^0

11.- ¿Qué número falta?



A) 1 B) 4 C) 8 D) 64 E) 6

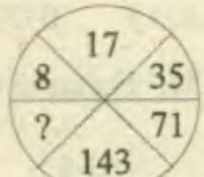
12.- ¿Qué número falta?

4	16	64
7	49	343
6	36	....

A) 72 B) 144 C) 729

D) 256 E) 216

13.- ¿Qué número completa mejor el esquema?



A) 312 B) 316 C) 287

D) 304 E) 296

14.- ¿Qué número falta?

718 (26) 582

474 (...) 226

A) 25 B) 24 C) 14 D) 13 E) 23

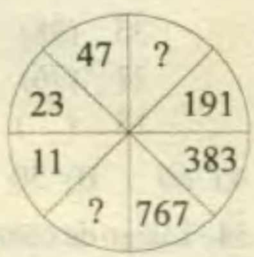
15.- ¿Qué número falta?

30 (450) 30

24 (…) 25

A) 360 B) 49 C) 300 D) 490 E) 245

16.- ¿Qué números faltan?



A) 90 ; 4 D) 90 ; 6

B) 92 ; 5 E) 95 ; 5

C) 100 ; 6

NIVEL B

17.- ¿Qué número falta?

18 (99) 22

15 ( ) 16

A) 60 B) 90 C) 96 D) 64 E) 120

18.- ¿Qué número falta?

412 (142) 128

334 ( ) 166

A) 72 B) 84 C) 96 D) 112 E) 68

19.- ¿Qué número falta?

22 (289) 12

5 (36) 7

14 ( ) 8

A) 81 B) 96 C) 121 D) 144 E) 169

20.- Determine los números que faltan en :

9 (45) 81

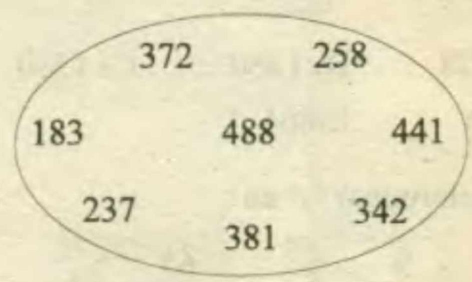
8 (36) 64

10 (x) y

Y calcule el valor de $2x - y$.

A) 10 B) 15 C) 20 D) 5 E) 25

21.- ¿Cuál de estos números no guarda la misma relación con los demás?



A) 342 B) 441 C) 258 D) 488 E) 183

22.- ¿Qué número falta?

7	9	5	11
4	15	12	7
13	8	11	_

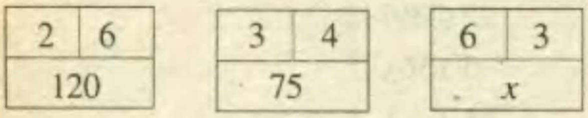
A) 15 B) 13 C) 9 D) 12 E) 10

23.- ¿Completar el número faltante.

19	22	25
10	7	__
6	14	20
3	1	4

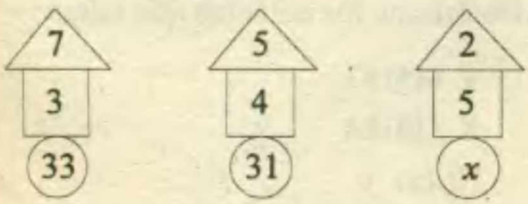
A) 1 B) 16 C) 18 D) 2 E) 3

24.- ¿Qué número falta?



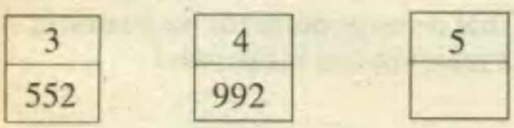
A) 162 B) 180 C) 140 D) 135 E) 195

25.- ¿Qué número falta?



A) 18 B) 26 C) 21 D) 32 E) 29

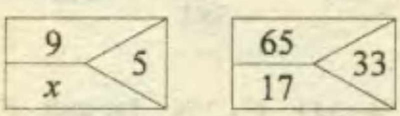
26.- ¿Qué número sigue?



A) 1 728 B) 1 280 C) 1 560

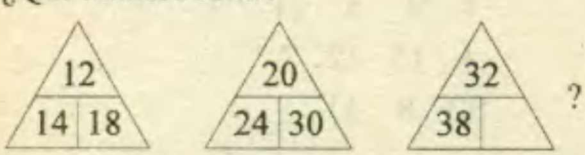
D) 996 E) 864

27.- Determinar "x" en :



A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

28.- ¿Qué número falta :



A) 40 B) 41 C) 42 D) 43 E) 44

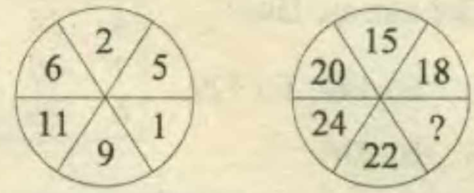
29.- ¿Qué número falta :

5	6	4	12	3
33	34	32	?	24

?

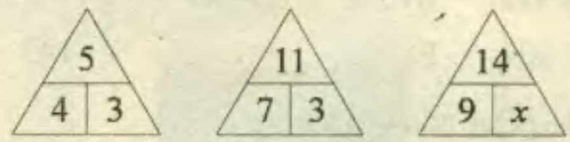
A) 36 B) 84 C) 40 D) 144 E) 96

30.- ¿Qué número falta en el segundo círculo?



A) 13 B) 23 C) 5 D) 15 E) 4

31.- Hallar el valor de "x" :



A) 7 B) 5 C) 4 D) 8 E) 3

NIVEL C

32.- ¿Qué números faltan?

3	24	6
5	120	3
6	x	y

A) 150 y 8 B) 90 y 7 C) 210 y 3

D) 84 y 12 E) 72 y 9

33.- ¿Qué número falta?

35	(98)	21
27	(76)	15
18	( )	24

A) 60 B) 50 C) 46 D) 54 E) 48

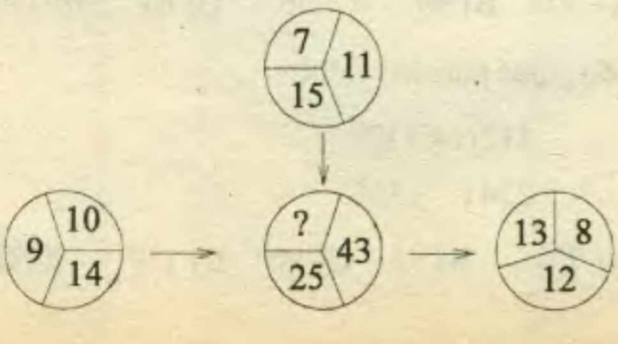
34.- Luego de completar los números que faltan:

3	7	13	2	x
5	20	51	104	y

El valor de $y - x$ es:

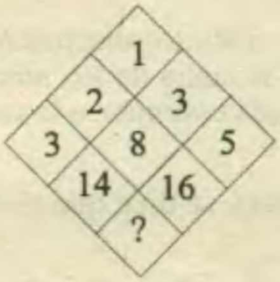
A) 112 B) 154 C) 133 D) 95 E) 87

35.- ¿Qué número falta?



A) 28 B) 31 C) 29 D) 34 E) 41

36.- ¿Qué número falta?



A) 30 B) 28 C) 19 D) 33 E) 22

37.- ¿Qué números faltan :

1	2	
4		12
16	32	48
64		192

?

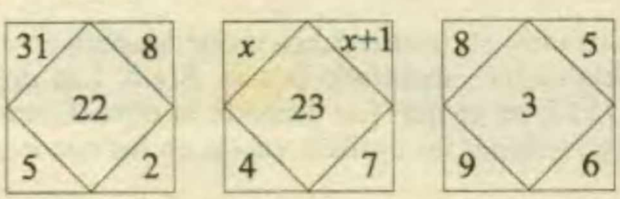
A) 6 ; 24 ; 4 B) 10 ; 128 ; 2 C) 6 ; 256 ; 6
D) 8 ; 128 ; 3 E) 30 ; 64 ; 36

38.- Determinar el número que falta :



A) 305 B) 115 C) 104 D) 107 E) 109

39.- Hallar "*x*" :



A) 10 B) 11 C) 12 D) 9 E) 13

40.- ¿Qué número debe ubicarse en lugar de la incógnita *x* :

4	8	3	
2	9	4	
1	7	*x*	?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 3 E) 5

41.- ¿Qué letra debe ubicarse en lugar de la incógnita :

A	D	G
D	H	L
H	M	?

A) S B) R C) Q D) Ñ E) T

42.- ¿Qué letras faltan :

B	C	E	H	?
A	C	E	G	?

A) IK B) JL C) LI D) LM E) MO

43.- ¿Cómo debe ser la 4ta línea de letras :

A	B	C
E	F	G
J	K	L

.... ?

A) ÑNO B) NOÑ C) NÑO
D) MNÑ E) POQ

44.- ¿Qué letras siguen?

A	J		C	M		E	P
G	S						

A) B ; R B) S ; M C) E ; H
D) J ; L E) I ; W

45.- ¿Qué letras faltan?

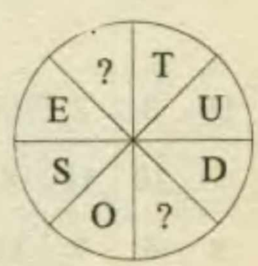
A) A y F

B) S ; I

C) G ; S

D) Z ; J

E) I ; W



LOS CUADROS MAGICOS

Un cuadro mágico es una disposición de varios números distintos dispuestos en cuadro, con igual número de filas que de columnas, de tal modo que la suma de los números que se encuentran en cada fila, o la suma de los que se encuentran en cada columna, o la suma de los de ambas diagonales, tenga el mismo valor.

Según sea 3 ; 4 ; etc..., el número de filas (o de columnas), se dice que el cuadro es de orden 3 ; 4 , ...etc. No existen cuadros mágicos de orden 2.

Con los naturales consecutivos, del 1 hasta el 9, se puede formar el cuadro mágico mostrado en la *Fig*.1, que es el más antiguo que se encuentra en la Historia (probablemente se compuso unos diez siglos a. de C. en la India). En Europa se introdujeron a principios del siglo XV y de esa época son los mostrados en las *Fig*.2 y *Fig*.3 , que son de orden 4 .

Fig.1

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Fig.2

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Fig.3

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

Si a, b y c son 3 números enteros cualesquiera, la disposición de la *Fig*. 4 muestra la forma general de un cuadro mágico de orden 3 .Realmente hay un solo tipo fundamental de orden 3. En los de orden superior los resultados no son tan satisfactorios . Sólo en los de orden impar hay algunos métodos generales y claros para construir cuadros mágicos, pero en los de orden par no se ha llegado ni a eso.

$a+b$	$a-(b+c)$	$a+c$
$a-(b-c)$	a	$a+(b-c)$
$a-c$	$a+(b+c)$	$a-b$

Fig. 4

Terminamos la presentación de ejemplos mostrando el cuadro mágico que aparece en el conocidísimo grabado de Durero titulado "La Melancolía", mostrado por la *Fig*.5. Las dos cantidades del centro de la base escriben el año 1514, en el que fue grabada la obra. Como sencillos ejercicios para el lector, dejamos a su cargo rellenar las casillas vacías en los cuadros mágicos compuestos con los 25 primeros enteros.

Fig.5

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

1	20		23	
24		2		10
17		25	14	
15	4		7	21
	22	11		19

17		1	8	15
23	5	7	14	
4	6			22
10	12		21	3
		25	2	9

5 Series

Sabemos que cualquier colección de números es un conjunto y si este conjunto está ordenado y sus términos se presentan de modo que se ven relacionados entre sí por operaciones de adición o sustracción, entonces será una serie. Entre las series que trataremos, algunas tienen propiedades curiosas que se podrían estudiar por pasatiempo; otras resultan interesantes por su empleo en matemáticas y sus aplicaciones, y otras son tanto curiosas como útiles. Sin embargo todas ellas implican sumas con muchos términos, como por ejemplo :

$1 + 2 + 3$ ....
$1 + 3 + 5 + 7 +$ ....
$1 + 4 + 9 + 16 +$ ....
$100 + 98 + 96 + 94 +$ ....

La mejor manera de encontrar *la suma de una serie* será aplicando fórmulas o técnicas abreviadas que reduzcan al mínimo las operaciones a realizar y que nos permitan no solo conocer la suma, sino, analizar la formación de sus términos.

I) METODO DE GAUSS

Se inspira en esta conocida propiedad: "*El orden de los sumandos no alteran la suma total*" y consiste en sumar el primero con el último de los sumandos, luego el segundo con el penúltimo y así sucesivamente, comprobando que estas *sumas parciales* por parejas, curiosamente resultan ser *iguales*. Este último detalle deberás descubrir antes de aplicar el presente método.

PROBLEMAS RESUELTOS (1RA PARTE)

1.- ¿Cuál es la suma de todos los números naturales desde 1 hasta 100?

A) 5 101 B) 5 665 C) 5 001 D) 5 050 E) 5 565

<u>Resolución</u>:

Escribimos los números en orden y sumamos por parejas:

$S = 1 + 2 + 3 +$ .... $+ 98 + 99 + 100$

(3 + 98) → 101
(2 + 99) → 101
(1 + 100) → 101

Es fácil deducir que con los 100 sumandos se formarán 50 parejas, las mismas que suman 101, de modo que el resultado pedido será 50 veces 101, esto es:

5 050 RPTA. D

NOTA: *El método debe su nombre a un hecho anecdótico que tuvo como protagonista al matemático Carl Friedrich Gaüss cuando era un niño de 10 años allá por el año 1787. El maestro de la escuela elemental a la que asistía mandó a sus discípulos (sin duda para tenerlos ocupados mucho rato) que calcularan la suma de todos los números del 1 al 100. Todos los estudiantes empezaron la laboriosa suma, excepto uno que no era otro que el niño Gaüss, quien al momento puso sobre la mesa del maestro su pizarra en la que él había escrito un único número: 5 050, que era la solución.*

2.- Hallar la suma de todos los números de dos cifras que sean múltiplos de 3.

A) 1 601 *B) 1 665* *C) 1 065* *D) 1 021* *E) 1 902*

Resolución:

Primero averiguamos qué números se van a sumar.

* Escribimos empezando por 3 y de 3 en 3 los múltiplos de 3 hasta el número mas grande de dos cifras, que es 99.

* De esta sucesión eligimos los que tienen dos cifras.

3; 6; 9; $\underbrace{12;\ 15;\ 18;\ \dots\dots\ ;\ 96;\ 99}_{\text{números que se van a sumar}}$

Luego averiguamos cuántos términos se van a sumar:

* Al contar de 3 en 3 hasta 99, tenemos : $\frac{99}{3} = 33$ números.

* Por tener solo una cifra, excluímos al 3, 6 y 9, entonces quedan:

33 - 3 = 30 términos

* Con 30 términos se formarán 30 ÷ 2 = 15 parejas y en seguida aplicamos el *método de Gaüss*.

← 30 términos →

$S = 12 + 15 + 18 + \dots\dots + 93 + 96 + 99$

18 + 93 = 111

15 + 96 = 111

12 + 99 = 111

$S = 111 \times 15 =$ **1 665** **RPTA. B**

OBSERVACION.- *La aplicación de este método se restringe a las series o progresiones aritméticas y además cuando el número de términos es par, para que así el número de parejas sea exacto. Al estudiar progresivamente otras técnicas, verás como se eliminan estas restricciones.*

II) SERIES ARITMÉTICAS

Recordemos que en estas series,cada término a partir del primero se puede obtener en base al anterior, a quien debemos sumarle un número fijo llamado *razón*. La mayoría de problemas con series aritméticas trata sobre tres o más de las siguientes cantidades:

Primer término	(a_1)
Ultimo término	(a_n)
Número de términos	(n)
Razón	(r)
Suma de todos los términos	(S)

Las fórmulas que relacionan a todas estas cantidades son:

$$a_n = a_1 + (n - 1).\, r \quad (1) \qquad n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1 \quad (2) \qquad S = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n \quad (3)$$

(1) Sirve para hallar el último término (término de lugar n).

(2) Sirve para hallar el número de términos.

(3) Sirve para hallar la suma de un determinado conjunto de términos correlativos de una serie.

PROBLEMAS RESUELTOS (2DA PARTE)

3.- ¿Cuál es la suma de todos los números impares comprendidos entre 100 y 200?

A) 7 200 *B) 7 300* *C) 7 500* *D) 7 700* *E) 7 900*

Resolución:

Escribimos los números que se van a sumar.

$S = 101 + 103 + 105 + 107 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 197 + 199$

Es evidente que la razón es: 103 - 101 = 2. Ahora para saber cuántos números se van a sumar aplicamos la relación (2) :

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1 = \frac{199 - 101}{2} + 1 = 50.$$

Y para sumar todos los términos, aplicamos la relación (3):

$$S = \left(\frac{a_n + a_1}{2}\right) n = \left(\frac{101 + 199}{2}\right) \times 50$$

$S = 7\,500$ RPTA. C

4.- ¿Cuántos números de tres cifras, comienzan en 3 y son múltiplos de 3? ¿Cúal es la suma de todos ellos ?

A) 28 ; 10 226   B) 25 ;11 203   C) 34 ;11 883   D) 42 ; 10 114   E) 18 ; 11 020

Resolución:

Escribimos la serie :

$$S = 300 + 303 + 306 + ... + a_n$$

De acuerdo con el enunciado del problema a_n debe tener 3 cifras, comenzar en 3, ser múltiplo de 3 y por ser el último , debe ser el mayor número con estas características, entonces $a_n = 399$.

Luego: $$n = \frac{399-300}{3} + 1 \Rightarrow \boxed{n = 34}$$

Finalmente : $$S = \left(\frac{300+399}{3}\right)\times 34 \Rightarrow \boxed{S = 11\ 883}$$

"La serie tiene 34 términos cuya suma es 11 883 "   RPTA. C

5.- Se empieza a escribir la serie de números impares positivos en forma descendente desde 69. El número de términos para que la suma sea igual a 1 000 es :

A) 11   B) 23   C) 17   D) 10   E) 20

Resolución:

Escribimos la serie en forma decreciente :

$$S = 69 + 67 + 65 + ... + u$$

Vemos que la razón es negativa : $r = 67 - 69 = -2$. Si a continuación la relación (2) la sustituimos en la relación (3), obtendremos:

$$S = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)\left(\frac{a_n - a_1}{r} + 1\right)$$

Aquí : $S = 1\ 000$; $a_1 = 69$; $a_n = u$, y , $r = -2$.

Reemplazando tendremos:

$$1\ 000 = \left(\frac{69+u}{2}\right)\left(\frac{u-69}{-2}+1\right)$$

Resolviendo esta ecuación, que tiene como única incógnita a u, hallaremos $u = 31$. De aquí es inmediato el cálculo de n:

$$n = \frac{31-69}{-2}+1 \Rightarrow \boxed{n = 20}$$ RPTA. E

6.- Determinar a + b + c , tales que la igualdad dada sea cierta:

$$1 + 4 + 7 + \dots\dots + (3n - 2) = an^2 + bn + c$$

A) 2 *B) 3* *C) 1* *D) 3* *E) 4*

Resolución:

La expresión $3n$ - 2 representa al término de lugar n, es decir la serie tiene n términos y por tanto tenemos que :

$$a_n = 3n - 2 \quad ; \quad a_1 = 1 \quad ; \quad r = 3$$

Aplicamos la fórmula (3) al lado izquierdo de la igualdad propuesta:

$$S = \left(\frac{1+3n-2}{2}\right)n = \frac{(3n-1)n}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{3}{2}n^2 - \frac{n}{2}$$

Ahora igualamos este resultado con la expresión de la derecha:

$$\frac{3}{2}n^2 - \frac{n}{2} = an^2 + bn + c$$

De donde por comparación reconocemos que: $a = \frac{3}{2}$; $b = -\frac{1}{2}$; $c = 0$

Y : $a + b + c = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 0 =$ **1** RPTA. C

III) SERIES ARIMÉTICAS NOTABLES

A) SUMA DE LOS "n" PRIMEROS NUMEROS NATURALES

$$1 + 2 + 3 + \dots\dots + n = n\left(\frac{n+1}{2}\right) \qquad (4) \; ; \quad a_n = n$$

B) SUMA DE LOS "n" PRIMEROS NUMEROS PARES:

$$2 + 4 + 6 + \dots\dots + 2n = n(n + 1) \qquad (5) \; ; \quad a_n = 2n$$

C) SUMA DE LOS "n" PRIMEROS NUMEROS IMPARES:

$$1 + 3 + 5 + \dots\dots + (2n - 1) = n^2 \qquad (6) \; ; \quad a_n = 2n - 1$$

Nótese que cada fórmula va acompañada de una expresión a_n que representa al término general de la serie. Esta expresión es importante pues relaciona directamente al último término con el número de términos.

PROBLEMAS RESUELTOS (3RA PARTE)

7.- Efectuar: $S = 1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 99$

A) 1 350 *B) 2 500* *C) 4 326* *D) 3 600* *E) 1 200*

Resolución:

Según la relación (6), basta con aplicar $S = n^2$, solo que el valor de n debe identificarse correctamente (n no es 99).

Hay que plantear esta igualdad: $99 = 2n - 1$, luego obtenemos $n = 50$ y finalmente:

$S = 50^2$ $\therefore$ $S = 2\ 500$ **RPTA. B**

8.- Hallar el valor "u" en la siguiente igualdad:

$2 + 4 + 6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u = 600$

A) 48 *B) 35* *C) 42* *D) 54* *E) 62*

Resolución:

Según la relación (5), $u = 2n$ y, la suma es: $n(n + 1)$. Entonces planteamos y resolvemos:

$n(n + 1) = 600$

$n(n + 1) = 24 \times 25$

Tenemos que $n = 24$ y entonces $u = 2(24)$

$\therefore$ $u = 48$ **RPTA. A**

9.- Hallar la suma de los 20 primeros múltiplos de 5.

A) 2 150 *B) 890* *C) 1 050* *D) 1 020* *E) 990*

Resolución:

Los múltiplos de 5 forman la sucesión: 5; 10; 15; .... que escrita como serie se puede presentar así:

$S = 5 \times 1 + 5 \times 2 + 5 \times 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 5 \times 20$

$S = 5(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 20)$ Aquí se aplica la fórmula (4)

$S = 5 \times \dfrac{20 \times 21}{2}$ $\Rightarrow$ $S = 1\ 050$ **RPTA. C**

10.- Hallar la suma de todos los números que forman este triángulo, sabiendo que contiene 33 filas.

$$\begin{array}{c} 3 \\ 3+3 \\ 3+3+3 \\ 3+3+3+3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

A) 1 586 *B) 1 683* *C) 378* *D) 586* *E) 1 986*

Resolución:

Sumando los términos de cada fila, se obtienen los resultados parciales: 1ª Fila = 3 ; 2ª Fila = 6 ; 3ª Fila = 9 ; hasta llegar a la fila **33** que vale: 33 × 3 = 99. De este modo la suma total estará dada así:

$$S = 3 + 6 + 9 + \ldots\ldots + 99$$

$$S = 3(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 33)$$

La suma entre paréntesis se puede hallar con la relación (4):

$$S = 3 \times \frac{33 \times 34}{2} \Rightarrow S = 1\,683$$ **RPTA. B**

11.- A y B leen una novela de 3 000 páginas: A lee 100 páginas diarias y B lee 10 páginas el primer día, 20 el segundo, 30 el tercero y así sucesivamente. Si ambos comienzan a leer el 1ro de Mayo.¿En qué fecha llegarán a la misma página?

A) El 23 de Junio *B) El 4 de Junio* *C) El 19 de Mayo*

D) El 13 de Mayo *E) El 13 de Junio*

Resolución:

Las sumas de páginas leídas por A y B se definen así:

$$A = \underbrace{100 + 100 + 100 + \ldots\ldots}_{n \text{ términos}} = 100n$$

$$B = \underbrace{10 + 20 + 30 + \ldots\ldots + 10n}_{n \text{ términos}} = 10(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

$$B = 10 . \frac{n(n+1)}{2} = 5n(n+1)$$

Cuando lleguen a la misma página, estas sumas se igualarán:

$$5n(n+1) = 100n$$

$$n + 1 = 20 \Rightarrow n = 19 \text{ días}$$ **RPTA. C**

IV) SERIES DE ORDEN SUPERIOR

A) SUMA DE CUADRADOS

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots\dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (7) \qquad a_n = n^2$$

B) SUMA DE CUBOS

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots\dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad (8) \qquad a_n = n^3$$

C) SUMA DE POTENCIAS BINARIAS

$$2^1 + 2^3 + 2^3 + \dots\dots\dots\dots + 2^n = 2^{n+1} - 2 \qquad (9) \qquad a_n = 2^n$$

PROBLEMAS RESUELTOS (4TA PARTE)

12.- Efectuar: *1 + 4 + 9 + 16 + ... + 576*

A) 2 890 *B) 3 690* *C) 4 209* *D) 5 340* *E) 4 900*

Resolución:

Se trata de una suma de cuadrados, donde : $576 = 24^2$.

Luego la suma se puede escribir así:

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots\dots + 24^2 \quad ; \quad n = 24$$

Y según la fórmula (7), tendremos:

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{24(25)(49)}{6}$$

$S = 4\,900$ RPTA. E

13.- Efectuar: *1 + 8 + 27 + ... + 3 375*

A) 14 400 *B) 12 300* *C) 13 200* *D) 11 800* *E) 13 800*

Resolución:

Escribiendo la serie en forma de potencias, aplicamos la relación 8:

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 15^3$$

$$S = \left[\frac{15(16)}{2}\right]^2 \Rightarrow S = 14\,400 \quad \text{RPTA. A}$$

14.- Hallar el valor de la siguiente suma.

$$S = 2 + 6 + 12 + 20 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 600$$

A) 2 200 *B) 3 200* *C) 3 200* *D) 4 200* *E) 5 200*

Resolución:

En una primera transformación, la suma se puede escribir así:

$$S = 1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + 4\times5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 24\times25$$

En una segunda transformación tendríamos:

$$S = 1\,(1 + 1) + 2\,(2 + 1) + 3(3 + 1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + 24\,(24 + 1)$$

$$S = 1^2 + 1 + 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 24^2 + 24$$

$$S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 24^2) + (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 24)$$

Las dos sumas obtenidas se pueden hallar con las fórmulas (4) y (7):

$$S = \frac{24\times25\times49}{6} + \frac{24\times25}{2}$$

$$S = 4\,900 + 300 \Rightarrow S = 5\,200. \quad \text{RPTA. E}$$

15.- ¿Cuántos términos debe tener como mínimo la serie mostrada para que la suma sea mayor que 1 000?

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

A) 9 *B) 8* *C) 7* *D) 6* *E) 10*

Resolución:

A partir del 2do término tenemos una suma de potencias binarias que se puede reducir a una expresión más pequena si utilizamos la relación (9):

$$S = 1 + (2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots\ldots + 2^n)$$

$$S = 1 + 2^{n+1} - 2 = 2^{n+1} - 1.$$

Con $n = 8$, tenemos: $S = 511$; y con $n = 9$, tenemos $S = 1\,023$

Entonces la suma S es mayor que 1 000 a partir de $n = 9$, esto quiere decir que la suma original tiene como mínimo **10 términos.**

RPTA. E

MISCELANEA

16.- Si A y B representan las sumas respectivas de los pares positivos e impares positivos no mayores que 1 000, calcular A - B.

A) 501 *B) 500* *C) 499* *D) 999* *E) 1 000* *UNMSM - 90*

Resolución:

Se trata de estas sumas:

$$A = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots\dots\dots + 1\,000$$

$$B = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots\dots\dots + 999$$

Cada una tiene 500 términos que se pueden restar entre si:

$$A - B = (2 - 1) + (4 - 3) + (6 - 5) + \dots\dots\dots + (1\,000 - 999)$$

$$\underbrace{1+1+1+\dots\dots+1}_{500 \text{ sumandos}} = \boxed{500}$$

RPTA. B

17.- Para que se cumpla:

24 + 22 + 20 +............... = 150

La serie debe tener:

(1) 15 términos ***(2) 12 términos*** ***(3) 10 términos***

Son ciertas:

A) Sólo 1 *B) Sólo 3* *C) 1 y 2* *D) 1 y 3* *E) 2 y 3* *PUCP 92 - II*

Resolución:

Notamos que: 24 = 26 - 2 ; 22 = 26 - 4 ; 20 = 26 - 6, luego, el término general de la serie será: $a_n = 26 - 2n$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{24 + 26 - 2n}{2} \cdot n = n\,(25 - n)$$

Sabemos que esta suma debe valer 150, entonces:

$$n\,(25 - n) = 150$$

Esta igualdad se cumple para $n = 15$ y $n = 10$ RPTA. D

18.- Al simplificar la expresión: $E = \sqrt[42]{(1+3+5+........+49)^{0,1+0,2+0,3+.......+2}}$

Se obtiene:

A) 5 *B)* $\sqrt{5}$ *C) 25* *D) 0,25* *E) 35* **UNMSM 90**

Resolución:

Sumamos por partes:

Exponentes $= \dfrac{1}{10}+\dfrac{2}{10}+\dfrac{3}{10}+ .... + \dfrac{20}{10} = \dfrac{(20\times 21)\div 2}{10} = 21$

Base $= 1 + 3 + 5 + ... + 49 = 25^2$

Entonces : $E = \sqrt[42]{(25^2)^{21}} =$ **25** RPTA. C

19.- Entre los kilómetros 23 y 107, donde hay estaciones de servicio, se quiere intercalar seis más, dispuestas proporcionalmente en el recorrido, ¿En cuál de los siguientes kilómetros está la sexta estación?

A) 36 *B) 46* *C) 58* *D) 83* *E) 70* **PUCP 93 - I**

Resolución:

Aparte de 23 y 107 debe haber 6 términos más, esto quiere decir que son 8 términos, con $a_1 = 23$; $a_8 = 107$; de aquí se deduce la razón:

$$a_8 = a_1 + 7r$$

$$107 = 23 + 7r \Rightarrow r = 12$$

Ahora, $a_6 = a_1 + 5r = 23 + 5(12) =$ **83** RPTA. D

20.- Dada la sucesión: 1 ; 2 ; -3 , 4 , 5 , -6 , 7 , 8 , -9 , ... entonces la suma de sus cien primeros términos es:

A) 1 864 *B) 1 560* *C) 1 584* *D) 1 684* *E) 1 060* **UNMSM 91**

Resolución:

Reduciremos la serie tomando sus términos de 3 en 3, obteniéndose:

$$S = (1 + 2 - 3) + (4 + 5 - 6) + (7 + 8 - 9) + ... + (97 + 98 - 99) + 100$$

$$S = (0) + (3) + (6) + ... + (96) + 100$$

$$S = (3\times 1 + 3\times 2 + ... + 3\times 32) + 100 = 3\times \frac{32\times 33}{2} + 100$$

S = 1 684 RPTA. D

21.- La suma de todos los números de la forma 3k + 2 para k = 1; 2; 3; ......; n es:

A) $\frac{n(3n+7)}{2}$ B) $\frac{n(3n-7)}{2}$ C) $\frac{3n+2}{2}$ D) $\frac{3n-2}{2}$ E) N.A. UNFV 89

Resolución:

Por dato: $a_k = 3k + 2$; de aquí hallamos $a_1 = 5$, y , $a_n = 3n + 2$

Luego: $S = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n = \frac{5+3n+2}{2}n = \frac{n(3n+7)}{2}$ RPTA. A

22.- El 1er término de una P.A. es "n" el número de términos "n" y la razón "n". Calcular la suma.

A) $\frac{n(n+1)}{2}$ B) $\frac{n^2(n+1)}{2}$ C) $\frac{n(n-1)}{2}$ D) $\frac{n^2(n+1)}{4}$ E) n (n - 2) PUCP 93 - I

Resolución:

$a_1 = n$; $r = n$ $\Rightarrow$ $a_n = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1).r = n + (n - 1).n = n^2$

Luego: $S = \left(\frac{n+n^2}{2}\right)n = \frac{n^2(n+1)}{2}$ RPTA. B

23.- Calcular el valor de $\frac{a+2c}{b+d}$, si:

33 sumandos	3	3	3	3	3	3	3	+
		3	3	3	3	3	3	
			3	3	3	3	3	
				....				
					3	3	3	
						3	3	
							3	
				d	c	b	a	

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 9 UNALM 91

Resolución:

Sumando por separado las últimas columnas, encontramos:

$33 \times 3 = 99$; $32 \times 3 = 96$; $31 \times 3 = 93$; $30 \times 3 = 90$

Sumamos:

$$\begin{array}{r} 99 + \\ 96 \\ 93 \\ 90 \\ \hline ..00359 \end{array}$$

Entonces:

$a = 9$; $b = 5$; $c = 3$; $d = 0$

$$\frac{a+2c}{b+d} = \frac{9+6}{5+0} = \boxed{3}$$

RPTA. D

24.- La serie 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; .... consta de 20 términos y la serie 3; 5; 7; 9; 11 .... tiene 30 términos ¿Cuántos términos de las dos series son iguales?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13 PUCP 91 - II

Resolución:

La serie 3, 6, 9, ... tiene como último término $a_{20} = 60$

La serie 3, 5, 7, ... tiene como último término $a_{30} = 61$

Los términos de la primera serie son múltiplos de 3, luego en ambas series serán iguales aquellos números impares de la segunda serie que sean a la vez múltiplos de 3:

3; 9; 15; 21; 27; 33; 39; 45; 51; 57 **10 términos** RPTA. B

25.- Una progresión aritmética está formada del 4 al 55. La suma de los 6 primeros números es 69, de los 6 siguientes es 177 y la suma de los 6 últimos es 285. El segundo y el décimo término de la progresión será:

A) 7 y 31 B) 10 y 34 C) 10 y 28 D) 13 y 37 E) 8 y 32 UNMSM 94

Resolución:

Como son 18 términos: $a_1 = 4$ y $a_{18} = 55$. Luego podemos hallar r, ya que:

$55 = 4 + 17r \Rightarrow r = 3$

Finalmente: $a_2 = 4 + r = 7$ y $a_{10} = 4 + 9r = \boxed{31}$ RPTA. A

26.- Hallar el valor de la siguiente serie : S = 3 + 8 + 13 + 18 + ... + 503

A) 24 558 B) 23 475 C) 24 586 D) 25 553 E) 26 780

Resolución:

Primero determinamos la razón : $r = 8 - 3 = 5$, y luego hallamos el número de términos (n) :

$$n = \frac{503-3}{5} + 1 = 101$$

Enseguida aplicamos la fórmula que nos da la suma de la suma de los n primeros términos :

$$S = \frac{t_1 + t_n}{2} \cdot n$$

$$S = \left(\frac{3+503}{2}\right) . 101 = \boxed{25\,553}$$ RPTA. D

27.- El segundo término de una P. A. es 7 y el séptimo término es 22; hallar la suma de los 10 primeros términos.

A) 175 B) 176 C) 177 D) 178 E) 179

Resolución:

Entre $t_2 = 7$ y $t_7 = 22$, la diferencia será $5r$, es decir, $22 - 7 = 5r$, de donde, $r = 3$

Luego $t_1 = 7 - r = 4$, y la serie es : $4 + 7 + 10 + \ldots\ldots\ldots + t_{10}$

Ahora calcularemos t_{10} , que es igual a : $t_{10} = t_1 + 9r = 4 + 9 . 3 = 31$

Entonces la suma de los 10 primeros términos estará dada por :

$$S = \left(\frac{4+31}{2}\right) . 10 = \boxed{175}$$ RPTA. A

28.- Hallar la suma de los 15 primeros términos de una serie aritmética cuyo término central es 24.

A) 330 B) 340 C) 350 D) 360 E) 370

Resolución:

Sabemos que en una serie aritmética con número impar de términos, hay un término central que es igual a la semisuma de los extremos, luego :

$$t_c = \frac{t_1 + t_n}{2} \quad \Rightarrow \quad S = t_c \cdot n$$

En este problema, conocemos que : $t_c = 24$ y $n = 15$

Luego : $S = 24 . 15 = \boxed{360}$ RPTA. D

29.- Calcular la suma de los 100 primeros términos de : 1 ; 2 ; 3 - 4 ; 5 ; 6 ; 7 - 8 ; 9 ; 10 ; 11 - 12 ....

A) 2 640 B) 2 650 C) 2 660 D) 2 670 E) 2 680

Resolución:

Podemos hallar la suma de los 100 primeros números naturales, como si todos fueran positivos, pero debemos restar dos veces la suma de 4 ; 8 ; 12 ; .... ; 96 para que tengamos el

valor deseado. Asi:

$$S = S_1 - 2S_2$$

Donde : $S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots + 100 = \dfrac{100\cdot101}{2} = 5\,050$

$S_2 = 4 + 8 + 12 + \ldots\ldots\ldots + 96 = \dfrac{4+96}{2}\,.\,24 = 1\,200$

$\therefore \quad S = 5\,050 - 2\,.\,1\,200 = \boxed{2\,650}$ **RPTA. B**

30.- Calcular : $2 + 6 + 12 + 20 + \ldots\ldots + 210$

A) 1 000 B) 1 110 C) 1 120 D) 1 130 E) 1 140

Resolución:

Podemos notar qué forma tiene cada término :

$$t_1 = 1\times 2 \;;\; t_2 = 2\times 3 \;;\; t_3 = 3\times 4 \;;\; \ldots\ldots \;;\; t_n = 14\times 15$$

De aquí es evidente que $n = 14$. Ahora, debemos recordar que :

$$1\times 2 + 2\times 3 + \ldots\ldots\ldots + n\,(n+1) = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}$$

De donde tendremos que : $S = \dfrac{14\cdot(15)\,(16)}{3} = \boxed{1\,120}$ **RPTA. C**

31.- En el siguiente triángulo numérico, hallar la suma de los elementos de la fila número 20.

						1						
					1		1					
				2		1		2				
			3		3		3		3			
		4		6		6		6		4		
	5		10		10		10		10		5	
6		15		15		15		15		15		6
						⋮						

A) 3 113 B) 3 114 C) 3 115 D) 3 116 E) 3 117

Resolución:

A partir de la 3ra fila, observamos :

Fila 3 : $S = 2 + T_1 + 2$

Fila 4 : $S = 3 + T_2 + T_2 + 3$

Fila 5 : $S = 4 + T_3 + T_3 + T_3 + 4$

....

Donde T_1 ; T_2 ; T_3 , son los primeros números triangulares, es decir :

$$T_1 = 1 \quad ; \quad T_2 = 1 + 2 = 3 \quad ; \quad T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

Entonces en la fila 20 :

$$S = 19 + T_{18} + T_{18} + \ldots\ldots + T_{18} + 19 = 38 + 18 \,.\, T_{18}$$

$$S = 38 + 18\,(1 + 2 + \ldots\ldots + 18) = 38 + 18 \,.\, \left(\frac{18 \cdot 19}{2}\right)$$

$\therefore$ $S = 3\ 116$ RPTA. D

32.- Calcular : $S = 1 \times 19 + 2 \times 18 + 3 \times 17 + \ldots\ldots + 19 \times 1$

A) 1 300 *B) 1 305* *C) 1 310* *D) 1 320* *E) 1 330*

Resolución:

Haciendo una inspección de los primeros términos reconocemos que :

$$T_1 = 1 \times 19 = 1\,(20 - 1)$$
$$T_2 = 2 \times 18 = 2\,(20 - 2)$$
$$T_3 = 3 \times 17 = 3\,(20 - 3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Según esto , podemos establecer que :

$$S = 1\,(20 - 1) + 2\,(20 - 2) + 3\,(20 - 3) + \ldots\ldots + 19\,(20 - 19)$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas, tendremos :

$$S = 1 \,.\, 20 - 1^2 + 2 \,.\, 20 - 2^2 + 3 \,.\, 20 - 3^2 + \ldots\ldots + 19 \,.\, 20 - 19^2$$

$$S = 20\,(1 + 2 + \ldots\ldots + 19) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + 19^2)$$

$$S = 20 \,.\, \frac{19 \cdot 20}{2} - \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6}$$

$$S = 3\ 800 - 2\ 470 = 1\ 330$$ RPTA. E

33.- Dados : $S_1 = 10 \times 11 + 11 \times 12 + 12 \times 13 + \ldots\ldots + 20 \times 21$

$S_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots\ldots + 20 \times 21$

hallar : $S_2 - S_1$

A) 5 310 *B) 5 410* *C) 5 510* *D) 5 610* *E) 5 710*

Resolución:

Sabemos que la suma de los n productos consecutivos está dada por : $n\,(n + 1)\,(n + 2)/\,3$

Por lo tanto : $S_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots\ldots + 20 \times 21 = \dfrac{20 \times 21 \times 41}{3} = 5\ 740$

Ahora, reconocemos que : $S_1 = S_2 - (1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + 9 \times 10)$

$$S_1 = S_2 - \frac{9\times10\times11}{3} = 5\,740 - 330 = \boxed{5\,410} \quad \text{RPTA. B}$$

34.- Calcular la suma de los infinitos términos dados : $\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{2}{7^6} + ...$

A) 3/16 *B) 4/17* *C) 5/18* *D) 6/19* *E) 7/20*

Resolución:

Cuando una progresión es geométrica y decreciente, sabemos que :

$$S = \frac{t_1}{1-r} \text{ ; donde } r \text{ es la razón.}$$

Haciendo una rápida inspección de la serie dada , notamos que hay dos progresiones :

$$S_1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^5} + ... = \frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7^2}} = \frac{7}{48}$$

$$S_2 = \frac{2}{7^2} + \frac{2}{7^4} + \frac{2}{7^6} + ... = \frac{\frac{2}{7^2}}{1-\frac{1}{7^2}} = \frac{2}{48}$$

Entonces : $S = S_1 + S_2 = \frac{9}{48} = \boxed{\frac{3}{16}}$ RPTA. A

35.- Calcular "S" : $S = \frac{1}{5\times10} + \frac{1}{10\times15} + \frac{1}{15\times20} + ... + \frac{1}{100\times105}$

A) 1/5 *B) 2/50* *C) 3/100* *D) 4/205* *E) 4/105*

Resolución:

Podemos reconocer que : $\frac{1}{5\times10} = \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{1\times2}$; $\frac{1}{10\times15} = \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2\times3}$

Entonces : $S = \frac{1}{25}\left[\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + ... + \frac{1}{20\times21}\right]$

Aquí debemos recordar que la serie entre paréntesis tiene una suma que está dada por :

$$\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Es así que : $S = \frac{1}{25}\left[\frac{20}{21}\right] = \boxed{\frac{4}{105}}$ RPTA. E

36.- Se contrata a un obrero para cavar en busca de fósiles , prometiéndole pagar una suma por el primer fósil que encuentre y que luego se le irá duplicando dicha suma por cada nuevo fósil encontrado. Si encuentra 12 fósiles y recibe en total 12 285 soles. ¿Cuánto le pagaron por el quinto fósil hallado?

A) 46 ***B) 47*** ***C) 48*** ***D) 49*** ***E) 50***

Resolución:

Sea "a" la primera suma, luego las demás serán:

$a \cdot 2 = a \cdot 2^1$; $a \cdot 4 = a \cdot 2^2$; ...etc., y la décimosegunda suma es : $a \cdot 2^{11}$

Como en total recibe S/. 12 285 , podemos plantear :

$$a + a \cdot 2 + a \cdot 2^2 + \ldots\ldots\ldots + a \cdot 2^{11} = 12\,285$$

$$a\left[1+2+2^2+\ldots\ldots+2^{11}\right] = 12\,285$$

Sabemos que la suma de las n potencias de 2 está dada por : $2^{n+1} - 2$; luego :

$$a\left[2^{12}-1\right] = 12\,285 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

Luego por el quinto le pagaron : $a \cdot 2^4 = 3 \cdot 2^4 =$ **48** RPTA. C

37.- Rosa y María leen una novela de 3 000 páginas. Rosa lee 100 páginas diarias y María lee 10 páginas el 1er día, 20 el 2do día, 30 el tercero y así sucesivamente. Si ambas comienzan el 22 de febrero de un año bisiesto. ¿En qué fecha coincidirán en llegar a la misma página y cuántas páginas habrán leído hasta ese día?

A) 10 de Febrero ; 1 800 páginas

B) 11 de Marzo ; 1 900 páginas

C) 21 de Abril ; 2 000 páginas

D) 10 de Mayo; 2 100 páginas

E) 15 de Junio ; 2 200 páginas

Resolución:

Rosa lee 100 páginas diarias durante n días, entonces : $R = 100 + 100 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 100 = 100n$

María lee de 10 en 10 en el mismo período : $\text{María} = 10 + 20 + 30 + \ldots\ldots\ldots + 10 \cdot n$

$$\text{María} = 10 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Igualandoambas expresiones , tendremos : $100\,n = 5\,n\,(n+1)$

$$\therefore\ n = 19$$

De acuerdo con este resultado podemos decir que las dos coincidirán 19 días después del 22 de Febrero , es decir : El 11 de Marzo, y hasta dicha fecha habrán leído : 100 . 19 = 1 900 páginas.

11 de Marzo ; 1 900 páginas RPTA. B

38.- Se reparten caramelos a un grupo de niños en cantidades que forman una sucesión aritmética. Al séptimo niño le tocó la mitad de lo que le tocó al último y a éste el quíntuplo de lo que le tocó al primero ¿Cuántos niños son?

A) 17 *B) 27* *C) 37* *D) 47* *E) 57*

Resolución:

En primer lugar reconocemos que : $t_1 = a$; $t_7 = a + 6r$; $t_7 = a + (n - 1) . r = 5a$

Según la condición del problema, al séptimo le toco la mitad de lo que le tocó al último , luego :

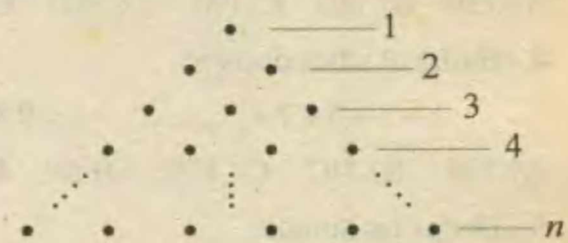
$$a + 6r = \frac{5a}{2} \Rightarrow a = 4r \text{ , ó , } r = \frac{a}{4}$$

Entonces : $a + (n - 1) . \frac{a}{4} = 5a$

Simplificando : $1 + (n - 1) . \frac{1}{4} = 5$

Resolviendo : $n = 17$ RPTA. A

39.- Se tiene 120 canicas para formar un triángulo mediante filas, de modo que la primera fila tenga uno, la segunda dos, la tercera tres y así sucesivamente. ¿Cuántas filas tendrá dicho triángulo?



A) 11 *B) 12* *C) 13* *D) 14* *E) 15*

Resolución:

Si en total, en el arreglo triangular hay 120 canicas, planteamos :

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n = 120$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 120$$

$$\Rightarrow n = 15$$ RPTA. E

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Hallar la suma de todos los números pares positivos menores que 100.

A) 2 550 B) 2 450 C) 4 900

D) 5 100 E) 5 250

2.- ¿Cuál es la suma de todos los números impares de dos cifras?

A) 5 100 B) 2 750 C) 2 475

D) 2 525 E) 2 550

3.- ¿Cuántas campanadas da un reloj en un día si señala cada hora con igual número de campanadas y cada media hora con una campanada?

A) 156 B) 180 C) 190 D) 200 E) 144

4.- Hallar el valor de u en:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u = 9\,801$$

A) 199 B) 197 C) 179 D) 99 E) N.A

5.- Dadas las sumas:

$$A = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + 576$$
$$B = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 69$$
$$C = 3 + 7 + 11 + 15 + \ldots\ldots + u$$

¿Para qué valor de "u" se cumple: $A = B + C$?

A) 99 B) 39 C) 139 D) 144 E) 135

6.- ¿Cuál es la suma de los 40 primeros múltiplos de 5?

A) 4 100 B) 4 095 C) 3 100

D) 2 200 E) N.A

7.- Hallar el valor exacto de la suma mostrada:

```
          1 +
        1 2
      1 2 3
    1 2 3 4
    . . . .
. . . . . . .
1 2 3 . . . 9
-------------
. . . . . . .
```

A) 131 747 505 D) 133 417 215

B) 137 174 205 E) otro valor

C) 134 717 225

8.- Sabiendo que:

$$A = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 50$$
$$B = 1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + 69$$

Hallar $A - B$.

A) 2 B) 22 C) 32 D) 42 E) 50

9.- ¿Cuántas números menores que 100, poseen la cifra 4 ? ¿Cuál es la suma de todos ellos?

A) 19 ; 931 B) 19 ; 189 C) 20 ; 985

D) 19 ; 891 E) 20 ; 953

10.- Dos tortugas participan en una carrera. La primera recorre todos los días 4 *metros* y la segunda recorre el primer día 1 *metro* y cada día recorre un *metro* más que el día anterior. Si ambas tortugas parten en el mismo día y llegan simultáneamente. ¿Cuántos días duró la carrera?

A) 10 B) 4 C) 8 D) 7 E) 6

11.- ¿Cuántos términos tiene la siguiente serie?

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 120$$

A) 40 B) 18 C) 15 D) 45 E) 12

12.- ¿Cuántos términos tiene esta serie?

$$9 + 12 + 15 + 16 + 21 + 20 + \ldots\ldots\ldots + 64$$

A) 30 B) 42 C) 36 D) 18 E) 28

13.- ¿Cuántos términos deben considerarse para que la suma :

$$208 + 210 + 212 + \ldots\ldots\ldots$$

Sea igual a 5 038 ?

A) 32 B) 18 C) 20 D) 22 E) 40

14.- Un caminante recorrió 100 *metros* el primer día, 200 *metros* el segundo día, 300 *metros* el tercer día y así sucesivamente. Luego de unos días, llegó a un pueblo que distaba

del punto de salida 32 500 *metros*. ¿Cuántos días estuvo caminando?

A) 25 B) 12 C) 35 D) 45 E) 15

NIVEL B

15.- La suma de los "n" primeros números naturales es un número de cifras iguales de la forma $\overline{aaa}$. ¿Cuál es el valor de $n + a$?

A) 40 B) 41 C) 42 D) 43 E) 44

16.- Efectuar:

$$4 + 16 + 36 + 64 + \dots + 2\,304$$

A) 16 900 B) 19 600 C) 57 600

D) 56 7000 E) N.A

17.- Luis reparte 1 900 caramelos entre sus 25 sobrinos. A cada uno le entrega 3 caramelos más que al anterior. ¿Cuántos caramelos correspondieron al primero y cuántos al último?

A) 60 y 132 B) 36 y 108 C) 51 y 85

D) 40 y 112 E) 51 y 85

18.- Hallar el valor de "u" si:

$$89 + 87 + 85 + \dots + u = 1\,400$$

A) 41 B) 29 C) 65 D) 33 E) 51

19.- Calcular la suma de los 25 primeros términos de la serie:

$$S = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - \dots$$

A) 325 B) -325 C) 625 D) 175 E) -175

20.- Calcular:

$$S = 1\times3 + 2\times4 + 3\times5 + 4\times6 + \dots + 20\times22$$

A) 3 290 B) 2 930 C) 2 870

D) 8 720 E) N.A

21.- Efectuar considerando los 100 primeros términos de esta serie:

$$S = 1 + 3 + 2 + 2 + 6 + 4 + 3 + 9 + 6 + \dots$$

A) 2 800 B) 2 900 C) 3 290

D) 3 400 E) 3 500

22.- Hallar la suma de los términos de la siguiente progresión aritmética:

$$S = 2 + \dots + 17 + \dots + 44$$

Si se sabe que el número de términos que hay entre 2 y 17 es la mitad de los que hay entre 17 y 44.

A) 345 B) 346 C) 347 D) 348 E) 349

23- Una persona tiene que pagar una deuda de 3 600 *dólares* en 40 pagos mensuales que forman una progresión aritmética. Cuando ya había pagado 30 de las mensualidades convenidas, quedaba una tercera parte de la deuda por pagar, entonces, el importe del primer pago en dólares fue:

A) 41 B) 51 C) 61 D) 71 E) 31

24.- El siguiente esquema formado por números impares se extiende hasta completar 20 filas.

1

3 5

7 9 11

13 15 17 19

. . . .

. . . .

Se pide hallar:

a) La suma de los términos de la última fila.

b) La suma de todos los términos.

A) 1 440 ; 2 200 D) 7 200 ; 14 400

B) 5 600 ; 18 000 E) 400 ; 2 420

C) 8 000 ; 44 100

25.- Si : "m" es un número impar. ¿Cuál será la suma de los 10 primeros impares consecutivos que siguen a : $5m + 1$?

A) $25m + 70$ B) $50m + 90$ C) $50m + 100$

D) $50m + 105$ E) $50m + 110$

26.- Calcular la suma de la fila 50 :

$$1 \longrightarrow \text{Fila}: 1$$
$$3+5 \longrightarrow \text{Fila}: 2$$
$$7+9+11 \longrightarrow \text{Fila}: 3$$

A) 9 750 B) 1 250 C) 2 500
D) 75 200 E) 125 000

27.- Un caño malogrado dá un día 63 gotas y cada día que transcurre a partir de ese día da dos gotas menos que el día anterior. ¿Cuántos días goteará el caño y cuántas gotas dará en total?

A) 32 ; 1 024 B) 32 ; 512 C) 64 ; 512
D) 32 ; 768 E) 64 ; 1 024

28.- Calcular la siguiente serie aritmética de 32 sumandos :

$$S = \overline{a1} + \overline{a3} + \overline{a5} + \overline{a7} + ... + \overline{a9}$$

A) 1 983 B) 1 348 C) 1 984
D) 1 982 E) 1 974

29.- Hallar el valor de "S"

$$S = 2+5+10+17+......+2\,501$$

A) 42 000 B) 42 900 C) 42 500
D) 42 950 E) 42 975

NIVEL C

30.- A lo largo de un camino había un número impar de *piedras*, a 10 *metros* una de la otra. Se debía juntar estas *piedras* en el lugar donde se encontraba la *piedra* central. El hombre encargado podía llevar una sola *piedra*, empezó por uno de los extremos y las trasladaba sucesivamente. Al recoger todas las *piedras* el hombre caminó 3 *kilómetros*. ¿Cuántas piedras había en el camino?

A) 29 B) 17 C) 41 D) 13 E) 25

31.- ¿Cuántos *términos* hay que considerar en las dos sumas siguientes para que tengan el mismo valor?

$$S_1 = 1+2+3+4+............$$

$$S_2 = 100+98+96+94+................$$

A) 54 B) 72 C) 67 D) 100 E) 50

32.- Se reparten 4 050 caramelos entre cierto número de niños de modo que el primero recibe 2, el segundo recibe 4, el tercero recibe 6 y así sucesivamente ¿cuántos caramelos sobran?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) N.A

33.- N bolas iguales se han apilado en forma de pirámide triangular regular. Si en la última base había 300 bolas ¿cuál es el valor de N ?

A) 1 200 B) 2 400 C) 2 500
D) 2 600 E) 3 000

34.- Dados los conjuntos de enteros consecutivos:

$$\{1\}; \{2;3\}; \{4;5;6\}; \{7;8;9;10\}; ....$$

Donde cada conjunto contiene un elemento más que el precedente. Sea S_n la suma de los elementos del n-ésimo conjunto, luego S_{21} será igual a:

A) 1 113 B) 4 641 C) 5 082
D) 53 361 E) N.A

35.- Se tiene las siguientes sucesiones :

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 3 ; 5$$
$$S_3 = 7 ; 9 ; 11$$
$$S_4 = 13 ; 15 ; 17 ; 19$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Hallar la suma de los 3 últimos términos de S_{34}

A) 4 273 B) 4 177 C) 3 617
D) 3 561 E) 3 291

36.- Un comerciante compra el día de hoy 21 cajas de tomates y ordena que cada día que transcurra se compre una caja más que el día

anterior. ¿Cuántas cajas compró en total, si el penúltimo día, se compraron 39 cajas?

A) 720 B) 625 C) 610 D) 540 E) 490

37.- Hallar el valor de "S" :

$$S = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \ldots\ldots\ \infty$$

A) 1/9 B) 2/9 C) 3/11 D) 5/81 E) 1/6

38.- Los números x , $x + 4$, $x + 16$ .... son los tres primeros términos consecutivos de una progresión geométrica. Hallar la suma de sus 10 primeros términos.

A) 2 401 B) 59 048 C) 1 728

D) 14 400 E) 25 326

39.- Una persona debe vaciar un balde con agua a cada uno de los 20 árboles que están sembrados en fila y separados uno del otro 8*m*. Si la persona en cada viaje solo puede llevar un balde con agua y el pozo donde sacará el agua está a 10*m* del primer árbol. ¿Qué distancia habrá recorrido después de haber terminado con su tarea y haber vuelto el balde donde está el pozo?

A) 2 960 B) 3 440 C) 2 560

D) 4 280 E) 5 120

40.- En el siguiente arreglo triangular calcular la suma de los términos de F_{20} :

$F_1 \rightarrow$ 1

$F_2 \rightarrow$ 4 9

$F_3 \rightarrow$ 16 25 36

$F_4 \rightarrow$ 49 64 81 100

$F_{20} \rightarrow$ ________________

A) 22 160 B) 15 482 C) 602 610

D) 804 670 E) 8 840

41.- Calcular el término "*n*-ésimo" y además la suma hasta dicho término en :

$$2 ; 6 ; 12 ; 20 ; 30 ; 42 ; ....$$

A) $\dfrac{2n\ ;\ (n+1)\ n+2)}{3}$

B) $2n\ \dfrac{n\ ;\ (n+1)\ (n+2)}{6}$

C) $n\,(n+1)\ ;\ \dfrac{n\ ;\ (n+1)\ (n+2)}{3}$

D) $n^2 + \dfrac{n}{2}\ ;\ \dfrac{n(n+1)}{2}$

E) $\dfrac{n^2}{2} + n\ ;\ \dfrac{n(n+2)}{6}$

42.- Hallar "S" :

$$S = \frac{9}{20} + \frac{18}{80} + \frac{36}{320} + \frac{72}{1\,280} + \ldots\ \infty$$

A) 3/20 B) 3/10 C) 9/10

D) 81/20 E) 16/90

43.- Hallar el resultado de efectuar la siguiente sumatoria, sabiendo que tiene 100 sumandos.

$$S = 5 + 6 + 7 + 9 + 9 + 12 + 11 + 15 + \ldots\ldots$$

A) 6 235 B) 6 575 C) 3 245

D) 6 675 E) 6 655

44.- ¿Cuántas cifras se emplearon para escribir a todos los términos de la secuencia :

$$100^{59}\ ;\ 100^{60}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 100^{299}\ ;\ 100^{300}\ ?$$

A) 1 512 B) 1 411 C) 1 613

D) 1 712 E) 1 913

45.- Claudio se propone leer una novela diariamente, el primer día lee 3 páginas, el segundo días lee 8 páginas, el tercer día 15 páginas, el cuarto día 24 páginas y así sucesivamente hasta que cierto día se da cuenta que el número de páginas que ha leído ese día es 14 veces el número de días que ha estado leyendo. Hallar el número de páginas leídas en dicho día.

A) 166 B) 167 C) 168 D) 169 E) 170

NUMEROS TRIANGULARES

Los números triangulares son los de la forma : $\dfrac{n(n+1)}{2}$

La razón de su nombre se debe a que ellos expresan el número de puntos o elementos dispuestos en una red triangular, tal como la muestra el esquema de la *Fig.* 1.

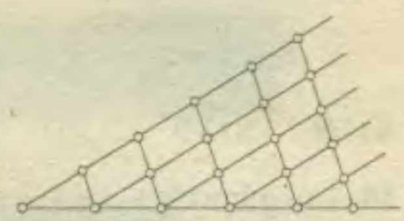


Fig. 1

Como es claro, si en esta red hay n filas de puntos, el número de puntos será :

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

como queda dicho.

Según esto, los primeros números triangulares serán : 1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 21 ; 28 ; 36 ; 45;... y pueden contarse en el esquema adjunto.

NÚMEROS TRIANGULO - PIRAMIDALES.-

Estos números aparecen al contar el número de balas esféricas (o de naranjas) dispuestos en una pirámide de la siguiente forma : la base de esta pila se forma colocando en una fila n bolas ; a su lado, y en el mismo plano horizontal, otra segunda fila de $(n - 1)$ bolas; después otra que contenga una bola menos; y así sucesivamente hasta poner una sola.

De este modo resulta un triángulo equilátero, que tendrá un número de objetos expresado por el número triangular de orden n, esto es :

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Sobre esta base se coloca otra capa o lecho triangular, pero cuyo lado tenga n - 1 bolas; y así sucesivamente hasta terminar en el vértice con una sola bola. El número total de elementos amontonados en la pila será el n-ésimo *número triángulo-piramidal.* Su expresión es la siguiente :

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Por lo tanto los primeros números triángulo-piramidales son :

1 ; 4 ; 10 ; 20 ; 35 ; 46 ; ...

Estos números se muestran en el esquema de la *Fig.* 2.

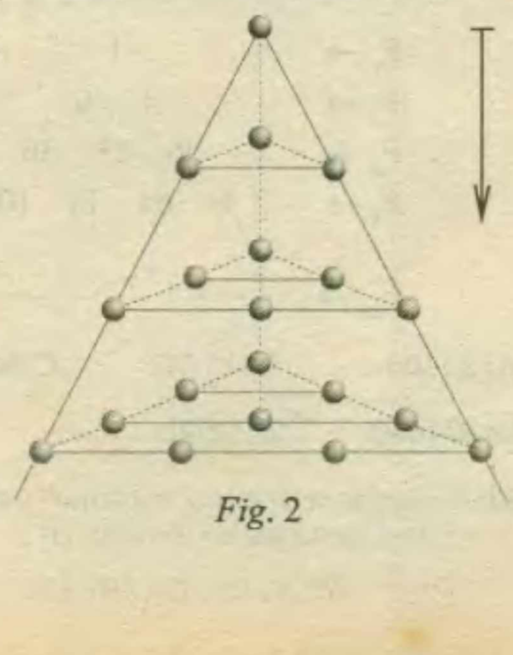


Fig. 2

6 Números y Figuras

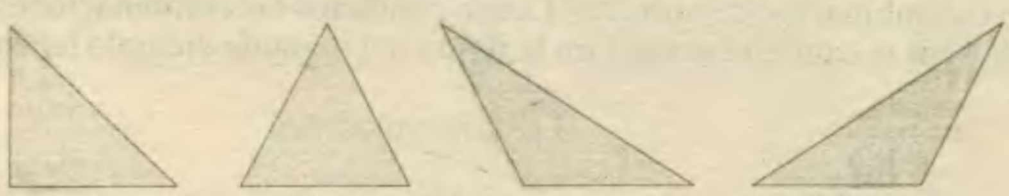
La facultad de observación y percepción de cambios en muchas situaciones visuales está unida con la lógica, y la memoria. Es necesario por eso, plantearse este tipo de situaciones, tales como las que aparecen en esta lista preliminar:

- *Comparar dos objetos para notar si son idénticos.*
- *Encontrar un objeto oculto, basándose en un modelo.*
- *Enumerar y contar el conjunto de objetos observados.*
- *Descubrir el trazado de un recorrido oculto.*
- *Elegir un recorrido óptimo entre varias rutas disponibles,* etc.

Para algunos de estos problemas se dispone de ciertos métodos sistemáticos o algunas fórmulas preestablecidas, mientras que para otros solo podemos contar con nuestra intuición e imaginación para obtener la solución. Haremos entonces un estudio por separado de los casos que se conocen.

I) CONTEO DE FIGURAS

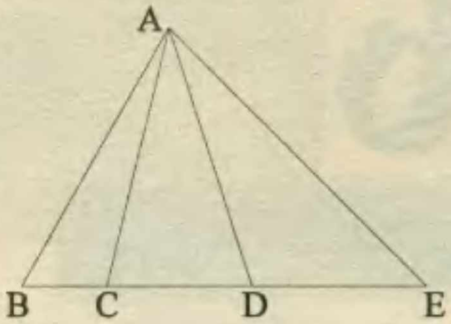
Las figuras *a*, *b*, *c* y *d* presentan todas ellas una misma característica, la de ser triángulos, pero no son idénticos, pues se diferencian en sus tamaños y en sus ángulos, sin embargo esto no nos debe importar.



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

Si queremos contar triángulos, solo nos interesará la forma de esta figura. Este es el principio fundamental de estos problemas.

Ejemplo. ¿Cuántos triángulos se pueden observar en la siguiente figura?

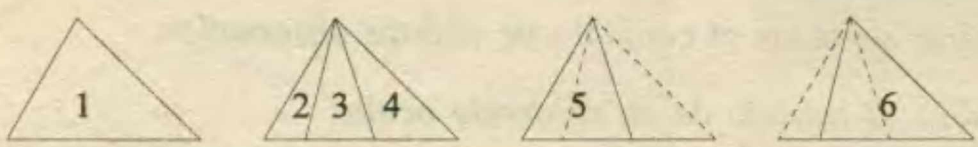


<u>Resolución</u>:

Podemos contar de dos formas

1ra) Si utilizamos los vértices para identificarlos tendremos los siguientes triángulos: *ABE*; *ABC*; *ACD*; *ADE*; *ABD* y *ACE*.

2da) Si solo observamos y utilizamos nuestra memoria, registramos estas imagenes:

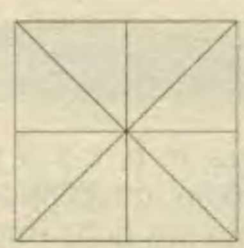


Los números indican los 6 triángulos reconocidos.

Pero, existe algún modo sistemático de contar estas figuras ?.

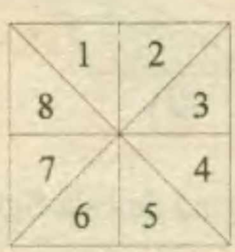
Para encontrarlo podemos proponer ahora la siguiente situación:

Ejemplo: ¿Cuántos triángulos hay en esta figura?



<u>Resolución</u> (Método combinatorio)

El presente método consiste en anotar un número o símbolo en cada una de las partes de la figura, de modo que cada nueva figura que detectemos quede asociada a un número o combinación de números.Luego contamos las combinaciones anotadas y el resultado será la cantidad pedida.En la figura del segundo ejemplo tenemos:



Los triángulos son:

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8

12; 34; 56; 78

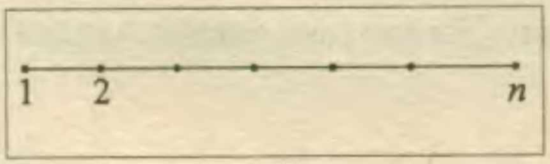
1 234; 5 678; 7 812; 3 456

En total : 16 triángulos.

I) FÓRMULAS PARA CASOS NOTABLES

A) SEGMENTOS SOBRE UNA LINEA

Figura modelo:



Fórmula:

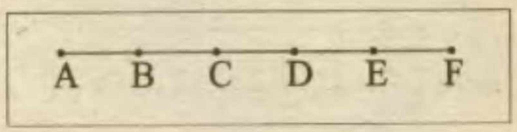
$$\#s = \frac{n(n-1)}{2}$$

$\#s$=N$^{\underline{o}}$ de segmentos

n: # ptos. sobre la línea.

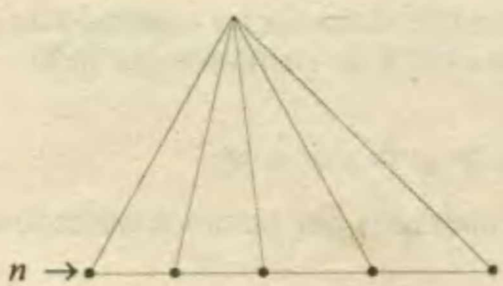
En la figura se nota que $n = 6$, por lo tanto habrá : $\frac{6\times5}{2} = 15$ segmentos.

A manera de comprobación, con el método combinatorio tenemos:



$$\left.\begin{matrix} AB; BC; CD; DE; EF \\ AC; BD; CE; DF \\ AD; BE; CF \\ AE; BF \text{ y } AF \end{matrix}\right\} 15 \text{ segmentos}$$

B) TRIANGULOS SOBRE UNA LINEA



Fórmula:

$$\# t = \frac{n(n-1)}{2}$$

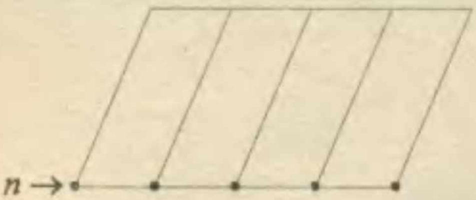
$\# t$ = N$^{\underline{o}}$ de triángulos

n: # de puntos sobre la base.

En la figura mostrada : $n = 5$, y , $\#t = \frac{5\times4}{2} = 10$.

Observación.- *No debe sorprendernos que esta última fórmula sea idéntica a la de contar segmentos, porque en efecto, cada segmento contado en la base corresponde a un triángulo observado.*

C) CUADRILATEROS SOBRE UNA LINEA



Fórmula:

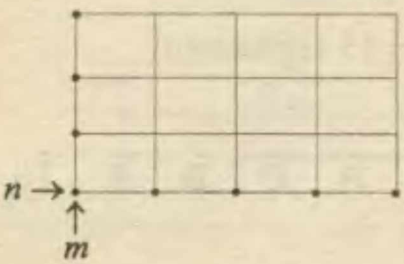
$$\# c = \frac{n(n-1)}{2}$$

$\# c$ = Nº de cuadriláteros

n = # ptos. en la base

Para la figura modelo, $n = 5$ y hay $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ cuadriláteros.En este caso, también hay una analogía con la fórmula de segmentos. ¿Porqué?

D) CUADRILATEROS EN UN ENREJADO



Fórmula:

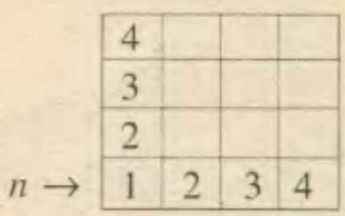
$$\# c = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{m(m-1)}{2}$$

n = # puntos en la base.

m = # puntos sobre un lado.

Vemos que $n = 5$ y $m = 4$, entonces tenemos: $\frac{5 \times 4}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 10 \times 6 = 60$ cuadriláteros.

E) CUADRADOS EN UN CUADRADO



Fórmula:

$$\# \square s = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$$

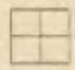
La figura modelo debe ser un cuadrado de $n \times n$ donde n es el # de casilleros por lado.

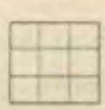
Para $n = 4$

$\# \square s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$

Para comprobar este resultado, podemos contar los cuadrados por tamaños notándose que hay 4 tamaños diferentes.

De 1 × 1  → 16 cuadrados ó 4^2

De 2 × 2  → 9 cuadrados ó 3^2

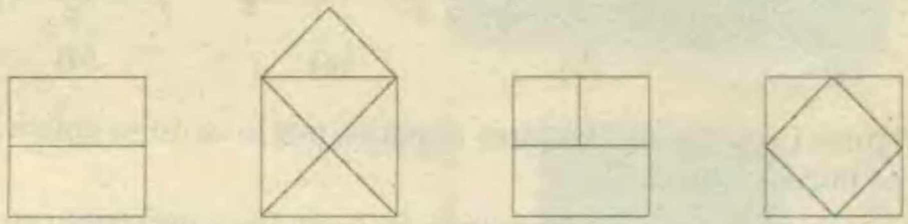
De 3 × 3  → 4 cuadrados ó 2^2

Y la figura completa o cuadrado de 4 × 4, entonces tenemos:

$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ cuadrados.

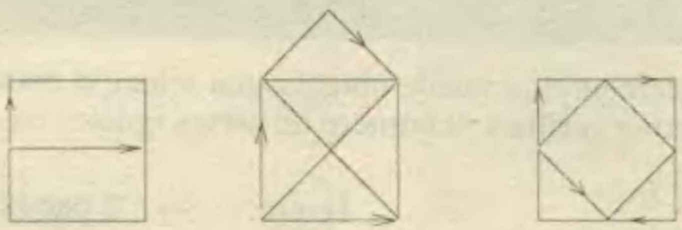
III) FIGURAS DE TRAZO CONTINUO

Es posible dibujar figuras con trazo continuo, esto es, sin recorrer dos veces la misma línea y sin levantar el lápiz del papel, con otras resulta imposible hacerlo. Por ejemplo ¿Cuántas de las figuras siguientes se pueden dibujar con un trazo continuo?



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

Solo las figuras a, b y d se pueden dibujar de un solo trazo como se ve en las figuras siguientes:



La figura c es imposible trazarla, a menos que se repita un segmento. Las razones se basan en una teoría que se conoce desde la época de Leonard Euler (1759) y de la cual extraemos algunos principios.

REGLAS DE EULER

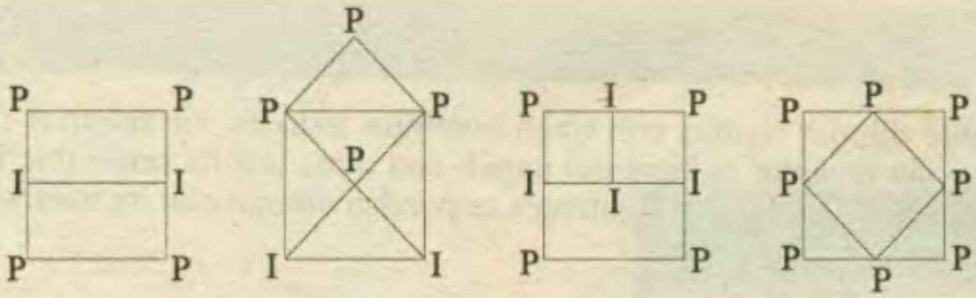
Antes de todo se llama **PAR** al punto en que concurren un número par de segmentos, e **IMPAR** cuando dicho número es impar.

1ª Si la figura tiene solamente puntos pares, podrá dibujarse de un solo trazo, comenzando en cualquier punto y terminando en el mismo punto (figura *d*)

2ª Si la figura tiene no más de 2 puntos impares entonces el recorrido debe comenzar en uno de ellos y terminar en el otro (figuras a y b).

3ª Si la figura tiene más de dos puntos impares, entonces el recorrido de un solo trazo es imposible.

APLICACION: Volvamos a las figuras anteriores, mostrando los puntos pares (P) e impares (I) que las conforman y verificando que la regla de Euler se cumple en cada caso.

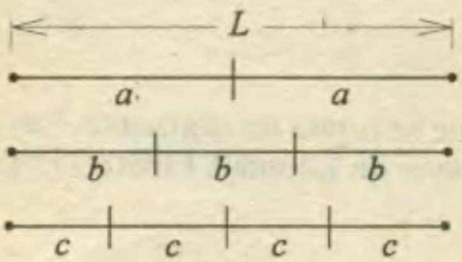


(a) (b) (c) (d)

- En las figuras (a) y (b) hay 2 puntos impares, por lo tanto se aplica la regla 2 y se deduce que sí se puede dibujar.
- En la figura (c) hay 4 impares y según la 3ª regla es imposible su trazado.
- En (d) todos son pares y según la 1ª regla ,sí se puede su trazado.

IV) SOBRE CORTES Y POSTES

Por inducción elemental se puede obtener una relación entre el número de cortes que se debe aplicar a una varilla y el número de partes iguales en que quedará dividida.



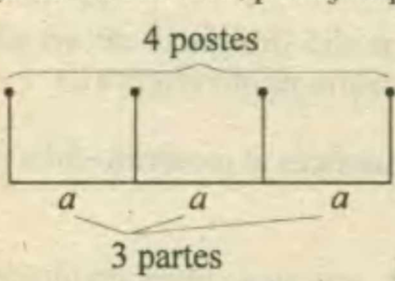
1 corte → 2 partes

2 cortes → 3 partes

3 cortes → 4 partes

En general: **# cortes = pares - 1**

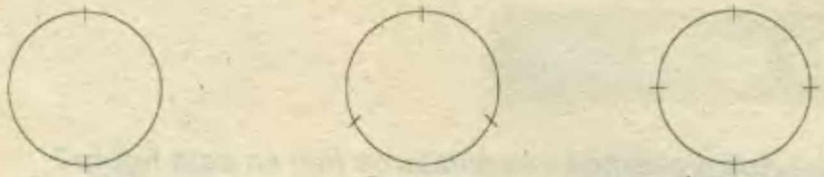
Una relación parecida se establece por analogía cuando se colocan postes o estacas a lo largo de un camino, por ejemplo:



postes = # partes + 1

En cualquier caso se cumple: $$\textbf{\# partes} = \frac{\textit{Longitud total}}{\textit{Longitud de una parte}}$$

Cuando los cortes se hacen sobre una longitud cerrada, como por ejemplo una circunferencia, la relación entre cortes y partes es aún más sencilla:



2 cortes 2 partes | 3 cortes 3 partes | 4 cortes 4 partes

$\# \text{ cortes} = \# \text{ partes}$

Ejemplo sobre cortes:

A una soga de longitud L se le hacen 9 cortes y se obtienen pedazos de 5 *metros* cada uno. ¿Cuántos cortes deben hacerse para conseguir partes del mismo tamaño en una soga de longitud $2L$?

Resolución:

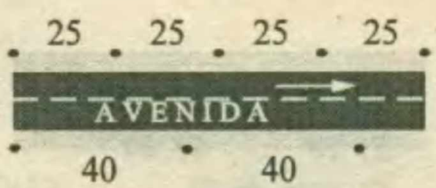
Para la soga de longitud L: $9 = \# \text{ partes} - 1$
De aquí se deduce que son 10 partes y $L = 10 \times 5 = 50$.
La otra soga es de longitud $2L = 100$ y si queremos partes de 5 *metros* cada una, debemos hacer:

$$\frac{100}{5} - 1 = 20 - 1 = \textbf{19 cortes}$$ **RPTA**

Ejemplo de postes:

Se electrificó una avenida de 400 *metros* de largo de modo que los postes en una acera están ubicados cada 25 *metros* y en la otra acera cada 40 *metros*. ¿Cuántas postes se usaron?

Resolución:



En la 1ª acera:

$$\# \text{ postes} = \frac{400}{25} + 1 = 17$$

En la 2ª acera: $\# \text{ postes} = \frac{400}{40} + 1 = 11$

En total se usaron: $17 + 11 =$ **28 postes** **RPTA**

PROBLEMAS RESUELTOS

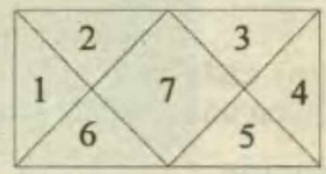
1.- ¿Cuántos triángulos y cuántos cuadriláteros hay en esta figura?



A) 10 - 6 *B) 12 - 10* *C) 12 - 12*
D) 10 -10 *E) 12 - 6*

Resolución:

Por el método combinatorio, hacemos una lista de las figuras observadas:

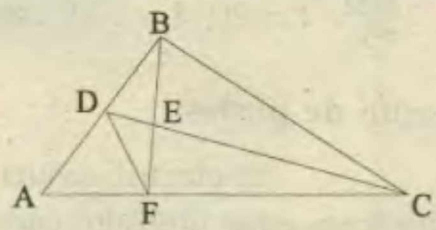


Triángulos: 1; 2; 3; 4; 5; 6;
(12) 12; 16; 34; 45; 273 y 675

Cuadrilateros: 7; 27; 37; 67; 57; 275; 376; 12675;
(12) 12673; 67345; 23457; 1234567 RPTA. C

2.- La mitad del número de segmentos de recta que se representan en la figura es:

A) 5 *B) 6* *C) 7*
D) 8 *E) 9* *UNFV 88*



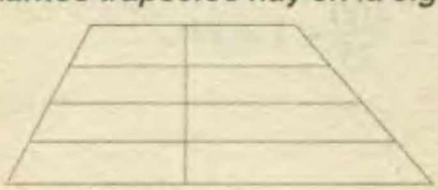
Resolución:

En AB: 3 segmentos ; en AC: 3 segmentos

En CD: 3 segmentos ; en BF: 3 segmentos

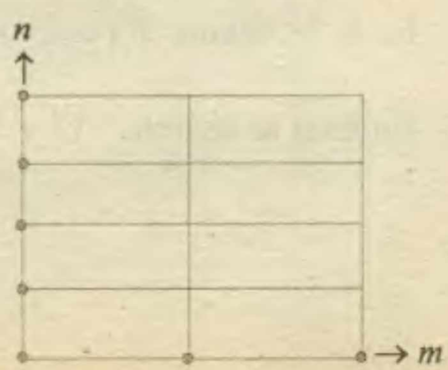
Además con DF y BC hacen $3 \times 4 + 2 = 14$ segmentos. Finalmente la mitad del número de segmentos existentes es 7. RPTA. C

3.- ¿Cuántos trapecios hay en la siguiente figura?



A) 25 *B) 28* *C) 30*
D) 32 *E) más de 25* *PUCP 91 - II*

Resolución:

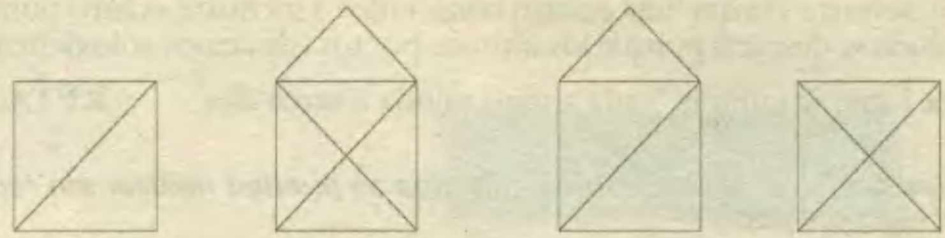


Si distorsionamos ligeramente la figura, vemos que se trata de un *enrejado* y contar los trapecios es como contar cuadriláteros.

Por fórmula: $\# c = \dfrac{3 \times 2}{2} \times \dfrac{5 \times 4}{2}$

$\# c = 30$ RPTA. C

4.- ¿Cuáles de las figuras adjuntas se pueden dibujar sin pasar el lápiz dos veces por la misma recta y sin levantarlo del papel?



I *II* *III* *IV*

A) Solo I ***B) Solo II*** ***C) Solo I y II*** ***D) I, II y III*** ***E) Todas***

Resolución:

Según las reglas de Euler no se podrá dibujar solo la IV porque esta figura tiene más de dos puntos impares (en realidad tiene 4).
Las otra figuras (I, II, III) sí se pueden. **I, II, III** RPTA. D

5.- Si un sólido de forma cúbica de un metro de lado se divide en cubitos de un milímetro de lado, entonces ¿qué altura alcanzará una columna formada por todos los cubitos, unos encima de otros?

A) 100 km ***B)10 km*** ***C) 1 km*** ***D) 3 km*** ***E) 1 000 km*** ***UNMSM 90***

Resolución:

Altura de un cubito = 1 *mm*

Para hallar el número de cubitos , dividimos el volumen total entre el volumen de un cubito.

$$\#\text{ cubitos} = \frac{1m\times 1m\times 1m}{1mm\times 1mm\times 1mm} = 1\,000\times 1\,000\times 1\,000$$

Altura alcanzada en *mm* = 1 000 × 1 000 × 1 000

en *metros* = 1 000 × 1 000

en *kilómetros* = 1 000. RPTA. E

6.- En los siguientes gráficos, cada nudo representa un amigo y cada segmento que los une es el saludo entre dos amigos. ¿Cuál de los gráficos significa "cada amigo saluda a otras dos?

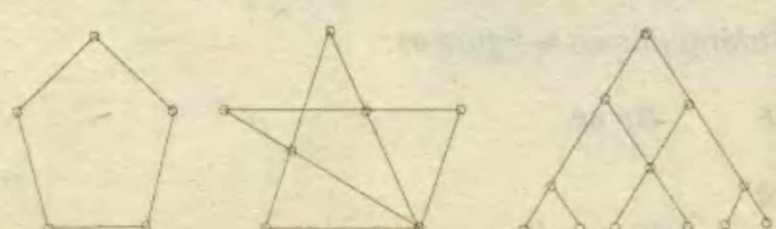
A) Solo III

B) I y III

C) Solo I

D) I, II, y III

E) N.A



I II III

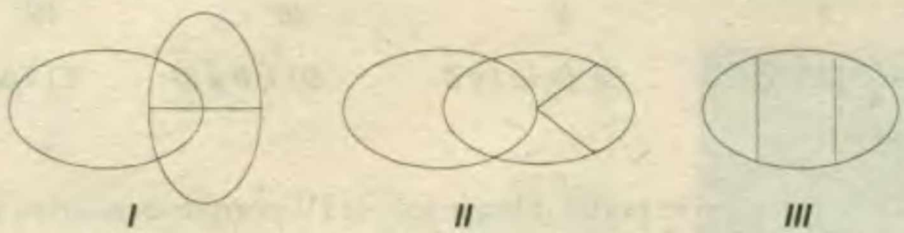
UNALM 92

Resolución:

La figura II se descarta porque hay puntos conectados a inclusive cuatro puntos vecinos. La figura III también se descarta porque los últimos puntos (de abajo) solo tienen una conexión.

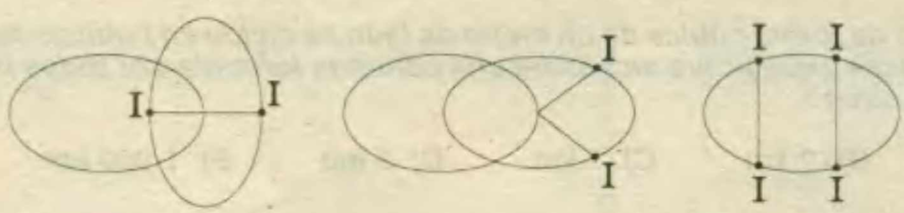
Es en la figura I que se cumple "cada amigo saluda a otros dos" **RPTA. C**

7.- ¿Cuál de los gráficos de los dibujos adjuntos se pueden realizar sin repetir el trazo, ni levantar el lápiz del papel?



A) Solo I ***B) Solo II*** ***C) Solo I y II*** ***D) Solo II y III*** ***E) N.A***

Resolución:



Las figuras I y II tienen dos puntos impares, entonces si se pueden dibujar .

La figura III tiene 4 impares, por tanto no se puede dibujar. **RPTA. C**

8.- Un comerciante tiene una pieza de paño de 60 metros de longitud que quiere cortar en trozos de 1 metro. Necesita 5 segundos para hacer cada corte. ¿Cuánto tarda en cortar toda la pieza?

A) 295 s ***B) 300 s*** ***C) 285 s*** ***D) 305 s*** ***E) 290 s*** ***UNMSM 94***

Resolución:

La pieza de tela es de 60 *metros* y cada trozo es de 1 *metro* por lo tanto el número de partes es 60.

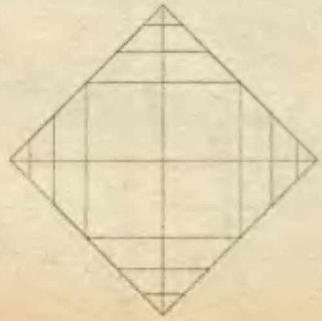
$\#$ de cortes $= 60 - 1 = 59$

Tiempo para hacer los cortes $= 59 \times 5 =$ **295 *s*.** **RPTA. A**

9.- El número de triángulos en la figura es:

A) 40 ***B) 46*** ***C) 48***

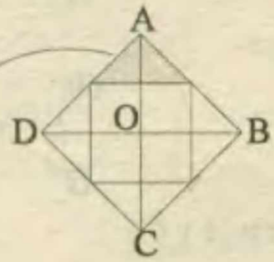
D) 36 ***E) 44***



UNMSM 90

Resolución:

* En esta zona hay 9 triángulos.
* En los 4 vértices habrá 9 × 4 = 36 triángulos

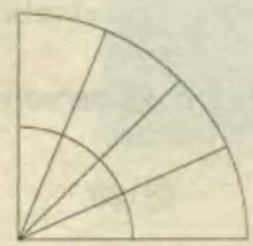


Quedan por contar los triángulos:

ABO; BOC; COD; DOA; ABC; ADC; DBA; DBC.

El # total será 36 + 8 = **44 triángulos.** RPTA. E

10.- ¿Cuántos sectores circulares hay en la figura?

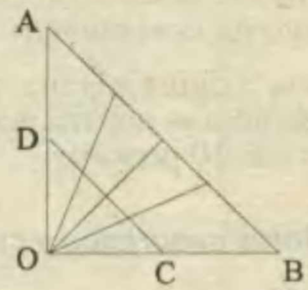


A) 18 *B) 20* *C) 22*

D) 24 *E) N.A*

Resolución:

El problema es análogo al de contar triángulos en la figura "adaptada"

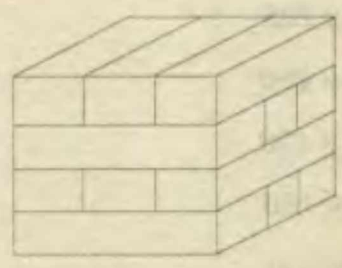


1) En *AOB* habrá : $\frac{5\times4}{2}=10$

2) En *DOC* también: $\frac{5\times4}{2}=10$

En total 10 + 10 = **20** RPTA. B

11.- Utilizando doce piezas iguales se arma el sólido mostrado. ¿Cuántas piezas están en contacto con por lo menos otras ocho?



A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución:

Están en contacto con otras ocho, dos piezas; las centrales de la 2^{da} y 3^{ra} plataformas.

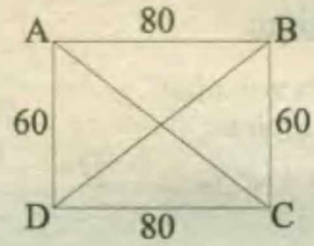
Si observas con atención, cada una está en contacto con las tres de arriba, las tres de abajo y las dos de los costados.

RPTA. B

12.- En un terreno rectangular de 60 metros de ancho y 80 metros de largo, se plantan árboles en el perímetro y en las diagonales, espaciados 10 metros. ¿Cuántos árboles hay?

A) 45 *B) 46* *C) 47* *D) 48* *E) 50* ***PUCP 92 - II***

<u>Resolución:</u>



Después de aplicar el teorema de Pitágoras, la diagonal mide 100. Los árboles del perímetro son:

$$\frac{280}{10} = 28$$

A lo largo de la diagonal AC : $\frac{100}{10} - 1 = 9$ (sin contar A y C)

En la diagonal BD también habrá 9 árboles (sin contar B y D). En total tenemos :

$$28 + 9 + 9 - 1 = 45 \qquad \text{RPTA. A}$$

(Se resta 1 porque se contó dos veces el árbol en el cruce de las diagonales)

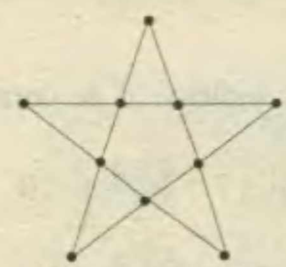
13.- ¿Cuál es el menor número de personas que deben ser dispuestas en 5 filas de 4 personas cada una?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 16 E) 12 UNFV 88

<u>Resolución:</u>

Aparentemente la solución es : $4 \times 5 = 20$ personas, sin embargo no es el número que buscamos.

Observando la figura adjunta, si cada punto es una persona y cada línea es una fila, tendremos que la solución mínima es con 10 personas.



RPTA. A

14.- ¿Cuántos cuadrados y cuántos cuadriláteros se pueden observar en esta figura?

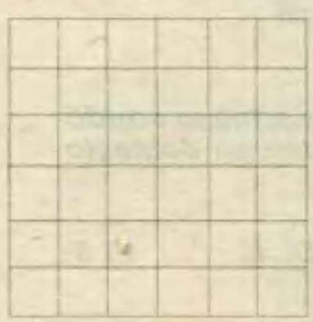
A) 50 y 125

B) 55 y 225

C) 75 y 250

D) 30 y 100

E) 55 y 150



<u>Resolución:</u>

Cuadrados: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

Cuadriláteros: $\frac{6\times5}{2} \times \frac{6\times5}{2} = 15 \times 15 = 225$ RPTA. B

15.- ¿Cuántas cerillas se necesitan para formar las 15 primeras figuras de esta secuencia?

A) 150 B) 225 C) 375

D) 300 E) más de 400

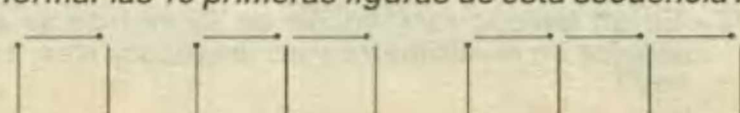


Fig. 1 *Fig.* 2 *Fig.* 3

Resolución:

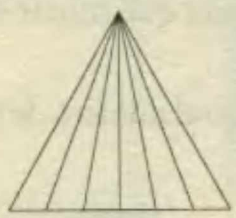
El número de cerillas está en P.A de razón 3

$$N = 4 + 7 + 10 + ... + \mu$$

El último término es $\mu = 4 + 14r = 46$; luego :

$$N = \left(\frac{4+46}{2}\right).\ 15 = 25 \times 15 = \boxed{375}$$ **RPTA. C**

16.- ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



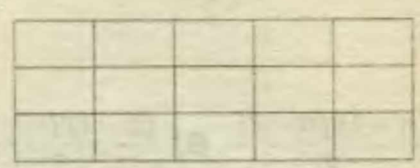
A) 21 ***B) 31*** ***C) 42*** ***D) 16*** ***E) 12***

Resolución:

En la base de la figura notamos que hay : $n = 7$ puntos, luego el número de triángulos está dado por la fórmula :

$$\#\ \Delta_s = \frac{n\ (n-1)}{2} = \frac{7(6)}{2} = \boxed{21}$$ **RPTA. A**

17.- ¿Cuántos rectángulos hay en la siguiente figura :

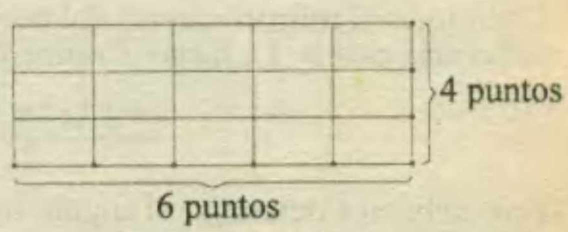


A) 30 ***B) 45*** ***C) 70***

D) 85 ***E) 90***

Resolución:

En la base del rectángulo hay $n = 6$ puntos y en uno de sus lados verticales hay $m = 4$ puntos. Luego, podemos aplicar la fórmula del enrejado :

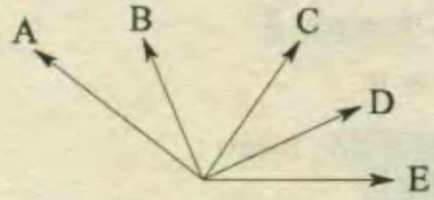


$$\#\ \text{rectángulos} = \frac{n\ (n-1)}{2} \cdot \frac{m\ (m-1)}{2}$$

$$= \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2}$$

$$= 15\ .\ 6 = \boxed{90}$$ **RPTA. E**

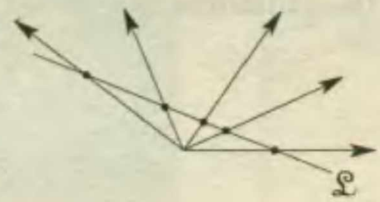
18.- ¿Cuántos ángulos menores que 180º se pueden contar en la figura?



A) 1 *B) 5* *C) 10* *D) 15* *E) 20*

Resolución:

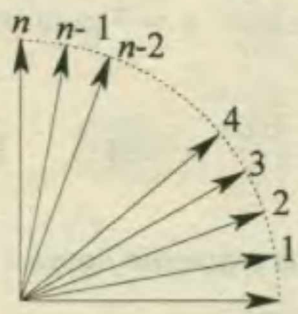
Si a la figura dada la hacemos cortar por una recta tal que cruce a todas las semirectas, se observará que contar ángulos equivale a contar triángulos.



Sobre $\mathfrak{L}$ se observan $n = 5$ puntos, luego el número de ángulos estará dado por :

$$\frac{n\,(n-1)}{2} = \frac{5\cdot(5-1)}{2} = \boxed{10} \qquad \text{RPTA. C}$$

19.- ¿Cuántos ángulos agudos hay en la siguiente figura?



A) $\frac{(n+1)(n-2)}{2}$ *B)* $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ *C)* $\frac{(n-2)(n+5)}{1}$ *D)* $\frac{(n-2)(n+6)}{4}$ *E)* $\frac{(n+8)(n-4)}{4}$

Resolución:

Utilizando el mismo criterio del problema anterior, diremos que el número de puntos de referencia es $n + 1$; luego el número de ángulos estará dado así :

$$\frac{(n+1)\ (n+1-1)}{2} = \frac{n\ (n+1)}{2}$$

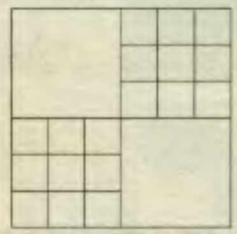
Pero debemos descontar el ángulo recto del cuadrane, porque queremos determinar solo el número de ángulos agudos. Entonces :

$$\#\ \measuredangle_s \text{ agudos} = \frac{n\ (n+1)}{2} - 1$$

Efectuando operaciones : $$\#\ \measuredangle_s \text{ agudos} = \frac{n\ (n+1)-2}{2} = \frac{n^2+n-2}{2}$$

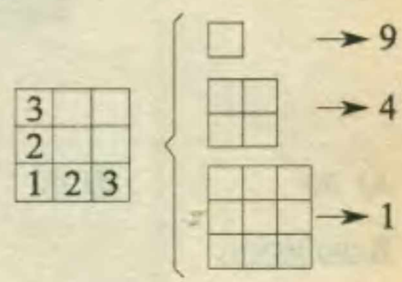
Factorizando encontramos : $\# \measuredangle_s$ agudos $= \dfrac{(n+1)\,(n-2)}{2}$ **RPTA. A**

20.- ¿Cuántos cuadrados se pueden observar en la figura?



A) 15 *B) 21* *C) 25* *D) 31* *E) 37*

<u>Resolución</u>:



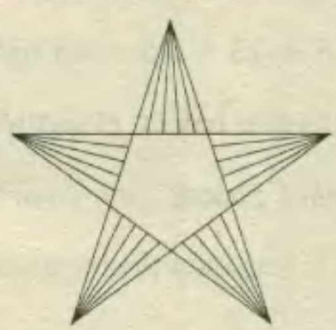
Primero contamos los cuadrados para la parte que estamos separando , donde se puede apreciar 1 cuadrado formado por 9 cuadriculas, 4 cuadrados formados por 4 cuadriculas y 9 cuadrados formados por 1 cuadricula:

$$\# \text{ de } \square_s = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

Entonces en total, en la figura completa, tenemos :

$$\# \text{ de } \square_s = 14 + 14 + 3 = \boxed{31}$$ **RPTA. D**

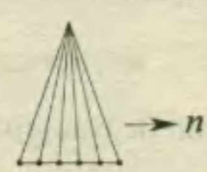
21.- ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



A) 41 *B) 51* *C) 61* *D) 71* *E) 81*

<u>Resolución</u>:

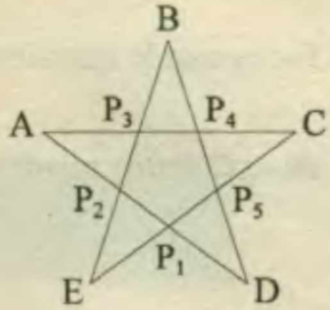
Contamos los triángulos en una de las puntas : $n = 6$



$$\# \text{ de } \Delta_s = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Análogamente, observamos que las demás puntas tienen las siguientes cantidades de puntos :

$n = 4$; $n = 6$; $n = 5$ y $n = 5$



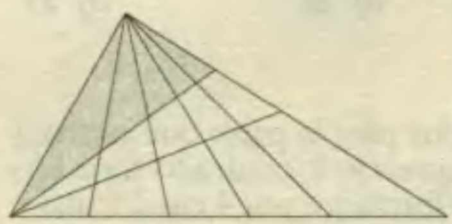
de Δ_s en las puntas $= 15 + \dfrac{4 \cdot 3}{2} + \dfrac{6 \cdot 5}{2} + \dfrac{5 \cdot 4}{2} + \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 56$

A continuación identificamos a los demás triángulos en la estrella :

ACP_1 ; BDP_2 ; ..... ; BEP_5

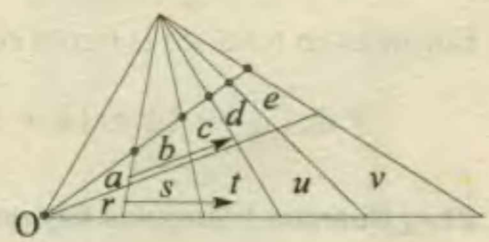
En total se tendrá : $56 + 5 =$ **61** **RPTA. C**

22.- ¿Cuántos triángulos se cuentan como máximo en la siguiente figura?



A) 30 ***B) 40*** ***C) 50*** ***D) 60*** ***E) 70***

Resolución:



En la región triangular sombreada se pueden contar : $n = 6$ puntos en su base; luego habrán : $6 \,.\, 5 \div 2 = 15$ triángulos.

Análogamente, si ampliamos la zona sombreada, encontramos dos grupos más de 15 triángulos.

Hasta aquí hemos reconocido : $15 + 15 + 15 = 45$ triángulos

Ahora identificamos a los triángulos que hay en el sentido que indican las flechas :

a ; *ab* ; *abc* ; *abcd* ; *abcde* : los cuales hacen un total de 5.

Del mismo modo en el sentido de la segunda flecha encontramos 5 triángulos más :

r; *rs* , *rst* , *rstu* , *rstuv*

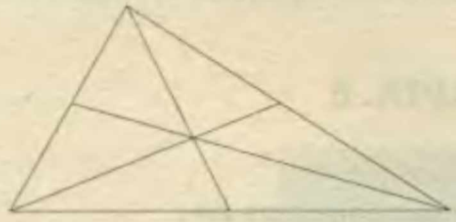
A continuación, si partimos de O y seguimos el conteo de triángulos reuniendo a los dos grupos anteriores, encontraremos 5 triángulos más :

ar , *abrs*, *abcrst*, *abcrstu*, *abcderstuv*

Finalmente el total de triángulos existentes son : $45 + 5 + 5 + 5 =$ **60 triángulos**

RPTA. D

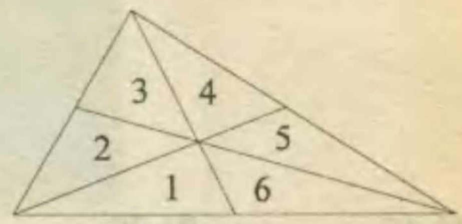
23.- ¿Cuántos triángulos se pueden observar en la siguiente figura?



A) 16 ***B) 17*** ***C) 18*** ***D) 19*** ***E) 20***

Resolución:

Para poder identificar mejor a los triángulos , anotamos números en cada parte de la figura y escribimos las combinaciones que correspondan a cada Δ observado :



1;2;3;4;5;6
16;23;45
123;234;345;456;561;612
123456

} 16 triángulos

RPTA. A

24.- En la siguiente figura :



a) ¿Cuántos cuadriláteros hay?

b) ¿Cuántos cuadrados hay?

c) ¿Cuántos cuadriláteros que no son cuadrados se pueden observar?

A) 190 ; 10 ; 120 ***B) 195 ; 20 ; 130*** ***C) 200 ; 30 ; 140***

D) 205 ; 40 ; 150 ***E) 210 ; 50 ; 160***

Resolución:

A) Sobre la base del enrejado contamos $n = 7$ puntos y sobre un borde vertical, $m = 5$ puntos, luego aplicando la fórmula encontramos :

$$\# \text{ de cuadriláteros} = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 210$$

B) La figura principal es de 6 × 4 casilleros y el número de cuadrados se obtendrá contándolos por tamaños :

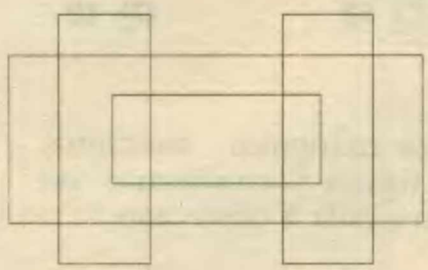
De	1 × 1 :	24 = 6 × 4
De	2 × 2 :	15 = 5 × 3
De	3 × 3 :	8 = 4 × 2
De	4 × 4 :	3 = 3 × 1

} 50 cuadrados

C) Los cuadriláteros que no son cuadrados se pueden obtener restando los resultados de (*a*) y (*b*):

$210 - 50 =$ **160** RPTA. E

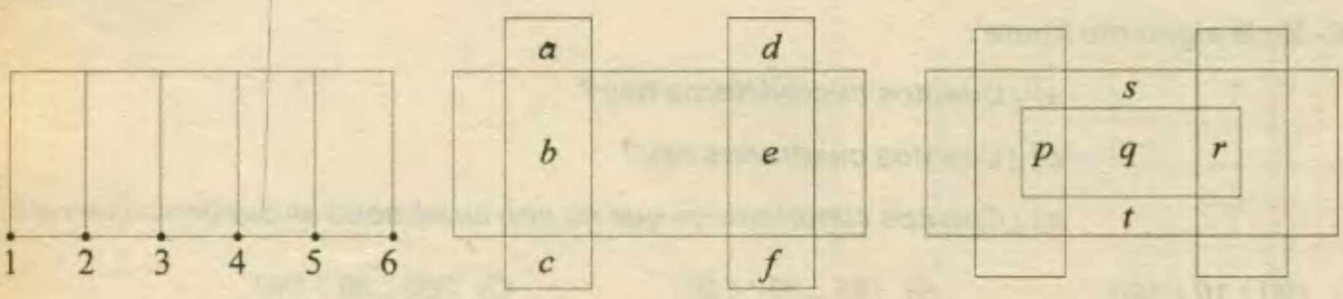
25.- Calcular el máximo número de cuadriláteros en :



A) 15 ***B) 25*** ***C) 35*** ***D) 45*** ***E) 55***

<u>Resolución:</u>

Haremos el conteo en tres etapas, según lo que se observa en la siguiente secuencia de figuras :



A B C

1) Considerando A, con $n = 6$, el número de cuadriláteros es : $\dfrac{n\,(n-1)}{2}$; es decir ; $\dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$

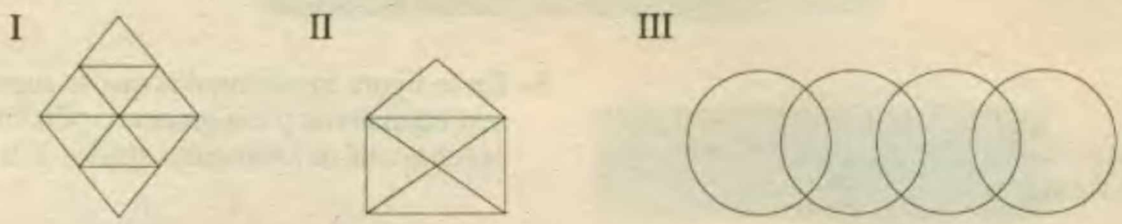
2) En B, además de los 15 que ya contamos, tenemos :

$\left.\begin{array}{l} a \,;\, ab \,;\, bc \,;\, abc \,;\, c \\ d \,;\, de \,;\, ef \,;\, def \,;\, f \end{array}\right\}$ 10 cuadriláteros más

3) En C, agregamos : $p \,;\, q \,;\, pq \,;\, qr \,;\, pqr \,;\, r \,;\, s \,;\, sq \,;\, qt \,;\, t \;\rightarrow$ 10 más

En total : $15 + 10 + 10 =$ **35 cuadriláteros** RPTA. C

26.- ¿Cuál o cuáles de estas figuras se pueden dibujar de un solo trazo?



A) I y II *B) I, II y III* *C) I* *D) II* *E) III*

Resolución:

Aplicando las reglas de Euler diremos que :

En la figura (I) todos los puntos son pares, por lo que sí se podrá recorrer de un solo trazo.

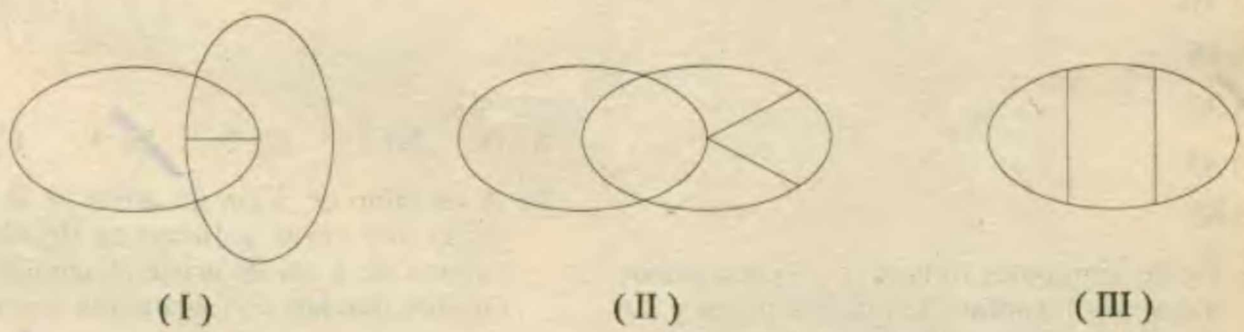
En la figura (II) hay dos puntos impares, entonces, también se podrá dibujar.

En la figura (III) todos son pares, por tanto es posible dibujarla de un solo trazo.

En conclusión , todas se pueden dibujar de un solo trazo.

I , II y III RPTA. B

27.- ¿Cuál o cuales de estas figuras se pueden dibujar sin repetir algún trazo ni levantar el lápiz del papel?



A) III *B) II* *C) I* *D) I ; II y III* *E) I y II*

Resolución:

En I hay solo 2 puntos impares → sí se puede

En II hay solo 2 puntos impares → sí se puede

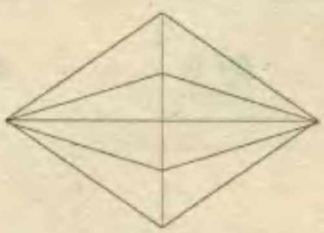
En III hay más de 2 puntos impares → no se puede **I y II** RPTA. E

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

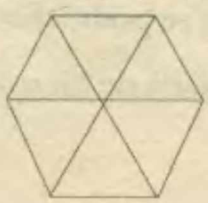
1.- ¿Cuántos triángulos se pueden observar en esta figura?

A) 20
B) 30
C) 25
D) 24
E) 32



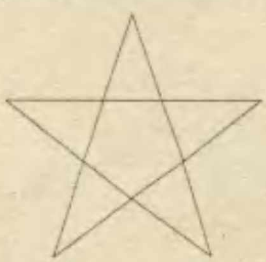
2.- ¿Cuántos exágonos hay en esta figura?

A) 7
B) 6
C) 5
D) 3
E) 1

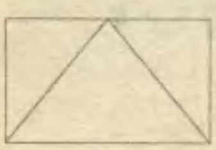


3.- La estrella que se nuestra está formada por 5 rectas que se intersectan en 10 puntos. ¿Cuántos segmentos cuyos extremos sean estos puntos se pueden observar?

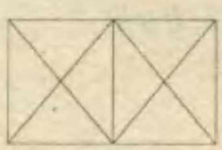
A) 10
B) 15
C) 30
D) 45
E) 60



4.- De las siguientes figuras ¿cuál no se puede trazar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea?



I



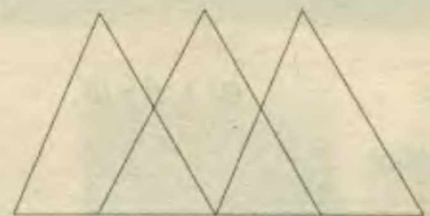
II



III

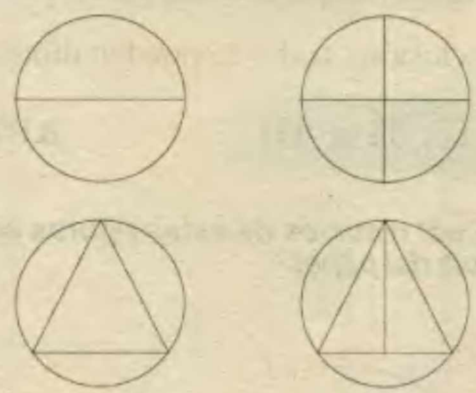
A) Solo I B) Solo II C) Solo III D) I y II E) II y III

5.- En la figura los triángulos que se superponen son equiláteros y congruentes. ¿Cuánto mide la suma total de los ángulos agudos de la figura?



A) 540 B) 600 C) 660 D) 720 E) 780

6.- ¿Cuántas de estas figuras se pueden dibujar de un solo trazo, es decir, sin pasar dos veces por la misma línea y sin levantar el lápiz?



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.- A un cubo de 3 *cm* de arista se le pintan todas sus caras y luego es dividido en cubitos de 1 *cm* de arista ¿Cuántos de los cubitos quedan con dos caras pintadas?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) más de 8

8.- Calcular el número de trapecios si la figura tiene "n" paralelas.

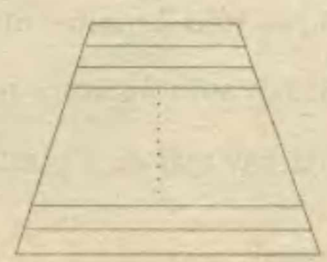
A) $\dfrac{n(n-1)}{2}$

B) $\dfrac{n(n+1)}{2}$

C) n^2+1

D) $n(n-1)$

E) n^2+1



9.- Se instalan 25 postes alineados y separados entre si por una distancia de 25 *metros* uno de otro. ¿Cuál es la distancia entre el primer y el último poste?

A) 1 000m B) 625m C) 650m

D) 600m E) 576m

10.- ¿Cuántos asteriscos harán falta para la figura 14 de la siguiente secuencia?

```
                                  *
                      *         *   *
            *       *   *     *   *   *
*         *   *   *   *   *  *   *   *   *
1           2         3            4
```

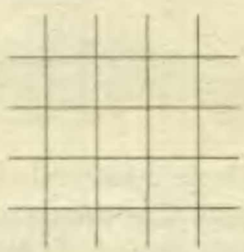
A) 120 B) 140 C) 196 D) 100 E) 105

NIVEL B

11.- ¿Cuántos cuadrados de todos los tamaños se pueden contar en un tablero de ajedrez?

A) 64 B) 72 C) 128 D) 160 E) más de 200

12.- ¿Cuál es el número total de segmentos en la figura que se muestra?



A) 90

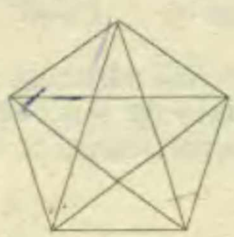
B) 60

C) 120

D) 100

E) N.A

13.- ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



A) 30

B) 35

C) 36

D) 34

E) 40

14.- Para dividir un segmento en partes iguales se le aplican 3 cortes, luego a cada parte se le aplican otra vez 3 cortes y por último con cada parte se repite el proceso una vez más. En cuántas partes se ha dividido el segmento?

A) 27 B) 81 C) 64 D) 256 E) 324

15.- Para cercar un terreno en forma de triángulo equilátero se utilizaron 60 estacas colocadas cada 4 metros y empezando en un vértice del triángulo. ¿Cuál es la longitud de cada lado del terreno?

A) 120 B) 80 C) 76 D) 84 E) 96

16.- Tenemos un cubo o hexaedro de madera, pintada de negro en todas sus caras. Lo cortamos en 27 cubitos iguales. ¿Cuántos de ellos tendrán pintadas de negro tres caras, dos caras, una cara y ninguna?

A) 8 - 12 - 4 - 3 D) 7 - 12 - 7 - 1

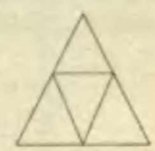
B) 10 - 10 - 5 - 2 E) 8 - 12 - 6 - 1

C) 9 - 11 - 7 - 0

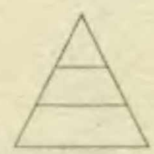
17.- ¿Cuáles de estas figuras no se pueden dibujar de un solo trazo?



I



II



III

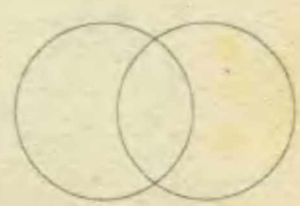


IV

A) Solo II B) Solo II y III C) Solo III

D) I, II y IV E) I, II y III

18.- ¿Cuando se intersectan 2 circunferencias iguales se forman como máximo 3 regiones, según se observa en la figura. ¿Cuántas regiones se formarán como máximo con 4 circunferencias?



A) 10

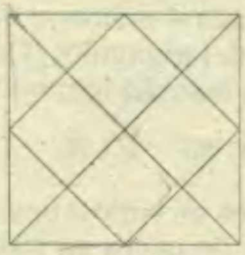
B) 11

C) 12

D) 13

E) 14

19.- ¿Cuántos triángulos hay en esta figura?



A) 30

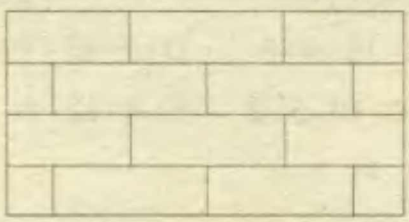
B) 36

C) 40

D) 44

E) 48

20.- ¿Cuántas cuadriláteros hay en esta figura?



A) 24

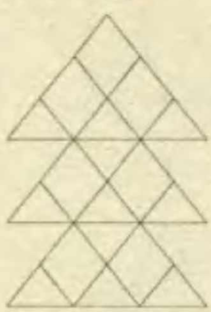
B) 40

C) 36

D) 30

E) 38

21.-En la figura mostrada. ¿ Cuántos triángulos se pueden contar en total ?



A) 10

B) 18

C) 20

D) 22

E) 24

22.- Calcular el número de cuadriláteros en :



A) 38

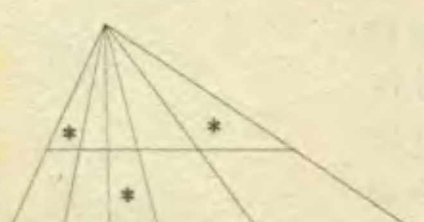
B) 40

C) 35

D) 36

E) 32

23.-En la siguiente figura. ¿Cuántos triángulos tienen por lo menos un asterísco?



A) 22

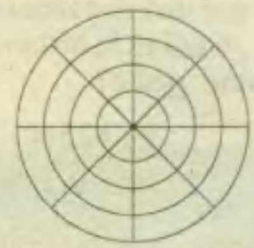
B) 18

C) 20

D) 24

E) 25

24.- ¿Cuántos semicírculos hay en total?



A) 16

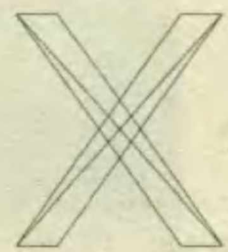
B) 32

C) 24

D) 36

E) 20

25.- ¿Cuántos triángulos hay?



A) 19

B) 20

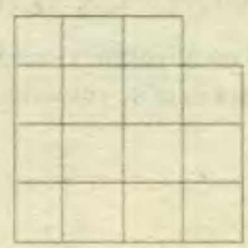
C) 16

D) 15

E) 12

NIVEL C

26.- ¿Cuántos cuadriláteros hay en esta figura?



A) 96

B) 99

C) 100

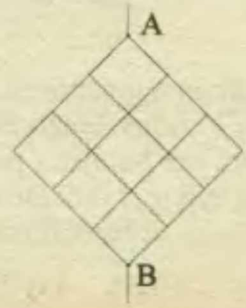
D) 84

E) 80

27.- Una hoja cuadriculada tiene 8 cuadritos por lado. Si se dibuja una de las diagonales a través de toda la hoja. ¿Cuántos triángulos se formarán?

A) 80 B) 90 C) 40 D) 16 E) 72

28.- En la figura mostrada. ¿Cuántos caminos diferentes de seis segmentos cada uno existen para llegar de *A* a *B*?



A) 24

B) 20

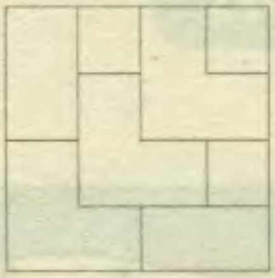
C) 12

D) 10

E) N.A

29.- ¿Cuántos exágonos hay en la figura?

A) 22
B) 24
C) 9
D) 12
E) N.A

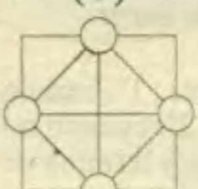


30.- Un cubo de madera de *x centímetros* de arista es pintado totalmente, luego se corta en cubos de 9 *cm* de arista cada uno. Si entonces hay exactamente 96 cubos con dos de sus caras pintadas, la longitud *x* es:

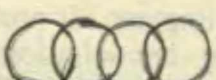
A) 80*cm* B) 100*cm* C) 72 *cm*
D) 90*cm* E) 96*cm*

31.- ¿Cuál o cuáles de las siguientes figuras pueden realizarse de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel ni pasar 2 veces por una misma línea ?

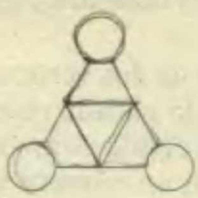
(I)



(II)



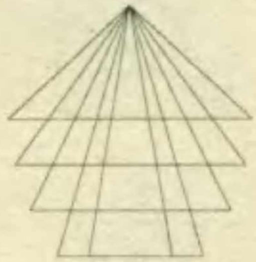
(III)



A) I y II B) II y III C) I y III
D) Solo II E) Solo III

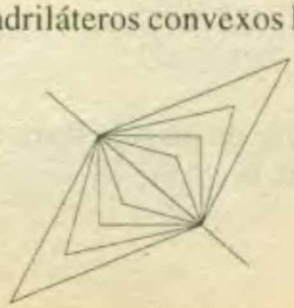
32.- ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?

A) 96
B) 48
C) 88
D) 102
E) 94



33.- ¿Cuántos cuadriláteros convexos hay en :

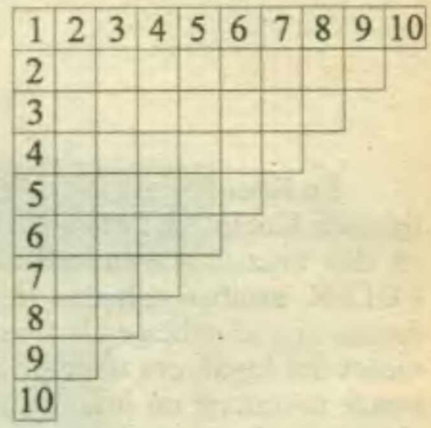
A) 15
B) 18
C) 16
D) 12
E) 20



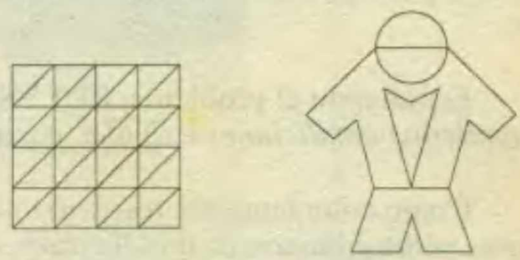
34.- A partir del gráfico :

Calcular el número de cuadrados.

A) 144
B) 125
C) 121
D) 150
E) 200



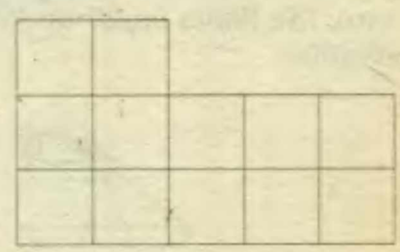
35.- ¿Cuántos puntos impares hay en cada una de estas figura?



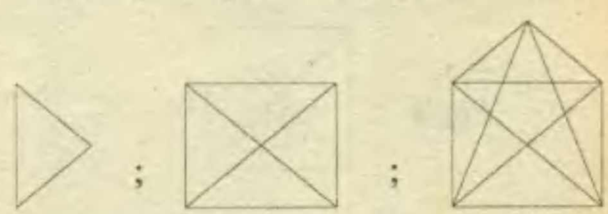
A) 0;1 B) 1;1 C) 2;2 D) 4;2 E) 2;0

36.- ¿Cuántos cuadriláteros se pueden contar en esta figura?

A) 60
B) 48
C) 36
D) 54
E) 64



37.- Calcular la suma de S_1, S_2, S_3, sabiendo que S_n = número máximo de segmentos en estas figuras geométricas regulares.

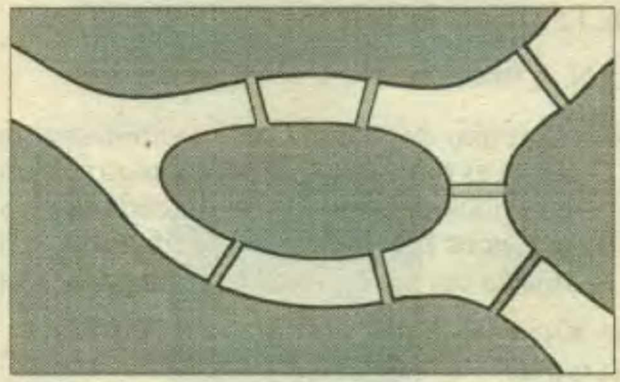


$S_1 = 3$ $S_2 = 10$ $S_3 = ...$

A) 48 B) 54 C) 44 D) 42 E) 39

LOS SIETE PUENTES

En Koenigsberg (Pomerania) hay una isla llamada Kueiphof. El río que la rodea se divde en dos brazos y sobre ellos, en tiempos de EULER, estaban echados siete puentes, de la forma que se indica en la figura. Para los habitantes del lugar, era tema de distracción el intentar descubrir un itinerario para sus paseos de forma tal que puediesen regresar al punto de partida después de haber cruzado por los siete puente, pero pasando por cada uno sólo una vez.



Estudiando el problema, EULER llegó a demostrar la siguiente conclusión: *Es imposible cumplir las condiciones exigidas para los puentes de Koniegsberg.*

Como complemento, resolvió totalmente la cuestión de reconocer si una figura lineal cualquiera podía dibujarse de un sólo trazo, esto es, sin levantar el lápiz del papel y sin hacerle recorrer dos veces un mismo fragmento de línea, o si, por el contrario, esto era imposible de hacer.

El problema es imposible si en la red hay más de dos vértices impares. Es posible : 1°, cuando todos los vértices son pares, y entonces el punto de partida puede ser cualquiera; 2°, cuando no hay más de dos vértices impares, y entonces el recorrido comienza por uno de ellos y termina en el otro. (Se llama *impar* un vértice, si de él parten un número impar de caminos, y *par* en caso contrario).

Fig.A

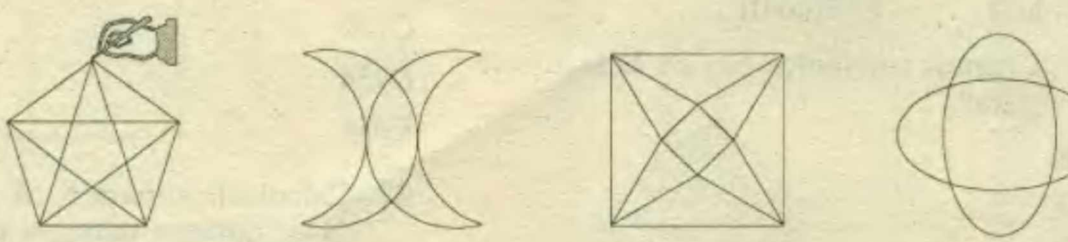
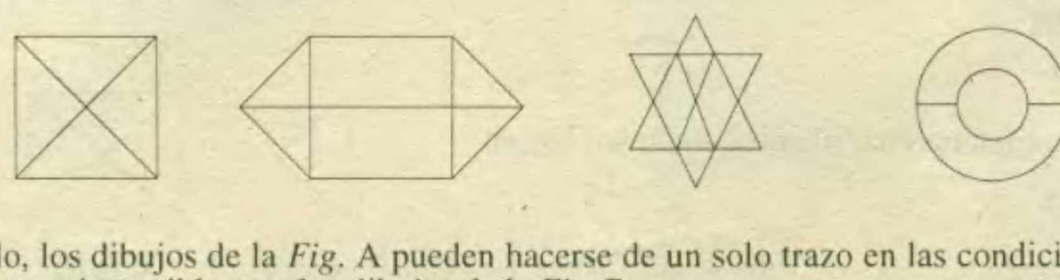


Fig.B



Por ejemplo, los dibujos de la *Fig*. A pueden hacerse de un solo trazo en las condiciones exigidas; pero esto es imposible para los dibujos de la *Fig*. B.

7 Operadores

I) OPERACION MATEMATICA

Es el procedimiento que aplicado a una o más cantidades producen un resultado, el cual se obtiene después de utilizar reglas previamente definidas.

OPERADOR

Es un símbolo que representa a la ecuación y enlaza a las cantidades que se operan.

Ejemplo:

operadores → **resultado**

$$\underbrace{\sqrt{16+9}=5}_{\text{operación}}$$

II) OPERACION BINARIA

Llamamos así a aquella que asocia una pareja de números con un resultado o tercer número. La adición, sustracción, multiplicación y división son operaciones binarias, pero no son las únicas. Se pueden definir "*nuevas*" operaciones binarias asignándoles un operador que las distinga de las que ya conocemos, empleándose por lo general un asterisco (*) o cualquier otro símbolo. No debemos olvidar que cada "*nuevo*" operador debe acompañarse de la regla o fórmula que la define.

Ejemplo:

operador → *

$$\underbrace{a*b = \overbrace{a+b+ab}^{\text{fórmula}}}_{\text{operación binaria}}$$

Para operar 3 * 5, hacemos $a = 3$, y , $b = 5$ en la fórmula dada :

$$3 * 5 = 3 + 5 + 3 \times 5 = 8 + 15 = 23$$

Si se tratara de operar (1 * 2) * 3 se procede por partes y desde los símbolos de colección, es decir empezando por la pareja entre paréntesis:

$$1 * 2 = 1 + 2 + 1 \times 2 = 5$$

luego tendríamos: $(1 * 2) * 3 = 5 * 3 = 5 + 3 + 5 \times 3 = 23.$

Una operación binaria puede presentar propiedades tales como ser conmutativa, ser asociativa, poseer elementos neutro, existencia de elemento inverso. etc. En el ejemplo anterior, si quisiéramos verificar la conmutatividad, operamos por separado $3 * 5$ y $5 * 3$, notándose que en ambos casos se obtiene igual resultado: 23.

Propiedad Conmutativa : $a * b = b * a$

Propiedad Asociativa : $a * (b * c) = (a * b) * c$

Elemento Neutro : $a * e = e * a = a \; ; \; \forall a$

III) OPERACION NO BINARIA

No siempre las ecuaciones deben aplicarse a dos elementos, el número de elementos que se operan puede variar en cada definición.

Ejemplos:

a) $n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times ..... \times n$

Este operador llamado *factorial*, solo se aplica a un elemento; así tenemos: $5\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

b) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$

Este operador llamado *determinante* se aplica a 4 elementos.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2$$

IV) OPERACION BINARIAS DEFINIDAS POR TABLAS

En lugar de una fórmula para hallar resultados, la operación binaria puede presentar estos resultados en una tabla, que se consulta siguiendo pautas establecidas.

Ejemplo:

Se define la operación Δ según esta tabla.

Hallar:

a) 2 Δ 3

b) (3 Δ 1) Δ (2 Δ 0)

Δ	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Resolución:

Esta operación se define de modo que el primer elemento se ubica en la horizontal (fila) y el segundo en la vertical (columna).

a) El resultado de : $2 \Delta 3$, aparece en la instersección de la fila que corresponde a 2 y la columna que corresponde a 3.

$$2 \Delta 3 = 1$$

Columna

Δ	0	1	2	3
0				
1				
Fila → 2				1
3				

b) Se buscan los resultados por partes empezando por los paréntesis:

$$(3 \Delta 1) \Delta (2 \Delta 0) = 0 \Delta 2 = \mathbf{2}$$

V) OPERADORES COMO FUNCIONES

Probablemente se recordará la típica frase "f de x" de ciertas tareas escolares, que usualmente escribimos "$f(x)$", esta es la notación de función. No parece evidente, pero cada operador es una función en la que empleamos x para indicar lo que ingresa como dato y $f(x)$ para indicar lo que se obtiene (el resultado).

1) Así, la operación $x = x^2 + 1$

se puede escribir : $f(x) = x^2 + 1$

2) Del mismo modo : $x \# y = \dfrac{x-y}{2}$

se puede escribir así : $f(x,y) = \dfrac{x-y}{2}$

Ejemplo:

Si definimos $f(x) = 2x + 3$

$$f(1) = 2(1) + 3 = 5$$

$$f(0) = 2(0) + 3 = 3$$

$$f(x+1) = 2(x+1) + 3 = 2x + 5$$

Y así sucesivamente, lo que aparece entre paréntesis en $f(\ )$ será sustituído por x en la regla que define $f(x)$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- La operación * es definida para números reales x, y por la relación :

$x * y = (x - y)(x)(x + y)$; ¿cuál es el valor de 25 * 24?

A) 625 B) 600 C) 775 D) 750 E) 1 225

Resolución:

Basta con empezar $x = 25$; $y = 24$ en la fórmula:

$$25 * 24 = (25 - 24)(25)(25 + 24)$$
$$= (1)(25)(49)$$
$$= 1\,225$$

RPTA. E

2.- Definimos la operación: $\boxed{x \mid y \mid z} = x^2 + yz$; para todo número x, y, z ; hallar de acuerdo a esto el valor de: $\boxed{\boxed{1 \mid 2 \mid 3} \mid \boxed{2 \mid 3 \mid 1} \mid \boxed{3 \mid 1 \mid 2}}$

A) 123 B) 113 C) 99 D) 126 E) 132

Resolución:

En notación funcional, la operación está definida así:

$f(x, y, z) = x^2 + yz$, y operamos por partes:

$$\left.\begin{array}{l} f(1; 2; 3) = 1^2 + 2 \times 3 = 7 \\ f(2; 3; 1) = 2^2 + 3 \times 1 = 7 \\ f(3; 1; 2) = 3^2 + 1 \times 2 = 11 \end{array}\right\} \boxed{7 \mid 7 \mid 11} = 7^2 + 7 \times 11 = 126$$

RPTA. D

3.- Sea $a \# b = a^{-1} + b^{-1}$; al determinar : $E = \dfrac{(3\#4).(5\#3)}{(2\#3).(2\#5)}$; se obtiene:

A) $\frac{8}{15}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{15}{7}$ E) $\frac{15}{8}$ UNFV 95

Resolución:

$$E = \frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{7}{12}\times\frac{8}{15}}{\frac{5}{6}\times\frac{7}{10}} = \frac{8}{15}$$

RPTA. A

4.- Si a * m =$\sqrt{m}$ + a, el décimo sexto término de la sucesión: 3 * 9; 4 * 16; 5 * 25; .... es:

A) 32 B) 64 C) 36 D) 48 E) 34

Resolución:

El término general de la sucesión es $a_n = (n+2) * (n+2)^2$

Luego, $a_{16} = 18 * 18^2 = \sqrt{18^2} + 18 =$ **36** RPTA. C

5.- Sea x un número entero : x > -2 ;

si: (x) = $x^3 + 1$;

[x] = $x^2 + 3x$;

calcular el mayor valor de: a + 5 , si ([a]) = -7

A) 4 B) 3 C) 2 D) 7 E) 1 UNMSM 93

Resolución:

Luego de aplicar el operador □, tenemos: $(a^2 + 3a) = -7$

y luego del operador ○ tendremos: $(a^2 + 3a)^3 + 1 = -7$

$$(a^2 + 3a)^3 = -8$$

$$a^2 + 3a = -2$$

Al resolver: $a^2 + 3a + 2 = 0$;

tenemos $(a + 2)(a + 1) = 0$; de donde : $a = -2$; $a = -1$, y elegimos solo $a = -1$ (porque $a + 5$ debe ser máximo)

Luego : $a + 5 = (-1) + 5 =$ **4.** RPTA. A

6.- Una operación está definida mediante la tabla adjunta: El resultado de efectuar la operación:

*	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	3
3	3	3	1

$P = [(1*2)*3]*[(3*2)*1]$ es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5 UNFV 95

Resolución:

De acuerdo a lo que agrupan los signos de colección, operamos por partes:

$P = [2*3]*[3*1] = 3 * 3 =$ **1** RPTA. A

7.- Respecto a la tabla se afirma:

*	u	v	w
u	w	v	u
v	v	u	w
w	u	w	v

*I) * es conmutativa*

*II) * es asociativa*

*III) * tiene elemento neutro*

Son verdaderas :

A) Sólo I *B) Sólo II* *C) Sólo III* *D) Sólo I y II* *E) Las tres* ***UNALM 90***

Resolución:

I) Sí es conmutativa, porque:

$u * v = v * u \quad ; \quad u * w = w * u \quad ; \quad v * w = w * v$

II) No es asociativa porque:

$u * (v * u) = v \quad \text{y} \quad (u * v) * w = w$

III) Para que tenga elemento neutro debe existir un único elemento e , tal que $u * e = u$; $v * e = v$; $w * e = w$ y este elemento no existe. **RPTA. A**

8.- Si : $f(x, y) = x^{-1} . y^{-1} . (x^{-1} - y^{-1})^{-1}$; calcular el valor de: $f\left[f(3;2),f(4;5)\right]$

A) -0,5 *B) -1* *C) 0* *D) 0,5* *E) -2*

Resolución:

Primero simplificamos la regla de definición :

$$f(x,y) = \frac{1}{x}\times\frac{1}{y}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^{-1} = \frac{1}{xy}\times\frac{xy}{y-x} = \frac{1}{y-x}$$

Vemos que simplemente es: $f(x,y) = \dfrac{1}{y-x}$

Entonces: $f(3;2) = -1$

$f(4;5) = 1$

Finalmente: $f\left[-1;1\right] = \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2} =$ **0,5** **RPTA. D**

9.- Si: $\boxed{\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}}$ = 4a - 3b ; hallar el producto : $\boxed{\begin{matrix}5\\ \boxed{\begin{matrix}3\\ 2\end{matrix}}\end{matrix}} \times \boxed{\begin{matrix}4\\ \boxed{\begin{matrix}1\\ 3\end{matrix}}\end{matrix}}$

A) 31 *B) 62* *C) 27* *D) 33* *E) 360* ***PUCP 92 - II***

Resolución:

En notación $f(a, b)$ la operación es: $\boxed{\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}} = f(a, b) = 4a - 3b$

Nos piden : $f[5,f(3;2)] = f[5;6] = 20 - 18 = 2$

Multiplicado por: $f[4,f(1;3)] = f[4;-5] = 31$

Finalmente hallamos el producto : $2 \times 31 = 62$ RPTA. B

10.- Si se cumple que: $a * b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{3}$ ***; y además que:*** $15 * b = 5$ ***; hallar:*** $6 * b$

A) 7/3 *B) 1/6* *C) 7/2* *D) 5/6* *E) N.A.* *UNALM 92*

Resolución:

Primero hallamos b : $\frac{15+b}{2} - \frac{15-b}{3} = 5$

$$\frac{45+3b-30+2b}{6} = 5 \Rightarrow 5b = 15$$

$$b = 3$$

Luego, hallamos lo que piden;

$$6 * b = 6 * 3 = \frac{6+3}{2} - \frac{6-3}{3} = \frac{7}{2}$$ RPTA. C

11.- En A = {1; 2; 3; 4} se define una operación # cuyos valores están dados en la tabla adjunta. Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

#	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	1	1
3	3	1	1	4
4	4	2	3	4

I) La ecuación : x # 4 = 4 tiene solución única.

II) $\forall x, y \in A$ ***se cumple: x # y = y # x***

III) $(2 \# 3) \# [3 \# (4 \# 1)] = 4$

A) VFF *B) FFV* *C) FVV* *D) VVV* *E) FFF* *UNI 94 - II*

Resolución:

I) FALSO.- No tiene solución única porque x puede ser 1; 2; ó 4.

II) FALSO.- $2 \# 4 \neq 4 \# 2$, por lo tanto no es conmutativa.

III) VERDADERO.- Operando por partes, se obtiene:

$$1 \# [3 \# 4] = 1 \# 4 = 4$$ RPTA. B

12.- Sean a y b dos números naturales. Si define la operación:

$$a \forall b = \begin{cases} 1 & si\ a \neq b \\ 0 & si\ a = b \end{cases}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

1.- $a \forall b = b \forall a$

2.- Si : $a \forall b = 0$ ***; entonces*** $a = b$

3.- $a \forall b + b \forall c \geq c \forall c$

A) Solo 1 *B) Solo 2* *C) Solo 1 y 2* *D) Solo 2 y 3* *E) Todas* *PUCP 89*

Resolución:

(1) Es verdadera porque el orden de los elementos no altera su comparación.

(2) Es verdadera por la propia definición.

(3) El resultado en $c \forall c$ es cero, luego para cualquier combinación de valores a, b, c el resultado de $a \forall b$ y $b \forall c$ será cero o mayor que cero, haciendo válida la afirmación. **RPTA. E**

13.- Si: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \dfrac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{(b-a)(b-1)}$; el valor de : $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, es:

A) - 42 *B) - 40* *C) - 38* *D) 42* *E) 40* *UL 95 - I*

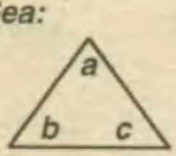
Resolución:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4(3)(2)(1)}{(-2)(1)} = -12$$

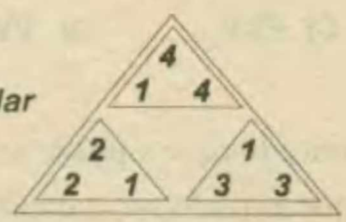
$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{5(4)(3)(2)}{(-2)(2)} = -30$$

Finalmente: $(-12) - (30) =$ **- 42** **RPTA. A**

14.- Sea:



$= a^2 - bc$; calcular



A) 128 *B) 100* *C) -160* *D) 120* *E) 160* *UNMSM 90*

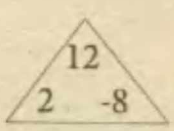
Resolución:

Operamos primero los triángulos interiores:

$4 \rightarrow 1 \rightarrow 4 = 4^2 - 1 \times 4 = 12$;

$2 \rightarrow 2 \rightarrow 1 = 2^2 - 2 \times 1 = 2$;

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 3 = 1^2 - 3 \times 3 = -8$

Finalmente:  $= 12^2 - 2(-8) =$ **160** **RPTA. E**

15.- En el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ se definen las siguientes operaciones binarias :

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

Δ	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	c

Si $x = b * c$, determinar el valor de $(c * x)\,\Delta\,(b * a)$

A) No es posible calcularlo B) d C) a D) b E) c UNMSM 92

<u>Resolución</u>:

De la 1ª tabla deducimos que : $x = a$; luego $c * a = c$; $b * a = b$

Y por último: $c\,\Delta\,b = c$ RPTA. E

16.- Si : $x \varnothing y = x^y$ para enteros positivos x, y ¿Cuál es el valor de $a \varnothing b$, si : $b \varnothing a = b$.

A) b B) 1 C) b^2 D) 2 E) ab

<u>Resolución</u>:

$b^a = b$, entonces $a = 1$

Luego : $a \varnothing b = a^b = 1^b =$ 1 RPTA. B

17.- Se define la operación: $\frac{x+1}{y-1} = xy - x + y$; entonces hallar: $\frac{8}{3} + \frac{5}{7}$

A) 61 B) 49 C) 30 D) 90 E) 75

<u>Resolución</u>:

Acomodando los números que aparecen en la cabeza y rostro del chinito de modo que adopten la forma dada por el operador, tendremos:

$$\frac{8}{3} = \frac{7+1}{4-1} = 7 \times 4 - 7 + 4 = 25$$

$$\frac{5}{7} = \frac{4+1}{8-1} = 4 \times 8 - 4 + 8 = 36$$

Entonces : $25 + 36 =$ 61 RPTA. A

18.- Se define la operación: $a \varnothing b = \dfrac{b+1}{a}$ ***; según esto, hallar x en:*** $x \varnothing (x \varnothing x) = 3 \varnothing 8$

A) 3   *B)* $\frac{2}{3}$ *C)* $\frac{3}{2}$ *D)* -1   *E)* $-\frac{1}{3}$

Resolución:

Haremos uso del operador en el primer paréntesis, esto es:

$x \varnothing x = \dfrac{x+1}{x}$; este resultado reemplazamos en la expresión solicitada.

$$x \varnothing \frac{x+1}{x} = \frac{8+1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{x+1}{x}+1}{x} = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x+1}{x^2} = 3$$

De aquí se forma la ecuación : $3x^2 - 2x - 1 = 0$

que tiene como soluciones : $x=1$, y , $x=-1/3$ RPTA. E

19.- Se definen estas dos operaciones: $r \# s = \dfrac{r+1}{s}$; $r \Delta s = \dfrac{s+1}{r}$ ***; entonces a # b es equivalente a :***

A) $a \Delta b$ *B)* $a \Delta (b+1)$ *C)* $b \Delta a$ *D)* $\dfrac{a}{b \Delta a}$ *E)* $(a-1) \Delta (b-1)$

Resolución:

$$a \# b = \frac{a+1}{b} \quad ..... (\alpha)$$

La expresión equivalente a (α) es la que aparece en (C), puesto que:

$b \Delta a = \dfrac{a+1}{b}$ RPTA. C

20.- Se define la operación: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC$ ***; según esto, el resultado que toma el mayor valor es:***

A) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$ *B)* $\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$ *C)* $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ *D)* $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$ *E)* $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$

Resolución:

Hallamos cada resultado por separado para así poder hacer las comparaciones respectivas:

A) (-2) (3) - (-4) (5) = -6 +20 = 14
B) (-7) (1) - (7) (-5) = -7 + 35 = 28
C) (2) (-2) - (5) (-3) = -4 + 15 = 11
D) (6) (3) - (-2) (3) = 18 + 6 = 24
E) (2) (4) - (-2) (0) = 8 + 0 = 8 RPTA. B

21.- Se define: $a \,|\, b$ (con c abajo, operador en forma de Y) $= \dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{b+c}{b-c}$ ***; entonces, hallar:*** $14 \,|\, 10$ (con 8 abajo)

A) *51* ***B)*** *1/3* ***C)*** *7/12* ***D)*** *5* ***E)*** *15*

<u>Resolución</u>:

En base al operador , reconocemos que : $a = 14, b = 10$ y $c = 8$

$$\Rightarrow \frac{14+10}{14-10} + \frac{10+8}{10-8} = \frac{24}{4} + \frac{18}{2} = \boxed{15}$$ RPTA. E

22.- Si la operación que indica la tabla es conmutativa, la región sombreada se completa con:

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0		0	2
3	0			1

A)

2	
3	0

B)

3	
0	2

C)

2	
2	1

D)

2	
3	2

E)

3	
1	3

<u>Resolución</u>:

Llamando: a, b y c , a los valores faltantes:

a	
b	c

Según la tabla, $a = 2 * 1 = 1 * 2 = 2$

$b = 3 * 1 = 1 * 3 = 3$

$c = 3 * 2 = 2 * 3 = 2$ RPTA. D

23.- Definimos N * como la suma de los positivos desde 1 hasta N entonces, de las afirmaciones:

I) ***20^* es un entero impar***

II) ***Si A es impar entonces A^* es impar***

III) ***$(n+1)^* - n^*$ es igual a : $n+1$***

Son verdaderas:

A) *Ninguna* ***B)*** *Solo I* ***C)*** *Solo II* ***D)*** *Solo III* ***E)*** *II y III*

<u>Resolución</u>:

I) FALSO : $20^* = 1 + 2 + \ldots\ldots + 20 = \dfrac{20\times 21}{2} = 210$

II) FALSO : Por ejemplo con $A = 3$; $A^* = 1 + 2 + 3 = 6$

III) VERDADERO : $\quad (n+1)^* = 1 + 2 + \ldots\ldots + n + (n+1)$

$$\Rightarrow \boxed{(n+1)^* - n^* = n + 1} \qquad \text{RPTA. D}$$

24.- Definimos la operación $\overset{\frown}{}$ para números positivos:

$$\begin{cases} \overset{\frown}{n} = \dfrac{n}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ cuando } n \text{ es par} \\ \overset{\frown}{n} = 3n + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ cuando } n \text{ es impar} \end{cases}$$

entonces hallar $\overset{\frown}{y}$ si:

$$x = \overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{7}}} + \overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{18}}}} \quad , \quad y = \overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{x}}}}$$

A) 47 B) 113 C) 142 D) 94 E) 313

__Resolución__:

El primer sumando de x *es:*

$$\overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{7}}} = \overset{\frown}{\overset{\frown}{22}} = \overset{\frown}{11} = 34$$

El segundo es:

$$\overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{18}}}} = \overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{9}}} = \overset{\frown}{\overset{\frown}{28}} = \overset{\frown}{14} = 7$$

Luego: $\quad x = 34 + 7 = 41$

Después: $\quad y = \overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{41}}}} = \overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{124}}} = \overset{\frown}{\overset{\frown}{62}} = \overset{\frown}{31} = 94$

Y finalmente: $\overset{\frown}{y} = 94 \div 2 = \boxed{47}$ $\qquad$ RPTA. A

25.- Se define: $\left(\sqrt{x-1}\right) = x^2 + 2x - 3$; hallar x en: $\left(\sqrt{2x+1}\right) = 4x^2 + 13x$

A) 2 B) 2 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 5

__Resolución__:

Empleando la notación de de funciones, la operación se puede escribir así:

$$f\left(\sqrt{x-1}\right) = x^2 + 2x - 3$$

En lugar de x dejamos un espacio para llenar después:

$$f\left(\sqrt{\ldots\ldots-1}\right) = (\ldots\ldots\ldots)^2 + 2\,(\ldots\ldots\ldots) - 3$$

Si queremos conseguir $2x + 1$; dentro del radical, el espacio de puntos lo debemos rellenar con $2x + 2$; entonces:

$$f\left(\sqrt{2x+2-1}\right) = (2x+2)^2 + 2(2x+2) - 3$$

$$f\left(\sqrt{2x+1}\right) = 4x^2 + 12x + 5.$$

Ahora en la ecuación dada, reemplazaremos lo obtenido en el primer miembro para así poder encontrar el valor de x :

$$4x^2 + 12x + 5 = 4x^2 + 13x$$

$\therefore$ $x = 5$ **RPTA. E**

26.- Si : $\sqrt{x} \odot y^3 = x - y^2$; hallar : $(4 \odot 27) \odot (6\sqrt{2} \odot 512)$

A) 47 *B) 45* *C) 43* *D) 41* *E) 39*

Resolución:

Cada operación de la forma : $a \odot b$, debemos transformarla en otra de la forma : $\sqrt{x} \odot y^3$ para que así podamos aplicar la operación : $x - y^2$. Veamos :

$$4 \odot 27 = \sqrt{16} \odot 3^3 = 16 - 3^2 = 7$$

$$6\sqrt{2} \odot 512 = \sqrt{72} \odot 8^3 = 72 - 8^2 = 8$$

Finalmente : $(4 \odot 27) \odot (6\sqrt{2} \odot 512) = 7 \odot 8$

$$= \sqrt{49} \odot 2^3$$

$$= 49 - 2^2 = 45$$ **RPTA. B**

27.- Dado que : $a \Delta b = \sqrt{\dfrac{a * b}{a - b}}$; $a \neq b$

$m * n = m + 2n$. ***Hallar el valor de :*** $E = \dfrac{8 \Delta 4}{2 \Delta 1}$

A) 5 *B) 4* *C) 3* *D) 2* *E) 1*

Resolución:

De ambas fórmulas logramos deducir que : $a \Delta b = \sqrt{\dfrac{a+2b}{a-b}}$

Empleando esta relación podemos determinar los elementos que componen a E :

Numerador : $8 \Delta 4 = \sqrt{\dfrac{8+2 \cdot 4}{8-4}} = 2$

Denominador : $2 \,\Delta\, 1 = \sqrt{\dfrac{2+2\cdot 1}{2-1}} = 2$

Entonces : $E = \dfrac{2}{2} = \boxed{1}$ **RPTA. E**

28.- Se define : $\langle a\rangle\langle b\rangle = \dfrac{a+b}{a-b}$ ***, a ≠ b ; además :*** $\langle 4\rangle\langle x\rangle = 3 \;\wedge\; \langle y\rangle\langle 3\rangle = 4$

Calcular : $\langle 3x\rangle\langle y\rangle$

A) 10 *B) 11* *C) 12* *D) 13* *E) 14*

Resolución:

Cálculo de x . Utilizando el operador y la primera equivalencia , podemos establecer que :

$$\frac{4+x}{4-x} = 3 \quad\Rightarrow\quad 4 + x = 12 - 3x \quad\Rightarrow\quad x = 2$$

Cálculo de y : Utilizando el operador y la segunda equivalencia , podemos establecer que :

$$\frac{y+3}{y-3} = 4 \quad\Rightarrow\quad y + 3 = 4y - 12 \quad\Rightarrow\quad y = 5$$

Estos resultados nos permiten establecer que :

$$\langle 3x\rangle\langle y\rangle = \frac{3x+y}{3x-y} = \frac{3\cdot 2+5}{3\cdot 2-5} = \frac{11}{1} = \boxed{11}$$ **RPTA. B**

29.- Se define : a * b = a + b + 3 ; calcular el elemento neutro.

A) -3 *B) -5* *C) -7* *D) -9* *E) -11*

Resolución:

Designemos por "e" al elemento neutro, entonces por la propiedad del elemento neutro ,deberá cumplirse que :

$$a * e = a$$

Y del operador dado , se tendrá : $a * e = a + e + 3$

$$\Rightarrow\; a = a + e + 3 \;\Rightarrow\; e = -3$$

El elemento neutro de esta operación es $\boxed{-3}$ **RPTA. A**

30.- Se define en Z : $a^{\theta} = \begin{cases} 2a+7 \;;\; \text{si "a" es par} \\ a+3 \;;\; \text{si "a" es impar} \end{cases}$ ***; calcular :*** $(9^{\theta})^{\theta} - (6^{\theta})^{\theta}$

A) 1 *B) 3* *C) 5* *D) 7* *E) 9*

Resolución:

1^ro^) Como 9 es impar, para hallar 9^θ aplicamos la 2^da^ regla :

$$9^\theta = 9 + 3 = 12$$

Luego : $(9^\theta)^\theta = 12^\theta$, pero como 12 es par , aplicaremos ahora la primera regla :

$$12^\theta = 2(12) + 7 = \mathbf{31}$$

2^do^) De modo semejante , hallaremos $(6^\theta)^\theta$:

Como 6 es par aplicamos la primera regla en : $6^\theta = 2(6) + 7 = 19$

Como 19 es impar aplicamos la segunda regla en : $(6^\theta)^\theta = 19^\theta = 19 + 3 = \mathbf{22}$

3^ro^) Por último : $(9^\theta)^\theta - (6^\theta)^\theta = 31 - 22 =$ **9** RPTA. E

31.- Se define : $a^* = \begin{cases} \dfrac{a+2}{2} \; ; a \rightarrow \text{par o cero} \\ \dfrac{a+1}{2} \; ; a \rightarrow \text{impar} \end{cases}$ ***; calcular :*** $E = \left((4^* + 3)^* - (5^* - 2^*)^*\right)^*$

A) 1 *B) 3* *C) 2* *D) 5* *E) 4*

Resolución:

Operando de acuerdo a las reglas, tenemos :

1^ro^) $(4^* + 3)^* = \left(\frac{4+2}{2} + 3\right)^* = 6^* = \frac{6+2}{2} = 4$

2^do^) $(5^* - 2^*)^* = \left(\frac{5+1}{2} - \frac{2+2}{2}\right)^* = 1^* = \frac{1+1}{2} = 1$

3^ro^) $(4 - 1)^* = 3^* = \frac{3+1}{2} =$ **2** RPTA. C

32.- Sabemos que se cumple : $\sqrt{a} * b^2 = 2\left(\sqrt{b} * a^2\right) - ab$ ***; calcular :*** $\dfrac{\sqrt{3} * 2}{\sqrt{6}}$

A) 5 *B) 4* *C) 3* *D) 2* *E) 1*

Resolución:

Podemos reconocer que no está definida explícitamente la regla de operar $a * b$, por ello debemos recurrir al siguiente artificio :

1^ro^) Con $a = x$; $b = y$: $\sqrt{x} * y^2 = 2\left(\sqrt{y} * x^2\right) - xy$ .... (1)

2^{do}) Con $a = y$; $b = x$: $\sqrt{y} * x^2 = 2\left(\sqrt{x} * y^2\right) - yx$ .... (2)

3^{ro}) Reemplazando (2) en (1) : $\sqrt{x} * y^2 = 2\left[2\left(\sqrt{x} * y^2\right) - xy\right] - xy$

Luego de operar y simplificar, obtenemos : $\sqrt{x} * y^2 = xy$

4^{to}) Ahora podemos efectuar : $\dfrac{\sqrt[4]{3} * 2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \boxed{1}$ RPTA. E

33.- Si : $\boxed{x-1} = 2x+1$ ***; y además :*** $\boxed{\triangle\, x+1} = 8x+9$ ***; calcular :*** $E = \triangle\boxed{2} + \triangle\boxed{5}$

A) 77 ***B) 78*** ***C) 79*** ***D) 80*** ***E) 81***

Resolución:

Haciendo : $x = x + 1$, tendremos que el primer operador se transforma en :

$$\boxed{(x+1)-1} = 2(x+1)+1$$

Reduciendo : $\boxed{x} = 2x+3$ .... (α)

Por otro lado : $\boxed{\triangle\, x+1} = 8x+9 = 8(x+1)+1$

Esta última relación nos permite afirmar que : $\boxed{\triangle\, x} = 8x+1$

Si ahora transformamos el segundo miembro : $\boxed{\triangle\, x} = 2(4x-1)+3$ .... (β)

Luego de (α) y (β) deducimos que : $\triangle\, x = 4x - 1$

Finalmente : $E = \triangle\boxed{2} + \triangle\boxed{5} = \triangle\,7 + \triangle\,13 = 27 + 51$

$\therefore$ $\boxed{E = 78}$ RPTA. B

34.- Si : $\boxed{n} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ***; hallar "x" :*** $\boxed{\boxed{\boxed{2x+1}}} = 21$

A) 1/5 ***B) 1/4*** ***C) 1/3*** ***D) 1/2*** ***E) 1***

Resolución:

Acomodando el segundo miembro , en función al operador dado, logramos reconocer que :

$$\boxed{\boxed{\boxed{2x+1}}} = \frac{6\cdot(6+1)}{2} \Rightarrow \boxed{\boxed{2x+1}} = 6$$

Repitiendo el proceso anterior : $\boxed{\boxed{2x+1}} = \frac{3\cdot(3+1)}{2} \Rightarrow \boxed{2x+1} = 3$

$$\boxed{2x+1} = \frac{2\cdot(2+1)}{2} \Rightarrow 2x+1 = 2$$

$\therefore$ $x = 1/2$ RPTA. D

35.- Si : $\boxed{a * b} = 4a$; $a * b > 0$

$\boxed{a+1} = a^2 + 4$

Calcular : $10 * 80$

A) 3 *B) 5* *C) 7* *D) 9* *E) 11*

Resolución:

De acuerdo con las resoluciones de los problemas anteriores , podemos deducir que :

$\boxed{a+1} = a^2 + 4$, con : $a = a - 1$, nos da : $\boxed{a} = (a-1)^2 + 4$ ...(α)

Luego en (α): $\boxed{a * b} = [(a * b) - 1]^2 + 4$

Por dato : $4a = [(a * b) - 1]^2 + 4$

Despejando : $a * b = 2\sqrt{a-1} + 1$

Luego : $10 * 80 = 2\sqrt{10-1} + 1 = 7$ RPTA. C

36.- Sabiendo que se cumple :

$32 \Delta 20 = 36$
$40 \Delta 33 = 53$
$18 \Delta 25 = 34$

Calcular "x" ; si : $30 \Delta x = x \Delta 30$

A) 20 *B) 30* *C) 40* *D) 50* *E) 60*

Resolución:

Analizando los valores de los ejemplos dados, se deduce que la operación Δ significa :

$$a \Delta b = \frac{a}{2} + b.$$

Entonces : $30 \Delta x = x \Delta 30$

Implica : $15 + x = \frac{x}{2} + 30 \Rightarrow x = 30$ RPTA. B

37.- En el conjunto : A = {1 ; 2 ; 3 ; 4} , se define :

θ	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

Calcular : $E = \frac{(1 * 2) * (2 * 4)}{(3 * 3) * (4 * 1)}$

A) 1/6 B) 1/5 C) 1/4 D) 1/3 E) 1/2

Resolución:

Según la tabla : $1 * 2 = 3$; $2 * 4 = 2$; $3 * 3 = 2$; $4 * 1 = 1$

Luego : $E = \frac{3 * 2}{2 * 1} = \frac{1}{3}$ RPTA. D

38.- En el conjunto : "A" = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4} ; se definen :

*	0	1	2	3
0	2	3	0	1
1	2	3	0	1
2	0	1	1	1
3	3	2	1	0

θ	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	4	1	2
3	1	1	4	2
4	1	2	2	4

Hallar "x" en : $(x * x)\,\theta\,(3 * 1) = (4\,\theta\,3) * (4\,\theta\,1)$

A) 1 y 3 B) 2 y 1 C) 1 y 4 D) 3 y 2 E) 5 y 3

Resolución:

$(x * x)\,\theta\,2 = 2 * 1$

$(x * x)\,\theta\,2 = 1$ → $x * x = 1$ ......(α)
→ $x * x = 3$ ......(β)

De (α) : $x = 2$

De (β) : $x = 1$ **2 y 1** RPTA. B

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- La operación n^* es definida como $n^* = n(n+1)$. Entonces el valor de $(2^*)(3^*)(4^*)$ es:

A) 120 B) 240 C) 360 D) 720 E) 1 440

2.- Si la operación $\square$ es definida como:

$$\boxed{n} = \frac{n+2}{n^2}$$

Entonces: $\boxed{4} = ?$

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 4 D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{3}{4}$

3.- Definimos: $a*b = \begin{cases} a^2+b & ; \text{ si: } a>b \\ a+b^2 & ; \text{ si: } a \le b \end{cases}$

Entonces hallar : $(2*3)*(3*2)$

A) 84 B) 96 C) 143 D) 132 E) 121

4.- Si : $(x+1)*2y = x(y+1)$

Hallar: $3*6$

A) 21 B) 9 C) 8 D) 10 E) N.A

5.- Se definen estas operaciones: $a \Delta b = 2a - b$

$p*q = 3p+q$

Entonces: $\frac{6*4}{8\Delta 5}$ es igual *a*:

A) 2 B) $\frac{10}{13}$ C) $1\frac{19}{13}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $1\frac{1}{21}$

6.- Si: $\begin{array}{c|c} a & c \\ b & d \end{array} = ad - bc$

Hallar y en : $\begin{array}{c|c} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{array} + \begin{array}{c|c} 3 & x \\ 1 & y \end{array} = \begin{array}{c|c} 5 & 1 \\ x & y \end{array}$

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

7.- Si: $a \perp b = 2a + b$ cuando $a > b$

$a \perp b = 3a - b$ cuando $a \le b$

Hallar: $(3 \perp 4) \perp (-2 \perp -3)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.- Considerando la operación: $a \oplus b = a + b + 3ab$

Hallar el valor de x en: $b \oplus x = 1$

A) $\frac{b}{1+3b}$ B) $\frac{1+b}{1+3b}$ C) $\frac{1-b}{1+3b}$

D) $-\frac{1+b}{1+3b}$ E) $-\frac{b}{1+3b}$

9.- Se define las operaciones: $a \# b = (a+b)*(a-b)$

$a*b = (a+b).(a-b)$

Entonces, hallar : $E = (4*5) + (5\#4)$

A) 29 B) 19 C) 0 D) 60 E) 71

10.- Hallar el valor de:

$[(2*3)*(4*2)]\ [(2*1)*(2*2)]$

Usando los valores de la tabla adjunta:

*	2	3	4	1
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Otro valor

11.- La operación $\widehat{n}$ es definida como :

$\widehat{n} = n(n+1)$

Entonces el valor de $\widehat{2}\,.\,\widehat{3}\,.\,\widehat{4}$ es :

A) 120 B) 240 C) 360 D) 720 E) 1 440

12.- Definimos :

$$a * b \begin{cases} a^2 + b & ; \text{ si } a > b \\ a + b & ; \text{ si } a < b \end{cases} ;$$

entonces, hallar : (2 * 3) * (3 * 2)

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

13.- Definamos la operación :

(a) = 2a ; si *a* es impar

(a) = a ; si *a* es par ó cero ;

hallar : ((3) + 7) - (6)

A) 25 B) -5 C) 16 D) 18 E) 20

14.- Si : $a \triangle b = 2a + 3b$;

hallar : $3 \triangle 4$

A) 18 B) 17 C) 15 D) 21 E) 23

15.- Sabiendo que para todo número impar *n*, se define :

$\overline{n|} = 1 + 3 + 5 + ... + n$

hallar el valor de : $\overline{35|}$ - $\overline{25|}$

A) 100 B) 600 C) 400 D) 425 E) 625

NIVEL B

16.- Se define la operación: $\boxed{x} = x^2 - 1$

¿Cuál es equivalente al producto de $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$?

A) $\boxed{12}$ B) $\boxed{9}$ C) $\boxed{11}$ D) $\boxed{10}$ E) $\boxed{7}$

17.- Se define: $m \circ n = \dfrac{2mn}{m+n}$

Luego, hallar: $x = \dfrac{30 \circ 42}{(2 \circ 6) \circ (12 \circ 20)}$

A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 12

18.- Sea la operación: $(x) = \dfrac{3x+2}{2x}$

Entonces, el valor de *x* en: ((x)) = *x* es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 3 E) Otro valor entero

19.- Se definen, las operaciones:

$\boxed{n} = 2n - 5$

(n) = 2 $\boxed{n}$

Hallar *x* en: $\boxed{x} = \boxed{(6)} - (\boxed{3})$

A) 17 B) 7 C) 15 D) 12 E) 19

20.- Si: $a * b * c = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$

Hallar "*x*" en: $\left(\dfrac{5*1*x}{7*9*x}\right) * 1 * 2 = \dfrac{7}{4}$

A) 3 B) 5 C) 2 D) 6 E) 4

21.- Se definen las operaciones:

(x) $= x^2 - 9$

(△x) $= x(x+6)$

Según esto hallar el valor de : △2 + △△3

A) 10 B) 14 C) 8 D) 1 E) 16

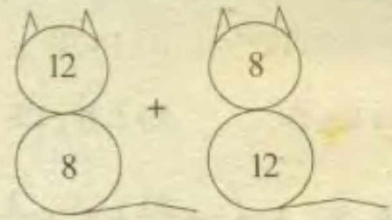
22.- Se define: $a \otimes b = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Calcular el valor de: $R = \dfrac{(2\otimes 3) \otimes (1\otimes 3)}{\left(\dfrac{1\otimes 3}{1\otimes 1}\right) \otimes (1\otimes 2)}$

A) 1 , 512 B) 2, 152 C) 5, 125
D) 5, 215 E) 1, 125

23.- Se define: (a + b) sobre (a - b) = *ab*

Entonces, hallar :



A) 20 B) 64 C) 0 D) 10 E) 6

24.- Para números enteros definimos las siguientes operaciones:

$a*b=a^2-b$; $a\#b=3a-b^2$; $a\Delta b=2a+3b$

Si: $x*x=12$; $y\#y=-10$

entonces el valor de: $x\Delta y$, con x, y positivos es:

A) 27 B) 18 C) 22 D) 19 E) 23

25.- Definimos la operación * según la tabla:

*	0	1	2
0	1	0	2
1	0	1	2
2	2	2	0

I) * es asociativa

II) * es conmutativa

III) * tiene elemento neutro

IV) si $(2*x)*1=1 \Rightarrow x+1=2$

Son verdaderas:

A) Sólo I B) Sólo II C) II y IV

D) II y III E) I, II y III

26.- Si : $a \heartsuit b = a^2 - b^2$; calcular :

$$[4 \heartsuit 1] \heartsuit [4 \heartsuit 2]$$

A) 64 B) 60 C) 56 D) 81 E) 49

27.- Se definen : $\textcircled{a} = \dfrac{2a+5}{3} - \dfrac{a+1}{4}$

$\boxed{b} = 3^b - b^3$

Además : $\textcircled{x} = 3{,}5$; $\boxed{y} = 1$

Calcular : $\boxed{x} - 16\,\textcircled{y}$

A) 48 B) 18 C) 72 D) 64 E) 82

28.- Hallar : $E = \sqrt{3*\sqrt{3*\sqrt{3*\ldots\ldots}}}$

Si : $a*b = 2b^2 - 3a$

A) 6 B) 7 C) 3 D) 12 E) 9

29.- Si : $\triangle(5x+1) = x$; hallar : $4\,\triangle(x) - \triangle(4x)$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 4 D) $-\frac{3}{5}$ E) $-\frac{2}{3}$

30.- Si : $\boxed{x} = 2(x-3)$

$\triangle(x) = 3(x-3)$

Hallar "x" en la siguiente ecuación :

$$\boxed{\triangle(x)} = \triangle\left(\boxed{5}\right) + \triangle(4)$$

A) 3 B) 5 C) 7 D) 6 E) 8

NIVEL C

31.- Sabiendo que: $\textcircled{x-1} = 3x+2$

$\boxed{x+1} = 3x-5$

Hallar la expresión equivalente a: $\boxed{\textcircled{x+2} - 8}$

A) $x+9$ B) $9x+1$ C) $3x-9$

D) $x+19$ E) $9x-1$

32.- Se define: $\overline{x|}\,a = x^a + x^{-a}$

Entonces hallar $\overline{x|}\,1$ sabiendo que $\overline{x|}\,4 = 7$

A) 3 B) 5 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$ E) 4

33.- Definimos las operaciones:

$$\hat{x} = \frac{1}{x} \ ; \ x\uparrow = x^x \ ; \ x\downarrow = \sqrt[x]{x}$$

Entonces hallar z en: $\hat{z} = \left[(\hat{2}\uparrow)(\hat{4}\uparrow)\right]\downarrow$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) Otro valor

34.- Se define: $\begin{cases} a*b = a \ ; \ \text{si } a > b \\ a*b = b \ ; \ \text{si } a \le b \end{cases}$

Entonces de las proposiciones:

I) $(a*b)*c = a*(b*c)$

II) $a*b = b*a$

III) $(5*4)*3 = 1*(5*2)$

Son verdaderas :

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III

D) I y II E) I, II, III

35.- Se definen las operaciones * y # con las tablas.

*	1	2	3	4
1	1	2	1	2
2	2	3	3	2
3	1	2	3	4
4	4	3	4	3

#	1	2	3	4
1	1	2	3	2
2	2	3	4	2
3	3	3	4	1
4	2	2	3	1

Se define:

I) Solo * es asociativa.

II) * y # son conmutativas

III) Solo * tiene elemento neutro

IV) El elemento neutro de # es 3

A) Sólo IV B) I y II C) Sólo III

D) II y IV E) I, II y III

36.- Si : $A = \left(x + \frac{1}{x}\right) + x^3 + \frac{1}{x^3}$; calcular : A(3)

A) 15 B) 27 C) 9 D) 12 E) 18

37.- Si : $\boxed{a+1} = 3a - 2$

$$\boxed{a*b} = 2\,\boxed{a-1} + 3b - 1$$

Hallar : $E = \boxed{\boxed{4} * \boxed{2}} + \boxed{8*2} + 4*6$

A) 27 B) 45 C) 24 D) 33 E) 36

38.- Se define : $a\,\theta\,b = a + b - 4$; hallar :

$$M = \left(2^{-1}\,\theta\,4\right)\,\theta\,\left(6^{-1}\,\theta\,8\right)$$

Donde a^{-1} elemento inverso de "a".

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

39.- Se define : $\sqrt{\dfrac{m*n}{m\cdot n}} = n*m$; calcular :

$$\left(\frac{1}{2}*\frac{1}{3}\right)*\frac{1}{6}$$

A) 1 B) 1/2 C) 2/3 D) 1/6 E) 3/2

40.- Si se cumple : $53*24 = 26$
$12*42 = 10$
$34*62 = 30$

Hallar "a" en : $\left(\overline{a5}*18\right)*59 = 73*32$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

41.- Sea : $a \Diamond b = \dfrac{a^2b + 15b}{4ab}$; $ab \neq 0$, y ,

$$L = 5 \Diamond [5 \Diamond [5 \Diamond [5 \Diamond \ldots\ldots]]]$$

Se define : $a \odot b = \begin{cases} a \ ; \ a \le b \\ 2b \ ; \ b < a \end{cases}$;

y: $M = 5 \odot [5 \odot [5 \odot .....(5 \odot 1)....]]$

Hallar: L + M

A) 5 B) 10 C) 7 D) 9 E) 13

42.- Se define :

*	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

Hallar "x" en :

$$(3 * 2) * (x * x) = (2 * 4) * [3 * (4 * 3)]$$

A) 1 B) 3 C) 2 y 3 D) 2 y 4 E) 1 y 3

43.- Se define en A = {1 ; 2 ; 3 ; 4}

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Calcular "x" :

$$\left[\left(2^{-1} * 3\right)^{-1} * x^{-1}\right] * \left[\left(4^{-1} * 2\right) * 4\right]^{-1} = 2$$

Donde x^{-1} : Elemento inverso de "x"

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

44.- En el conjunto A = {1 ; 2 ; 3 ; 4} se define la operación representada por * mediante la siguiente tabla :

*	3	1	4	2
4	3	1	4	2
1	2	4	1	3
2	1	3	2	4
3	4	2	3	1

a) Determinar si la operación es cerrada.

b) Hallar, si es que existen el elemento neutro y el elemento inverso de cada elemento.

c) Calcular: $A = \dfrac{3^{-1} * 2^{-1}}{4^{-1} * 1^{-1}}$

A) A = 1 B) A = 2 C) A = 3

D) A = 4 E) A = 5

45.- Consideremos el conjunto :

$$A = \{x \in N / x \leq 30\}$$

en el cual se define una operación representada por Δ mediante la siguiente tabla :

Δ	1	2	3	4
1	5	7	9	11
2	8	10	12	14
3	11	13	15	17
4	14	16	18	20

Calcular: $E = \dfrac{(5\Delta 3) + 4}{(7\Delta 2)}$

A) 2 B) 1 C) 1/2 D) 1/3 E) 2/5

46.- En la operación * definida según la tabla, determinar el elemento neutro.

*	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	1
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

47.- Definimos la operación (*) mediante:

*	p	n	m
p	p	p	n
n	p	n	m
m	n	m	m

Calcular: $E = (m * p^{-1}) * (n * m^{-1})^{-1}$

Nota: a^{-1} Elemento inverso de "a".

A) $n * m$ B) p^{-1} C) n D) e E) m

SISTEMAS MATEMATICOS ABSTRACTOS

Esta sección está dedicada a las reglas y leyes que obedecen los sistemas matemáticos abstractos. Para ilustrar las ideas involucradas se define al conjunto A = {a ; b ; c ; d ; e} y una operación * a la cual se le llamará "asterísco". La operación sobre el conjunto A puede estar definida por una tabla similar a la que se emplea para definir la adición de los números naturales, o la adición en base cinco. Suponga que la operación * se define por la *Fig.*1, entonces al efectuar la operación "asterísco" entre cualquier pareja de elementos, digamos b y c se encuentra el elemento que está en la fila b y en la columna c, como lo muestra la *Fig.*2.

Fig. 1

*	a	b	c	d	e
a	b	c	d	e	a
b	c	d	e	a	b
c	d	e	a	b	c
d	e	a	b	c	d
e	a	b	c	d	e

Fig. 2

*	a	b	c	d	e
a	b	c	d	e	a
b	c	d	e	a	b
c	d	e	a	b	c
d	e	a	b	c	d
e	a	b	c	d	e

Definición : *Un conjunto A es cerrado bajo la operación * si, para todo a y b en A, a * b también está en A.*

Intuitivamente, se dice que el conjunto A es cerrado bajo la operación * si ésta es siempre posible, y si no se incluyen nuevos elementos en la tabla que define a la operación.

Definición : *Una operación * definida sobre un conjunto A es asociativa si, para cualesquier a, b y c en A , se verifica que :*

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

***Ejemplo*.-** En la *Fig*. 1, se puede comprobar que :

a) $(a * b) * d = a * (b * d)$ b) $(c * a) * e = c * (a * e)$

¿A partir de estos ejemplos , puede concluirse que la operación * es asociativa?

La respuesta es negativa, porque aún no se verifican todas las posibilidades. Intente algunas otras posibilidades y diga si se puede decir que * es asociativa.

Definición : *Una operación * definida sobre un conjunto A es conmutativa si, para cualesquiera a y b en A.*

$$a * b = b * a$$

Por ejemplo, la intersección de conjuntos, es conmutativa porque para cualesquiera dos conjuntos A y B : A ∩ B = B ∩ A.

***Ejemplo* :** En la *Fig*. 1, se verifica que : a) $b * d = d * b$ b) $e * c = c * e$

¿De este ejemplo, puede concluirse que la operación * es conmutativa? La respuesta es negativa, porque aún no se comprueban todas las posibilidades. Sin embargo, como la mitad superior de la tabla es la reflexión de la mitad inferior a través de la diagonal (ver *Fig*. 1), la operación en el conjunto elegido A es conmutativa.

8 Habilidad Operativa

En este capitulo intento proporcionar al estudiante una técnica que le permita efectuar operaciones aritméticas con mayor rapidez que lo común , para lo cual he recopilado una serie de situaciones en las que hay que operar con números enteros, con números decimales, con expresiones algebraicas; abarcando además de las cuatro operaciones fundamentales, la potenciación y la radicación. Daré por sobreentendido el conocimiento básico de dichas operaciones.

I) CALCULO RAPIDO CON ENTEROS

Ejemplo1. Si se sabe que: $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 = 19\,958\,400$

¿Cuál es el valor de: $4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11$? (**10** ***segundos***)

Resolución:

No se tratará de multiplicar todos los números, sólo hay que notar entre otras cosas ,que el 1er producto tiene el factor 12, el cual no aparece en el 2do producto y éste tiene el factor 4 en lugar del 12.

Podemos decir que como 4 es la tercera parte de 12, el producto que se está buscando es la tercera parte del primero.

$$\therefore \quad 4 \times 5 \times ..... \times 10 \times 11 = 19\,958\,400 \div 3$$

$$= \mathbf{6\,652\,800} \qquad \textbf{RPTA.}$$

Ejemplo 2:¿Cuánto se obtiene al efectuar esta operación ? (**10** ***segundos***)

$$123 \times 366 + 177 \times 134 + 123 \times 134 + 177 \times 366$$

Resolución:

Agrupando el primero y el tercer producto:

• $123 \times (366 + 134) = 123 \times 500$

Agrupando ahora el segundo y el cuarto producto:

$177 \times (134 + 366) = 177 \times 500$

Procedemos igual con los productos obtenidos:

$$123 \times 500 + 177 \times 500 = (123 + 177) \times 500$$

$$= 300 \times 500$$

$$= \mathbf{150\,000} \qquad \textbf{RPTA.}$$

I) OPERACIÓN MATEMÁTICA

Ejemplo 3: El número $N = 2^{48} - 1$, es exactamente divisible por dos números que están comprendidos entre 60 y 70. ¿Cuál es la suma de estos números?

Resolución:

Del álgebra elemental sabemos que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ y al aplicar transformaciones sucesivas de este tipo al número N tendremos:

$$N = 2^{48} - 1 = (2^{24} - 1)(2^{24} + 1) = (2^{12} - 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1)$$

$$= (2^6 - 1)(2^6 - 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1)$$

$$= (63)(65)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1)$$

De este resultado vemos que N es divisible por 63 y 65 los cuales se encuentran comprendidos entre 60 y 70 , y que nos piden sumar.Luego:

$63 + 65 =$ **128** **RPTA.**

Ejemplo 4: Hallar la raíz cuadrada de:

$$x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

Resolución:

Aunque te parezca que no quiero contestar la pregunta, debemos, contradictoriamente, elevar al cuadrado:

$$x^2 = \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2 - 2\sqrt{3+2\sqrt{2}}\ \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= 3 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} + 3 - 2\sqrt{2}$$

$$= 6 - 2\sqrt{9-8} = 6 - 2 = 4$$

Entonces : $x = \sqrt{x^2} = \sqrt{4} = 2$

Y finalmente : $\sqrt{x} = \sqrt{2}$ **RPTA.**

Como te habrás dado cuenta, hay una serie de cálculos que no son del todo previsibles a primera vista, incluso algunos de ellos están precedidos de una "intriga" antes de dar el primer paso, el cual debe darse sin meditar demasiado. Para no cometer errores de estrategia, solo conviene arriesgar, y a modo de entrenamiento te sugiero practicar con los problemas que a continuación te propongo, para ello, primero intentalos tú y luego observa su resolución.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- ¿Cuántos dígitos tiene el producto $2^{12} \times 5^8$?

A) 9 *B) 10* *C) 11* *D) 12* *E) más de 12*

Resolución:

Es más facil contar los dígitos de un número cuando se le expresa asociado a potencias de 10. Así a los números dados los formamos con factores de 2 y 5 obteniéndose :

$$N = 2^{12} \times 5^8 = 2^4 \times 2^8 \times 5^8 = 16 \times 10^8$$

El valor de N es 16 seguido de 8 ceros, en total tiene 10 dígitos.

$N = 16\ 000\ 000\ 000$ RPTA. B

2.- ¿En cuánto aumenta el producto 682 x 318 si se aumenta cada factor en 1?

A) 1 *B) 318* *C) 682* *D) 1 000* *E) 1 001*

Resolución:

Considerando : $a = 682$ y $b = 318$, los productos antes y después quedarán representados así:

$$P = ab$$

$$P' = (a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1$$

Vemos que el segundo producto excede al primero en : $a + b + 1$. Este es el aumento pedido:

$682 + 318 + 1 =$ 1 001. RPTA. E

3.- Relacionar con su correspondiente divisor:

I) 167 324 *a) 37*
II) 825 147 *b) 9*
III) 453 875 *c) 25*
IV) 777 777 *d) 4*

	I	I	III	IV
A)	d	a	c	b
B)	d	b	c	a
C)	d	a	b	c
D)	a	b	c	d
E)	b	a	c	d

Resolución:

I) Termina en 24, y por tanto es divisible por 4 : **Id**

II) Tiene como suma de cifras 27,luego es divible por 9 : **II b**

III) Termina en 75, que es múltiplo de 25 : **III c.**

IV) Es 777 × 1 001 , divisible por 37 : **IVa.** **RPTA. B**

NOTA .-*Todos los números de la forma $\overline{aaa}$ son múltiplos de 37*

4.- Hallar el valor de x si : $\sqrt[5]{3}\,.\sqrt[5]{3^3}\,.\sqrt[5]{3^5}\ ......\ \sqrt[5]{3^{2x+1}} = 243$

A) 6 *B) 5* *C) 3* *D) 4* *E) 2* ***UNMSM 92***

Resolución:

Efectuando transfomaciones elementales:

$$3^{\frac{1}{5}}.3^{\frac{3}{5}}.3^{\frac{5}{5}}......3^{\frac{2x+1}{5}} = 3^5$$

Y trabajando con los exponentes, tendremos :

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{5}{5}+\ ....\ +\frac{2x+1}{5} = 5$$

$$1 + 3 + 5 +\ ....\ + (2x + 1) = 25$$

El # de términos de la suma es: $\dfrac{(2x+1)-1}{2} + 1 = x + 1.$

Por fórmula tenemos:

$$\left(\frac{1+2x+1}{2}\right)(x + 1)= 25 \quad \Rightarrow \quad x + 1= 5$$

$$x = 4$$ **RPTA. D**

5.- Si $f(x - 2) = 2^x$, calcular el valor de: $M = \left[\dfrac{f(x)}{f(x-2)}\right]^{\frac{1}{4}}$

A) $\sqrt{4}$ *B)* $\sqrt[4]{2}$ *C)* $\sqrt[4]{3}$ *D) 5* *E)* $\sqrt{2}$ ***UNMSM 94***

Resolución:

Para hallar $f(x)$ procedemos de esta manera:

$$f(x-2) = 2^x$$

$$f(\ldots\ldots -2) = 2^{\ldots\ldots}$$

En lugar del espacio conviene poner $x + 2$ (para obtener x)

$$f(x+2-2) = 2^{x+2}$$

$$f(x) = 2^{x+2}$$

Luego : $M = \left[\dfrac{2^{x+2}}{2^x}\right]^{\frac{1}{4}} = \left[\dfrac{2^x.2^2}{2^x}\right]^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{2}}$ RPTA. E

6.- En los siguientes resultados el signo⊕ no significa exactamente suma, pero representa algo parecido:

2 ⊕ 1 = 5 ;

3 ⊕ 4 = 25 ;

10 ⊕ 10 = 200 ;

entonces hallar (7 ⊕ 7) + (1 ⊕ 1)

A) 50 B) 60 C) 80 D) 75 E) 100

Resolución:

De los datos notamos que ⊕ significa "suma de cuadrados"

$$a \oplus b = a^2 + b^2$$

Luego: $7 \oplus 7 = 7^2 + 7^2 = 98$ y $1 \oplus 1 = 1^2 + 1^2 = 2$

Entonces : $98 + 2 = \boxed{100}$ RPTA. E

7.- En : a.b.c = 1 001, cada letra representa un número primo diferente. ¿Cuál es el valor de a + b + c?

A) 31 B) 3 C) 29 D) 27 E) 37

Resolución:

1 001 es el producto de 3 números primos:

$1\,001 = 7 \times 11 \times 13$

de donde : $7+11+13 = \boxed{31}$ RPTA. A

8.- Dado el producto: $P = 10^{\frac{1}{11}} . 10^{\frac{2}{11}} . 10^{\frac{3}{11}} .... 10^{\frac{n}{11}}$ ***; el menor valor de n para que el producto de los n factores exceda a 100 000 es:***

A) 7 *B) 8* *C) 9* *D) 10* *E) 11*

Resolución:

Como 100 000 = 10^5, la suma de exponentes debe ser mayor que 5.

$$\frac{1+2+3+.......+n}{11} = \frac{n(n+1)}{22} > 5$$

Luego debe cumplirse que : $n(n + 1) > 110$

Esta desigualdad se verifica para $n = 11 ; 12 ; 13 ; .... ;$etc.

El menor de estos valores es **11.** RPTA. E

9.- Si: $\frac{2x^2 - 3x + 7}{x(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-4}$ ***; entonces el valor de 2 (A + B + C) es:***

A) 4 *B) 2* *C) 6* *D) 8* *E) N.A* *UNFV 90*

Resolución:

Operando en el segundo miembro tendremos:

$$\frac{A(x-3)(x-4)+Bx(x-4)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x-4)}$$

El numerador de la expresión obtenida debe ser indéntico al que posee el de la izquierda.

$\therefore \quad A(x-3)(x-4) + Bx(x-4) + Cx(x-3) = 2x^2 - 3x + 7$

Si: $x = 4 \Rightarrow 4C = 27 \Rightarrow C = \frac{27}{4}$

Si $x = 3 \Rightarrow -3B = 16 \Rightarrow B = \frac{-16}{3}$

Si $x = 0 \Rightarrow 12A = 7 \Rightarrow A = \frac{7}{12}$

Entonces: $2(A + B + C) = 2\left(\frac{7}{12} - \frac{16}{3} + \frac{27}{4}\right) =$ **4** RPTA. A

10.- Al simplificar la expresión: $\left[\dfrac{6\times 4^{m}}{4^{2m+1}+2^{4m+1}}\right]^{m^{-1}}$ **; se tiene:**

A) $\dfrac{m}{4}$ *B)* $\dfrac{2m^2}{5}$ *C)* $\dfrac{m+1}{4}$ *D)* $\dfrac{1}{4}$ *E) 4* ***UNFV 93***

Resolución:

$$\frac{6\times 2^{2m}}{2^{4m+2}+2^{4m+1}}=\frac{6\times 2^{2m}}{2^{4m}(2^2+2)}=2^{-2m}$$

Finalmente: $\left(2^{-2m}\right)^{\frac{1}{m}}=2^{-2}=\boxed{\dfrac{1}{4}}$ RPTA. D

11.- Si el polinomio : $11x^2+41x-12$, se factoriza en la forma: (Ax↓ B) (Cx↑ D), donde A, B, C, y D son números enteros positivos con A > C, y las flechas representan operaciones aritméticas, hallar el valor de: (A ↑ B) ↓ (C ↑ D).

A) 3 *B) 5* *C) 17* *D) 9* *E) 11* ***PUCP 95 - II***

Resolución:

Factorizamos por aspa simple:

$11x^2+41x-12 \quad \rightarrow \quad (11x-3)(x+4)$

$11x \quad -3 \qquad (Ax\downarrow B)\,(Cx\uparrow D)$

$x \quad\;\; 4$

Comparando con la forma dada y recordando que $A > C$, tenemos:

$A=11$; $B=3$; $C=1$; $D=4$; $\downarrow\;=\;-$; $\uparrow\;=\;+$

Finalmente $(11+3)-(1+4)=\boxed{9}$ RPTA. D

12.- La siguiente expresión: $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-4\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

A) Es un número entre 3 y 4

B) Es un número entre 4 y 5

C) Es igual a 5

D) Es un número entre 2 y 3

E) Es igual a 4

PUCP 93 - II

Resolución:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - 4.\frac{\sqrt{6}}{2} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{6}$$

$$= 3 + 2\sqrt{6} + 2 - 2\sqrt{6} = \boxed{5}$$ RPTA.C

13.- Si: $x = (1 + (1 + y^{1/2})^{1/2})^{1/2}$; si el valor de y es 1 ; ¿cuál es el valor de la cuarta potencia de de x ?

A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ B) $\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})$ C) $1+2\sqrt{3}$ D) 3 E) $3+2\sqrt{2}$

Resolución:

Expresando los exponentes como radicales:

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = \sqrt{1+\sqrt{2}}$$

$$x^2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$x^4 = (1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = \boxed{3 + 2\sqrt{2}}$$ RPTA. E

14.- Si se efectúa 2137^{753}, la cifra de las unidades en el producto final es:

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Resolución:

Sabemos que $7^1 = 7$; $7^2 = ...9$; $7^3 = ...3$; $7^4 = ...1$ esto quiere decir que las cifras terminales de las potencias de 7 se repiten de 4 en 4 en este orden: 7, 9, 3 y 1.

Como $753 = 188 \times 4 + 1$, la cifra terminal buscada es la misma que para la primera potencia: $\boxed{7}$ RPTA. D

15.- El valor numérico de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ en $x = 1{,}001$ es:

A) 3, 002 002 001 B) 5, 006 004 001 C) 2, 002 002 001

D) 2, 000 000 001 E) 2, 001 001 001 UNMSM 90

Resolución:

Modificamos la regla de correspondencia de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2 = (x - 1)^3 + 2$$

Luego: $f(1,001) = (1,001 - 1)^3 + 2 = 0,001^3 + 2$

$$= 2 + 0,000\,000\,001$$

$$= \boxed{2,000\,000\,001}$$ RPTA. D

16.- La raíz cuadrada de la diferencia entre los números decimales 0, 109 375 y 0, 09375 expresada también en forma decimal es:

A) 0, 05 *B) 0, 15* *C) 0, 25* *D) 0, 125* *E) 0, 375*

Resolución:

Primero la diferencia: 0, 109 375 - 0, 093 75 = 0, 015 625

Expresada como fracción: $\frac{15625}{10^6} = \frac{25^3}{10^6}$

$$\sqrt[3]{\frac{25^3}{10^6}} = \frac{25}{100} = 0{,}25$$ RPTA. C

17.- Si $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+......}}}$ ***entonces la afirmación verdadera es:***

A) $x = 1$ *B) x es infinitamente grande* *C)* $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

D) $0 < x < 1$ *E)* $1 < x < 2$ ***UNMSM 94***

Resolución:

Después de elevar al cuadrado, tenemos:

$$x^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+ ......}}$$

La sucesión de radicales es la misma expresión x.

$$x^2 = 1 + x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$$

Resolviendo por la fórmula general (ec. de segundo grado):

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

El valor obtenido es aproximadamente : $x = \frac{1+2.23}{2} = 1,615$ RPTA. E

18.- De $x^x = 2^{24}$; $y^y = 3^{18}$; ***hallar*** x^{y-x}.

A) 512 *B) 21 6* *C) 8* *D) 81* *E) ninguna*

Resolución:

$$x^x = 2^{3\times 8} = (2^3)^8 = 8^8 \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

$$y^y = 3^{18} = 3^{2\times 9} = 9^9 \quad \Rightarrow \quad y = 9$$

Luego $x^{y-x} = 8^{9-8} = 8$ RPTA. C

19.- Si: $\dfrac{a^2}{b} = \dfrac{a}{b^2} = \dfrac{a^3}{b^3}$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I) $a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + b^4} = 3$

II) $\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{b + \sqrt{b} + 1}{\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1}\right)^2$

III) $\dfrac{a}{b} = \sqrt{\dfrac{a+1}{b+1}}$

A) I y II ***B) Sólo III*** ***C) II y III*** ***D) I y III*** ***E) Todas***

Resolución:

Primero hallamos los valores de a y b :

De $\dfrac{a^2}{b} = \dfrac{a^3}{b^3}$ tenemos $a = b^2$ ..... (1)

De $\dfrac{a^2}{b} = \dfrac{a}{b^2}$ tenemos $ab = 1$ ..... (2)

Reemplazando (1) en (2): $b^3 = 1 \Rightarrow b = 1$, luego $a = 1$

En las expresiones dadas, incluímos estos valores para así determinar la veracidad o falsedad de ellas:

I) $1 + 1 + \sqrt{2} = 3$ .... Falsa

II) $\dfrac{1}{1} = \left(\dfrac{1+1+1}{1+1+1}\right)^2$ .... Verdadera

III) $\dfrac{1}{1} = \sqrt{\dfrac{1+1}{1+1}}$ .... Verdadera **RPTA. C**

20.- Sabiendo que:

$$A = \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}}}} \quad ; \quad B = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{2}}}$$

; ***calcular el valor de*** $A^2 - B^2$.

A) 48 ***B) 50*** ***C) 60*** ***D) 124*** ***E) 572***

Resolución:

$$A=\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}^{2}}=\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}^{2\times 2}=\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}^{4}=\sqrt{2}^{6}=8$$

$$B=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{2}}=\sqrt{2}^{2}=2.$$

Entonces : $A^2 - B^2 = 64 - 4 =$ **60** RPTA. C

21.- Tenemos: $A=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; $B=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$; $C=(A.B)^{\frac{1}{2}}$; se puede afirmar que:

A) $A<B<C$ B) $A>B=C$ C) $A<C<B$ D) $A=B=C$ E) $A=B<C$

Resolución:

$$A=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B=\sqrt[4]{\frac{1}{4}}=\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$A=B=C$ RPTA. D

22.- De las iguientes proposiciones:

I) $(2222)^2 - (2221)^2 = 1$

II) $2^{\frac{1}{2}}\left(2+2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2-2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=2$

III) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{18}+\sqrt{8}\right)^{2}=28$

¿Cuál o cuáles no son verdaderas?

A) Solo I B) Solo II C) Solo III D) I, II, III E) I y III

Resolución:

I) Por diferencia de cuadrados se obtiene:

$$(2222 + 2221)(2222 - 2221) = 4443 \times 1 = 4443$$

II) $\sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2}.\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$$= \sqrt{2}.\sqrt{4-2} = \mathbf{2}$$

III) $\left(\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 72$

Solo II es verdadera , I y III no son verdaderas **RPTA. E**

23.- En la expresión: $(nx)^x = n^{n^n}$; el valor de x en términos de n es:

A) n^{-n} ***B)*** n^n ***C)*** n^{n-1} ***D)*** n^{1-n} ***E) N.A***

Resolucion:

Elevamos a la n: $(nx)^{nx} = \left(n^{n^n}\right)^n$

$$\Rightarrow \quad (nx)^{nx} = (n)^{n.n^n} = \left(n^n\right)^{n^n}$$

Por comparación: $nx = n^n$

$$x = n^{n-1}$$ **RPTA. C**

24.- Si: $a = b + 1$; reducir: $k = (a + b)(a^2 + b^2) + b^4$

A) $2b^4$ ***B)*** $2a^4$ ***C)*** a^4 ***D) 0*** ***E) N.A***

Resolución:

Del dato: $1 = a - b$

Entonces: $k = (1)(a + b)(a^2 + b^2) + b^4$

$$k = \underbrace{\underbrace{(a - b)(a + b)}_{a^2 - b^2}(a^2 + b^2)}_{a^4 - b^4} + b^4 = a^4$$

RPTA. C

25.- Si: $x < 0$, hallar su valor sabiendo que: $A^2 - AB + B^2 = 4$;

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad ; \quad B = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

A) $\frac{6}{8}$ **B)** $\frac{5}{8}$ **C)** $\frac{8}{5}$ **D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{8}{3}$ ***PUCP 95 - II***

Resolución:

De los datos: $A + B = \frac{2}{\sqrt{x}}$

$$AB = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2 = \frac{1}{2x}$$

El otro dato lo podemos tomar en función de $A + B$ y AB.

$$(A^2 - AB + B^2) + 2AB - 2AB = 4$$

$$(A + B)^2 - 3AB = 4$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 - 3 . \frac{1}{2x} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{3}{2x} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2x} = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{8}$$

RPTA. B

26.- Si : $1{,}023 \times 10^x = \underbrace{0{,}000.......001023}_{(n+1)\ cifras}$; calcular : $2x + 6$

A) n **B)** $2n$ **C)** $3n$ **D)** $4n$ **E)** $5n$

Resolución:

Expresemos el 2do miembro en notación científica : $1{,}023 \times 10^x = 1{,}023 \times 10^{n+1-4}$

Simplificando, encontramos : $10^x = 10^{n+1-4}$

Igualando los exponentes , tendremos : $x = n - 3$

Multiplicando por 2 : $2x = 2n - 6$

Transponiendo términos : $2x + 6 = 2n$

RPTA. B

27.- Hallar "x" en : $\sqrt{21+\sqrt{12+\sqrt{14+\sqrt{x}}}} = 5$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

Elevando al cuadrado sucesivamente : $21 + \sqrt{12+\sqrt{14+\sqrt{x}}} = 25$

Transponiendo términos , tendremos : $\sqrt{12+\sqrt{14+\sqrt{x}}} = 4$

Elevando al cuadrado y transponiendo términos : $\sqrt{14+\sqrt{x}} = 4$

Repitiendo el mismo proceso : $\sqrt{x} = 2$

$\therefore$ $x = 4$ RPTA. A

28.- Si : a + b + c = 0 ; hallar : $\left(\frac{b}{a}\right)^{-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} - \left(\frac{ab}{c^2}\right)^{-1}$

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

Resolución:

Efectuando las potencias de exponente negativo : $E = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c^2}{ab}$

$E = \frac{a^2+b^2-c^2}{ab}$ .... (1)

De los datos sabemios que : $a + b = -c$

Elevando al cuadrado , se tiene : $a^2 + 2ab + b^2 = c^2$

Transponiendo términos : $a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$ .... (2)

Si reemplazamos (2) en (1) : $E = \frac{-2ab}{ab} = -2$ RPTA. D

29.- Si : $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \wedge x - y = 24$ **; hallar :** $x + y$

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

Resolución:

A partir del dato : $x - y = 24$, expresaremos el primer miembro en función de una diferencia de cuadrados obteniéndose :

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\underbrace{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}_{4}=24$$

Luego se pueden establecer las siguientes ecuaciones : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=6$

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=4$$

De donde podemos reconocer que : $\sqrt{x}=5 \wedge \sqrt{y}=1$

Es decir : $x+y=$ **26** RPTA. A

30.- Si : $x-y=y-z=\sqrt[6]{6}$; calcular el valor de : $A=\dfrac{(x-z)^6-(y-z)^6+(x-y)^6}{66}$

A) 1 B) 3 C) 6 D) 9 E) 11

Resolución:

Del primer dato reconocemos que : $x-y=\sqrt[6]{6}$; $y-z=\sqrt[6]{6}$

Sumando miembro a miembro : $x-y+y-z=2\sqrt[6]{6}$

$$\Rightarrow \quad x-z=2\sqrt[6]{6}$$

Reemplazando , se tendrá : $A=\dfrac{\left(2\sqrt[6]{6}\right)^6+\sqrt[6]{6}^{\,6}+\sqrt[6]{6}^{\,6}}{66}$

Efectuando se tiene : $A=\dfrac{64\cdot 6+6+6}{66}=$ **6** RPTA. C

31.- Si : $x-\dfrac{1}{x}=2$; hallar la suma de las cifras del resultado de : $x^{12}+\dfrac{1}{x^{12}}$

A) 38 200 B) 39 202 C) 40 204 D) 41 208 E) 42 210

Resolución:

Elevamos al cuadrado al dato propuesto : $x^2-2x\,.\,\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=4$

Efectuando y simplificando, obtenemos : $x^2+\dfrac{1}{x^2}=6$

De nuevo al cuadrado : $x^4+2\,.\,x^2\,.\,\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}=36$

Efectuando y simplificando, obtenemos : $x^4+\dfrac{1}{x^4}=34$

Ahora elevamos al cubo : $x^{12} + \frac{1}{x^{12}} + 3 \cdot \cancel{x^4} \cdot \frac{1}{\cancel{x^4}} \underbrace{\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)}_{34} = 34^3$

$$x^{12} + \frac{1}{x^{12}} + 3 \cdot 1 \cdot 34 = 39\,304$$

$$x^{12} + \frac{1}{x^{12}} = \boxed{39\,202} \quad \text{RPTA. B}$$

32.- Siendo : ab = 3 , a ≠ - b , $(a+b)^3 + a^3 + b^3 = 23\,(a+b)$; calcular : $(a+b)^2$

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

Resolución:

Por productos notables ,se sabe que : $(a+b)^3 - 3\,ab\,(a+b) = a^3 + b^3$

Reemplazando esto en la 2da igualdad : $(a+b)^3 + (a+b)^3 - 3\,\underbrace{ab}_{3}\,(a+b) = 23\,(a+b)$

Efectuando y transponiendo se tendrá : $2\,(a+b)^3 = 32\,(a+b)$

Simplificando se tendrá : $(a+b)^2 = \boxed{16}$

RPTA. A

33.- Si : .... 23518 ÷ 99999 = $\overline{ABCDE}$; calcular : $\overline{AD} - \overline{BC}$

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

Resolución:

Haciendo $\overline{ABCDE} = x$; $99999 = 10^5 - 1$

La igualdad propuesta se transforma en : $(10^5 - 1)\,x = ...23\,518$

Efectuando operaciones , obtenemos : $10^5 \cdot x - x = ...23\,518$

Transponiendo el término x, obtenemos : $10^5 \cdot x = ...23\,518 + x$

Esta operación se puede escribir así :

```
       ..... 2 3 5 1 8 +
                A B C D E
 ABCDE00000
```

De aqui deducimos que : E = 2 ; D = 8 ; C = 4 ; B = 6 ; A = 7

$\therefore \quad \overline{AD} - \overline{BC} = 78 - 64 = \boxed{14}$ RPTA. D

34.- Si : $3a + 2b + c = 0$; calcular : $A = \left(\dfrac{a+c}{a+b}\right)^{\left(\frac{b-c}{a+b}\right)}$

A) -4 *B) -6* *C) -8* *D) -10* *E) -12*

Resolución:

En base al dato podemos establecer las siguientes equivalencias :

1ro) $2a + 2b + a + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a+c}{a+b} = -2$

2do) $3a + 3b - b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 3(a+b) = b - c$

$$\Rightarrow \quad \frac{b-c}{a+b} = 3$$

3ro) Reemplazando , tendremos : $A = (-2)^3 = -8$ **RPTA. C**

35.- Si se sabe que : $xy = 2$

$yz = x$

$zx = y$

Calcular : $E = \dfrac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2}{xyz}$

A) 1 *B) 3* *C) 5* *D) 7* *E) 9*

Resolución:

Reescribiendo la expresión dada , se tiene que : $E = \dfrac{\left(\frac{x}{y}\right)^2}{xyz} + \dfrac{\left(\frac{y}{z}\right)^2}{xyz} + \dfrac{\left(\frac{z}{x}\right)^2}{xyz}$ ....(*)

En la 1ra fracción se tiene : $\dfrac{\left(\frac{x}{y}\right)^2}{xyz} = \dfrac{\left(\frac{x}{y}\right)^2}{z^2} = \left(\dfrac{x}{yz}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{x}\right)^2 = 1$

Del mismo modo, se obtiene 1 en las otras fracciones; con lo cual se logra establecer que :

$E = 1 + 1 + 1 = 3$ **RPTA. B**

36.- Calcular "x" ; si : $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{5x+4} = 16^{5x+4}$

A) $-\dfrac{4}{5}$ *B)* $\dfrac{5}{3}$ *C)* $\dfrac{7}{2}$ *D)* $\dfrac{1}{2}$ *E)* $\dfrac{9}{2}$

Resolución:

A partir de la ecuación dada , se tiene : $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x+4} = 16^{5x+4}$

Efectuando en el primer miembro: $\frac{1}{3^{5x+4}} = 16^{5x+4}$

Transponiendo términos : $1 = 3^{5x+4} \cdot 16^{5x+4}$

Efectuando en el segundo miembro : $1 = 48^{5x+4}$

La última igualdad solo se cumple si : $5x + 4 = 0$

Esto significa que : $x = -\frac{4}{5}$ **RPTA. A**

37.- Reducir : $\frac{2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}}{2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3}}$

A) 8 *B) 10* *C) 12* *D) 14* *E) 16*

Resolución:

Por teoría de exponentes se tiene que : $E = \frac{2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3}{2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^{-2} + 2^x \cdot 2^{-3}}$

Factorizando 2^x arriba y abajo : $E = \frac{2^x(2+4+8)}{2^x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)}$

Luego de simplificar: $E = \frac{14}{\frac{7}{8}} = \frac{14 \cdot 8}{7} = 16$ **RPTA. E**

38.- Si : $(nx)^x = n$; ***calcular :*** $\left(x + \frac{1}{x}\right)^7$

A) 122 *B) 124* *C) 128* *D) 130* *E) 132*

Resolución:

A la primera igualdad la elevamos m.a.m. a la potencia "n" : $(nx)^{nx} = n^n$

Por analogía , descubrimos que : $nx = n$

Luego de simplificar , obtenemos : $x = 1$

Entonces reemplazamos en la expresión dada : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^7 = (1+1)^7 = $ **128** RPTA. C

39.- Calcular la suma de cifras del resultado de : $1234321^2 - 1234310^2$

A) 24 *B) 26* *C) 28* *D) 30* *E) 33*

Resolución:

Recordando la diferencia de cuadrados : $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

Reconocemos que : $1234321^2 - 1234310^2 = (1\,234\,321 + 1\,234\,310)(11)$

$= (2\,468\,631)(11)$

$= 27\,154\,941$

Finalmente la Σ cifras del resultado es : **33** RPTA. E

40.- Hallar : x^{x^x} ; si : $x^{(x+1)^x} = 512$

A) 13 *B) 16* *C) 19* *D) 21* *E) 23*

Resolución:

Reconociendo que 512 es una potencia de base 2 : $x^{(x+1)^x} = 2^9 = 2^{3^2}$

Por comparación se observa que : $x = 2$

Luego el valor de lo solicitado será : $x^{x^x} = 2^{2^2} = 2^4 = $ **16**

RPTA. B

41.- ¿A qué exponente hay que elevar 4^4 para obtener 4^{4^4} ?

A) 16 *B) 64* *C) 4* *D) 8* *E) 4^4*

Resolución:

Sea x el exponente, entonces : $\left(4^4\right)^x = 4^{4^4}$

Igualando exponentes : $4x = 4^{4^4} \Rightarrow$ **$x = 64$** RPTA. B

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- El número 31 se puede obtener combinando el número 3. ¿Cuál de las expresiones siguientes es la combinación correcta?

A) $3^3 + 3 \times 3 - 3$

B) $(3+3).3 + 3 \times 3$

C) $(3+3)^3 - 3^3$

D) $3^3 + 3 + \frac{3}{3}$

E) $3^3 + \frac{3+3}{3}$

2.- ¿Cuál de las siguientes expresiones es menor que 5?

A) $\frac{5}{5} + 5 - \frac{5}{5}$

B) $5 + \frac{5\times5}{5} - 5$

C) $\frac{5(5\times5)}{5+5}$

D) $\frac{5+5+5}{5+5}$

E) $\frac{5\times5\times5}{5\times5}$

3.- Si $1+2+3+ \ldots\ldots + 8+9+10 = 55.$

Entonces $341+342+\ldots\ldots+349+350 = ?$

A) 3 455 B) 3 355 C) 3 555

D) 3 505 E) 3 405

4.- Los números enteros del 1 al 9 se colocan en los casilleros de la figura de manera que la suma de 3 enteros en cualquier línea horizontal, vertical o diagonal sea siempre 15.

x		
	5	7
	y	2

Entonces la suma de los enteros que corresponden a los lugares x é y es:

A) 15 B) 12 C) 17

D) 13 E) 9

5.- Si: $A \times B = 36$; $B \times C = 36$;
$C \times D = 24$; $D \times B = 96$.

¿Cuánto es $A \times B \times C \times D$? ¿Cuánto es $A+B+C+D$?

A) 518 ; 19 B) 864 ; 26 C) 724 ; 32

D) 624 ; 19 E) 864 ; 32

6.- Entre los números 2^{20} y un *millón*. ¿Cuál de las respuestas es verdadera?

A) $2^{20} <$ un *millón*

B) $2^{20} >$ un *millón*

C) $2^{20} =$ un *millón*

D) 2^{20} - un *millón* $= 10^2$

E) No se puede determinar

7.- Para cualquier entero x ; $\widehat{x}$ es definido como la suma de todos los factores de x mayores que 1 y menores que x.

Entonces, hallar: $R = \widehat{21} + \widehat{18}$

A) 39 B) 40 C) 30 D) 29 E) otro valor

8.- Si: $\frac{a+b}{a-b} = 1$; $y = \frac{a+c}{a-c} = 5$

Entonces $\frac{abc}{a+c} = ?$

A) 5 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

9.- Se tiene un conjunto 5 pesas que tienen respectivamente estos valores: 1, 3, 5, 7, 10 kg. Empleando exactamente 3 pesas de este conjunto es posible medir cualquiera de estos pesos: 9 kg, 13 kg, 16 kg, 8 kg, excepto:

A) 9 kg B) 13 kg C) 16 kg

D) 8 kg E) Todos se pueden pesar

10.- La expresión: $\frac{444^{-1} + 444^{-2}}{444^{-2}}$

es igual a:

A) 45 B) 445 C) 44 D) 444 E) 443

11.- La raíz cuadrada de 12321 es un número cuya suma de cifras es igual a :

A) 3 B) 10 C) 11 D) 4 E) 7

12.- Efectuar : $999 \times 1001 - 997 \times 1003$

A) 44 B) 22 C) 8 D) 1000 E) 998

13.- Si : $x = 3/4$; $y = 1/8$; ¿Cuál relación es verdadera?

A) $xy = \frac{3}{16}$ B) $x + y = \frac{7}{32}$ C) $\frac{x}{y} = \frac{1}{6}$

D) $x - y = \frac{5}{8}$ E) $x = 3y$

14.- Hallar el equivalente de :

$$\sqrt{250+\sqrt{25+\sqrt{81+40}}}$$

A) 36 B) 25 C) 20 D) 16 E) 4

15.- En cuánto excede 3^6 a 6^3

A) 360 B) 216 C) 513 D) 512 E) 215

16.- Al restar del número 1295 otro más pequeño, obtuve como diferencia 837, pero como me equivoqué al escribir el sustraendo me salieron en la resta 85 unidades de menos. ¿Cuál era la suma de cifras del verdadero sustraendo?

A) 9 B) 21 C) 18 D) 15 E) 13

NIVEL B

17.- De las siguientes expresiones. ¿Cuáles son verdaderas?

I) $\sqrt{(37,7)^2 - (15,2)^2} = 34,5$

II) $2^{14} - 2^{10} = 15\,360$

III) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+......}}} = 3$

A) Sólo I B) II y III C) Sólo III

D) I y II E) Todas

18.- Sabiendo que $x = 1/4$, hallar el valor de:

$$E = \left[x^x + \sqrt{x^{\sqrt{x}}}\right]^8$$

A) 4 B) 8 C) 16 D) 64 E) N.A

19.- Si: $\sqrt{rs} = 8$, siendo r y s, enteros positivos, señale el valor que no podría ser posible para la expresión $r - s$.

A) 0 B) 10 C) 12 D) 30 E) 63

20.- La distancia que la luz recorre en un año es aproximadamente de nueve billones cuatrocientos sesenta mil ochocientos millones de *kilómetros*. Según esto, la distancia que la luz recorre en 100 años es de:

A) $94\,608 \times 10^8\ km$

B) $94\,608 \times 10^{16}\ km$

C) $94\,608 \times 10^{15}\ cm$

D) $94\,608 \times 10^{11}\ m$

E) Ninguna de las anteriores

21.- Dada la expresión:

$$2^{2n+1} - k^{3/8} = 2^{2n} \quad ;$$

hallar el valor de k, para $n = 3/4$.

A) 16 B) 8 C) 1/4 D) 25 E) N.A

22.- Hallar "n" en la igualdad:

$$\sqrt[0,1]{0,2} \times \sqrt[0,3]{0,04} = \sqrt[n]{5}$$

A) 1 B) $\frac{3}{50}$ C) $-\frac{50}{3}$ D) $-\frac{3}{50}$ E) $\frac{50}{3}$

23.- Si: $a + b = 5$; $ab = 2$

Calcular $E = \dfrac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$

A) 4 B) 5 C) $\frac{45}{13}$ D) $\frac{95}{21}$ E) $\frac{19}{21}$

24.- Si: $a=0{,}2^3\times 0{,}3^3$; $b=0{,}08\times 0{,}0027$;

$c=0{,}008\times 0{,}3^3$

Entonces, ¿Cuál de las afirmaciones es cierta?

A) $a>b=c$ B) $a<b=c$ C) $a=b>c$

D) $a=b<c$ E) $a=b=c$

25.- Si: $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=0$;

hallar el valor de :

$$M=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$$

A) -1 B) 1 C) 3 D) -3 E) N.A

26.- Si: $(a+b)^2=b^2+ab$;

calcular a^3+b^3.

A) $2a^3$ B) $2b^3$ C) ab D) $\frac{a}{b}$ E) 0

27.- Se tiene un número de tres dígitos que comienza en 5 y acaba en 2; si dichos dígitos son cambiados por 1 y 8 respectivamente. ¿En cuánto habrá disminuído dicho número?

A) 388 B) 432 C) 406 D) 280 E) 394

28.- Evaluar la siguiente expresión :

$$E=(a-3b)^2-4b(2b-a)+8 \ ;$$

si se cumple que : $a-b=8$

A) 96 B) 64 C) 72 D) 60 E) 48

29.- Calcular : $x^{1998}+x^{-1998}$; si : $\sqrt[3]{x^5}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}=2$

A) 1 B) 2 C) 16 D) 4 E) 1/2

30.- Si : $a^8+a^{-8}=194$; calcular : $a-a^{-1}=$?

A) 2 B) $\sqrt{5}$ C) 3 D) $\sqrt{2}$ E) 4

31.- Si : $4^x-9^{y^2}=55$; hallar : $x-y$, si además:

x é $y\in \mathbb{Z}^+$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

NIVEL C

32.- Calcular el valor de: $\left(\frac{y}{x}+1\right)^3+\left(\frac{x}{y}+1\right)^3$

Sabiendo que: $x+y=3\sqrt{xy}$

A) 3^3 B) 3^5+3^5 C) 3^4+3^4

D) 3^4 E) 3^6+3^6

33.- Dé la mejor aproximación para:

$$\frac{(0{,}1667)(0{,}8333)(0{,}3333)}{(0{,}2222)(0{,}6667)(0{,}1250)}$$

A) 2,00 B) 2,40 C) 2,43

D) 2,50 E) 3,43

34.- Hallar la raíz cúbica de:

$$3\,238\times 4\,138+4\,138\times 2\,761+5\,999\times 2861$$
$$+6\,999\times 4\,001-5\,990\,000$$

A) 1 200 B) 300 C) 400

D) 900 E) 1 000

35.- El valor estimado de la siguiente expresión :

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{3}-0{,}6}}{\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{0{,}6}}$$

A) Es casi cero

B) Se acerca a infinito

C) Es la unidad

D) Aproximadamente 6

E) Tiene un valor indeterminado

36.- Entre estas expresiones :

$2^{1/2}$, $3^{1/3}$, $8^{1/8}$, $9^{1/9}$; la de mayor valor es :

A) La primera D) La cuarta

B) La segunda E) No se puede precisar

C) La tercera

37.- Si : $2x - y = z$

$y - z = x$;

calcular: $E = \left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{z^2}\right)^{\frac{4z}{x}}$

A) 144 B) 169 C) 196 D) 81 E) 100

38.- Si : $x^{x^5} = 5$; calcular :

$$E = x^{x^{x^{x^{x^5}}}} + x^{x^{x^{x^5}}} + x^{x^{x^5}} + x^{x^5} + x^5 + 5$$

A) 25 B) 125 C) 20 D) 30 E) 45

39.- Calcular el valor de x^x ; si :

$$\sqrt{\sqrt[x]{x}} = \sqrt[4]{2}$$

A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 9

40.- Calcular el valor numérico de :

$$A = x^{2x^{2x^x} + x - 2x^x} ;$$

si : $\left(x^{x^x}\right)^2 . x^{2x^x} = 16$

A) 32 B) 30 C) 36 D) 16 E) 64

41.- Si : $a^2 + \dfrac{1}{a^2} = 7$; hallar : "E" ;

$$E = a^3 + \frac{1}{a^3}$$

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

42.- Hallar $(n+1)^4$ en : $\sqrt{\sqrt{2}.\sqrt{\sqrt{2}.\sqrt{2^n}}} = \sqrt[4]{2}$

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

43.- Si : $a + b + c = 0$; calcular la suma de las cifras de A :

$$A = \overline{\underbrace{xxxx.......xx}_{100 \text{ cifras}}}^2 ;$$

sabiendo además que : $x = \dfrac{a^2}{bc} + \dfrac{b^2}{ac} + \dfrac{c^2}{ab}$

A) 90 B) 989 C) 99 D) 900 E) 199

44.- Si : $x = \dfrac{1}{a-b}$, $y = \dfrac{1}{a+b}$; efectuar :

$$M = \left[\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right]\left[\frac{ab}{a^2+b^2}\right]$$

A) 1 B) 2 C) 1/2 D) 1/4 E) 4

45.- Hallar "x" , siendo : $x , y \neq 0$; y además :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{x+y}$$

$$\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^{-n}} = 1$$

A) $\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}}$ B) 2^n C) 1 D) 4^n E) $\sqrt[n]{4}$

46.- Calcular la suma de las cifras del resultado de :

$$\sqrt{10305050301} + \sqrt{2040604020}$$

A) 10 B) 9 C) 12 D) 6 E) 8

CURIOSIDADES NUMERICAS

Posiblemente alguna vez habrás leído la expresión «la familia de los números enteros» hablando del conjunto de estos números. Yo también lo he leído. Y aunque parezca un chiste, es verdad que se trata de una familia «numerosa».

Y naturalmente, como en toda familia, hay individuos serios, formales y otros que parecen anormales o un poco locos, como veremos.

Dejando al número 4, incrustado entre números primos como si fuera un extraño, llegamos pronto al número 8 que hasta en la figura arábiga que manejamos tiene un extraño tipo, digno de las anormalidades que vamos a ver. Es el primer número cuyas extrañas afinidades consideraremos. Efectivamente, véanse las excentricidades de sus productos sucesivos :

1×8=8			8
2×8=16	1+6=		7
3×8=24	2+4=		6
4×8=32	3+2=		5
5×8=40	4+0=		4
6×8=48	4+8=12	1+2=	3
7×8=56	5+6=11	1+1=	2
8×8=64	6+4=10	1+0=	1
9×8=72	7+2=		9
10×8=80	8+0=		8
11×8=88	8+8=16	1+6=	7
12×8=96	9+6=15	1+5=	6
13×8=104	1+0+4=		5
14×8=112	1+1+2=		4

etcétera, etc.

Es algo casi increíble. Porque no tenía por qué aparecer repetida esa sucesión decreciente al sumar las cifras de los resultados. Todo esto es algo que excede a toda previsión matemática.

Si seguimos curioseando con el resto de los números naturales encontraremos nuevos e interesantes casos. Por ejemplo : Una nueva rareza es lo que ocurre con el 8 caprichoso.

Véanse las siguientes coincidencias que nada tienen que ver con las operaciones que has estudiado hasta aquí, pero que ahí están de hecho, con una regularidad que puede tenerse por anormal, como si alguien se hubiera entretenido en prepararlo todo para que así sucediera contra todo pronóstico.

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

Si no fuera tan fácil de comprobar, sería difícil de admitir. Siguiendo en la familia de los enteros, no hay que caminar mucho para encontrar otro número caprichoso. Sin pararnos a averiguar conexiones con otros números de la misma familia, que sin duda las habrá, el mismo 9, con su estampa de cuadrado perfecto, símbolo de la formalidad numérica, también presenta algo que parece inexplicable dada su reiterada aparición en las operaciones.

$$0 \times 9 + 1 = 1$$
$$01 \times 9 + 2 = 11$$
$$012 \times 9 + 3 = 111$$
$$0123 \times 9 + 4 = 1111$$
$$01234 \times 9 + 5 = 11111$$
$$012345 \times 9 + 6 = 111111$$
$$0123456 \times 9 + 7 = 1111111$$
$$01234567 \times 9 + 8 = 11111111$$
$$012345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

etcétera.

No se piense que estos son los únicos ejemplos de números extraños por sus coincidencias. Pero tampoco es cosa de proponerlos todos. Si te has interesado por estas cuestiones, conocerás sin duda otras coincidencias y relaciones parecidas que aparecen en obras especializadas.

También entre las potencias podemos encontrar curiosidades notables, como las siguientes que hemos seleccionado :

$$1^2 = 1$$
$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$1111^2 = 1234321$$
$$11111^2 = 123454321$$
$$111111^2 = 12345654321$$
$$1111111^2 = 1234567654321$$
$$11111111^2 = 123456787654321$$
$$111111111^2 = 12345678987654321$$

verdadera máquina de hacer capicúas.

Y aunque no se da tal regularidad en los resultados, véase este ejemplo de números que a priori podríamos considerar como los formales de la familia :

$$9^2 = 81$$
$$99^2 = 9801$$
$$999^2 = 998001$$
$$9999^2 = 99980001$$
$$99999^2 = 9999800001$$
$$999999^2 = 999998000001$$
$$9999999^2 = 99999980000001$$
$$99999999^2 = 9999999800000001$$
$$999999999^2 = 999999998000000001$$

No se puede hacer otra cosa que constatar que sucede así, porque no hay razón matemática ninguna que obligue a repetir esas numeraciones.

Pero vamos a ver ahora otra clase de números verdaderamente lunáticos. No ofrecen síntomas de rareza o coincidencia curiosa ninguna hasta que se relacionan con numerosos parientes, es decir, números enteros en determinadas condiciones, como veremos.

El primero de ellos es el 37, de aspecto adusto, formal y poco comunicativo, como buen número primo que es, pero que no soporta su multiplicación por los diversos términos de la progresión : 3 , 6 , 9 , 12 , 15 , ... porque parece enfadarse de ser tan serio y comienza a proporcionar productos tan notables, que están formados por una cifra repetida.

Haz la prueba y asómbrate de estas peculariedades. Y no paramos aquí : estos productos formados por cifras repetidas tienen nuevas curiosidades: sumadas sus cifras iguales dan el mismo número por el que se multiplicó el 37. Véase :

$$37 \times 9 = 333 \Rightarrow 3 + 3 + 3 = 9$$

$$37 \times 15 = 555 \Rightarrow 5 + 5 + 5 = 15$$

9 Teoría de Conjuntos

Entenderemos por conjunto a la reunión, agrupación, agregado, clase o colección de objetos que reciben el nombre de *elementos* o *miembros* del conjunto. La característica esencial de un conjunto es que debe estar bien determinado, esto es, dado un objeto particular, se podrá establecer con claridad si dicho objeto es o no un elemento del conjunto.

Hay tres maneras en que se puede determinar un conjunto: Dando una descripción verbal de sus elementos, haciendo un lista enumerando sus elementos o usando una propiedad "*definitoria*" que permita describirlo en notación compacta o constructiva.

Ejemplo:

Descripción verbal: {el conjunto de números naturales menores que 5}

Por enumeración: {1; 2; 3; 4}

Por notación constructiva: $\{x/x < 5,\ x \text{ es natural}\}$

PERTENENCIA (∈) Un elemento pertenece a un conjunto si forma parte de él. La relación de pertenencia vincula a un elemento con su conjunto, no a elementos entre sí, ni a conjuntos.Cabe advertir además, que un conjunto, a su vez puede ser elemento de otro conjunto, esto significa que el identificar un objeto como elemento no lo excluye de ser un conjunto él mismo.

INCLUSION(⊂) Un conjunto está incluído en otro cuando todos los elementos del primero lo son también del segundo.

CONJUNTO NULO O VACIO.- Esta se denota por ∅ ó por { }, y es aquel conjunto que carece de elementos.

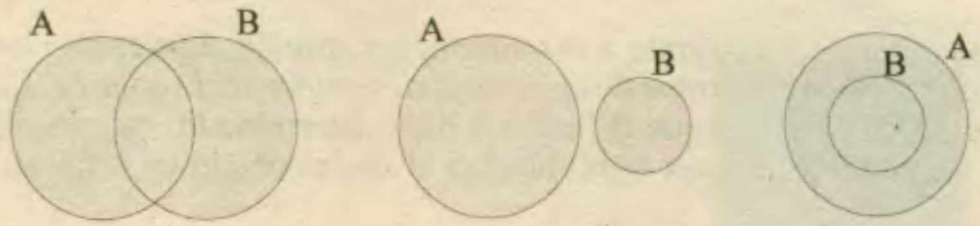
CONJUNTO POTENCIA: Está integrado por todos los subconjuntos de un conjunto dado. Si se trata de un conjunto A cuyo número de elementos es n (A) ó *cardinal de* A, entonces el número de elementos o cardinal de su conjunto potencia **P** (A), será aquella potencia de 2 cuyo exponente es n (A).

$$n\,[P(A)] = 2^{n(A)}$$

D. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

UNION (A∪B): Se forma con los elementos que pertenecen a **A** o a **B**, es decir que son comunes o no comunes.

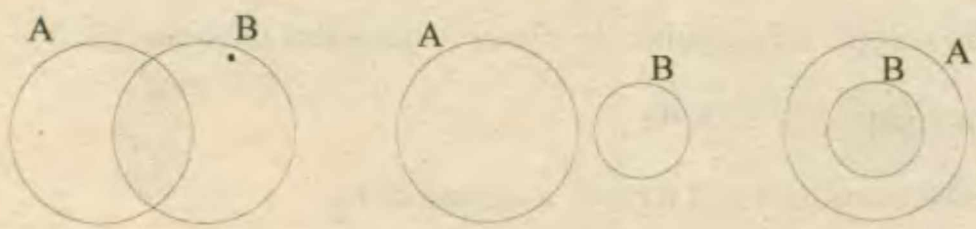
$$A \cup B = \{x / x \in \quad ó \quad x \in B\}$$



A ∪ B **A ∪ B** **A ∪ B = A**

INTERSECCION (A∩B): Se forma con los elementos comunes de **A** y **B**.

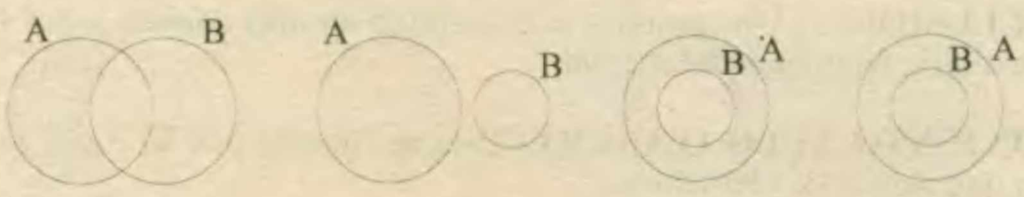
$$A \cap B = \{x / x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}$$



A ∩ B **A ∩ B= ∅** **A ∩ B = B**

DIFERENCIA (A - B): Se forma con los elementos que pertenecen a **A**, pero no a **B**.

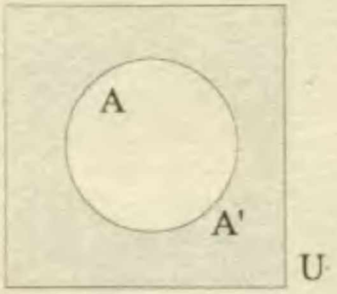
$$A - B = \{x / x \in A \ \text{ y } \ x \notin B\}$$



A – B **A – B = A** **A – B** **B – A = ∅**

COMPLEMENTO (A'): Se forma con los elementos que no pertenecen a **A**. Es la diferencia entre el conjunto Universal(U) y el conjunto A. También se denota por $\complement_A$ ó A_c

$$A' = U - A = \{x / x \notin A\}$$



Propiedades:

$U' = \varnothing$

$\varnothing' = U$

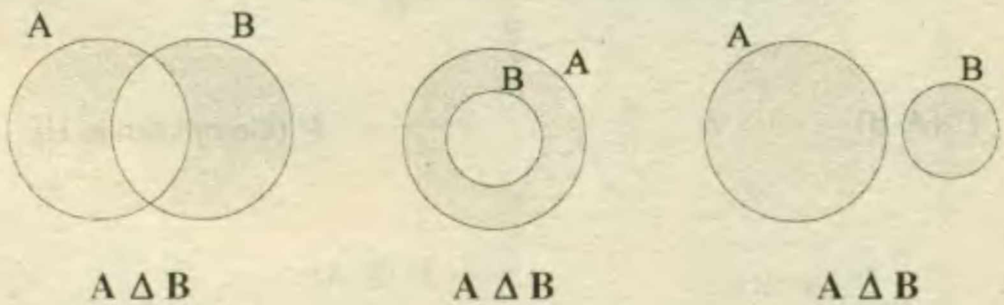
$(A')' = A$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

DIFERENCIA SIMETRICA ($A \Delta B$): Se forma con los elementos que pertenecen a A o a B pero no a ambos.

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$



Observaciones.-

1) Llamaremos *conjunto unitario* a aquel cuyo número de elementos es igual a uno.

2) Dados dos conjuntos A y B se verifica que :

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Dados los conjuntos:

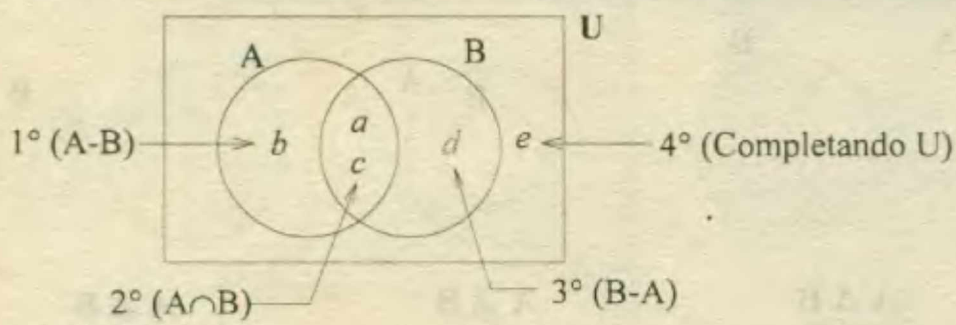
$U = \{a; b; c; d; e\}$
$A \cup B = \{a; b; c; d\}$
$A \cap B = \{a; c\}$ $\qquad$ $A - B = \{b\}$

Hallar: $(A' - B) \cup (B' - A)$

A) {a; c; d} B) {a; c; e} C) {c; e} D) {e} E) {a; b}

Resolución:

Según los datos, anotamos los elementos en un diagrama y siguiendo un orden.



$A' - B = \{d; e\} - \{a; c; d\} = \{e\}$

$B' - A = \{b; e\} - \{a; b; c\} = \{e\}$ RPTA. D

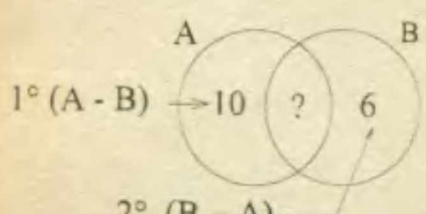
2.- "n" significa número de elementos o cardinal, entonces siendo A y B dos conjuntos tales que:

$n(A \cup B) = 24$
$n(A - B) = 10$
$n(B - A) = 6$

El valor de : $5n(A) - 4n(B)$ **, es:**

A) 42 B) 26 C) 56 D) 28 E) 34

Resolución:



Los elementos que faltan (?), están dados por la diferencia:

$24 - (10 + 6) = 8$

De aquí : $n(A) = 10 + 8 = 18$

$n(B) = 8 + 6 = 14$

Finalmente: $5 \times 18 - 4 \times 14 = 90 - 56 = 34$ RPTA. E

3.- Dados los conjuntos:

$A = \{2; 3; 5\}$; $B = \{4; 2; 5\}$; $C = \{2; 3; 4; 5\}$

Determine la validez (V ó F) de las siguientes proposiciones:

I) $A \cap B = A \cap C$

II) $[(B \cup C) \cap (A - B)] \subset A$

III) $A \Delta B = C - (A \cap B)$

A) FVV B) FFV C) VVV D) VFV E) FVF

Resolución:

I) $A \cap B = \{2; 3; 5\} \cap \{4; 2; 5\} = \{2; 5\}$

$A \cap C = \{2; 3; 5\} \cap \{2; 3; 4; 5\} = \{2; 3; 5\}$ .... (Falso)

II) $(B \cup C) \cap (A - B) = C \cap \{3\} = \{3\} \subset A$ .... (Verdadero)

III) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$= C - (A \cap B)$ .... (Verdadero) **RPTA. A**

4.- Sean : $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{1; 2\}$; $C = \{2; 3; 4\}$

∩	A	B	C
A			
B			
C			

Al completar la tabla ¿cuántos de sus casilleros son conjuntos unitarios?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Resolución:

La tabla completa quedaría según como se muestra: Son unitarios los casilleros $B \cap C$ y $C \cap B$

RPTA. C

∩	A	B	C
A	A	B	{2,3}
B	B	B	{2}
C	{2, 3}	{2}	C

5.- Dados los conjuntos unitarios:

$P = \{x + y, 8\}$;

$Q = \{y + z, 10\}$;

$S = \{x + z, 12\}$

Calcular : $x + 4y - z$

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12 UNFV 96

Resolución:

Para que cada conjunto sea unitario: $x + y = 8$
$y + z = 10$
$x + z = 12$

De lo cual deducimos que : $x + y + z = 15$

de donde : $x = 5$; $y = 3$; $z = 7$

Entonces : $x + 4y - z = 5 + 12 - 7 =$ **10** RPTA. C

6.- El conjunto A tiene 3 elementos menos que el conjunto B, que posee 7 168 subconjuntos más que A, el máximo número de elementos de A ∪ B será:

A) 30 *B) 11* *C) 13* *D) 23* *E) 16*

Resolución:

$n(A) = x$; $n(B) = x + 3$

$2^{x+3} - 2^x = 7\,168 \Rightarrow 2^x(2^3 - 1) = 7\,168$

$\Rightarrow 2^x(8 - 1) = 7\,168 \Rightarrow 2^x = 1\,024$

$\therefore x = 10$

El máximo número de elementos de $A \cup B$ es: $n(A) + n(B)$.

$n(A) + n(B) = 10 + 13 =$ **23** RPTA. D

7.- Sean A = {1; 2; 3; 4; 5} ; B = {1; 2} ; C = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}

El número de subconjuntos X de C que verifican A ∩ X = B es:

A) 2 *B) 4* *C) 6* *D) 7* *E) 8*

Resolución:

Los subconjuntos X son:

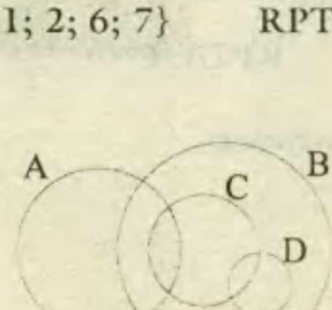
{1; 2} ; {1; 2; 6} ; {1; 2; 7} y {1; 2; 6; 7} RPTA. B

8.- En el gráfico , la región sombreada es:

I) [A - (B - C)] ∪ (C ∩ D)

II) (A ∪ B) - (B - C)

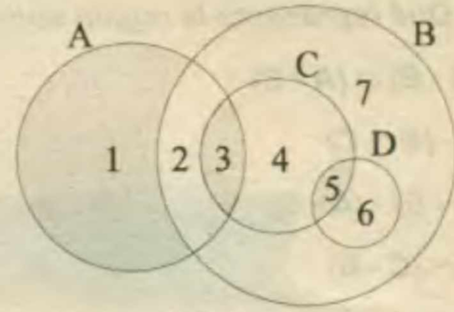
III) [(A ∪ D) - C] ∪ (A ∩ C)



A) Sólo I *B) II y II* *C) Sólo II* *D) I y III* *E) I y II*

Resolución:

Anotamos números en cada parte del diagrama y operamos :



I) A - (B - C) = {1; 2; 3} - {2; 6; 7} = {1; 3}
C ∩ D = {5}

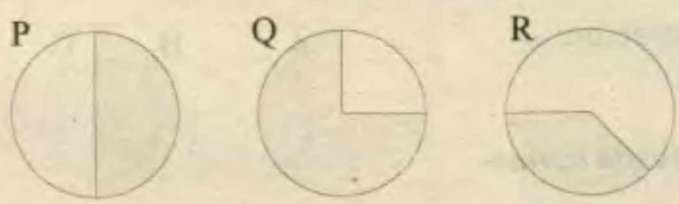
Luego: {1; 3} ∪ {5} = {1; 3; 5} ⇒ es la región sombreada.

II) (A ∪ B) - (B – C) = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7} - {2; 6; 7}
= {1; 3; 4; 5} ⇒ no es la región sombreada

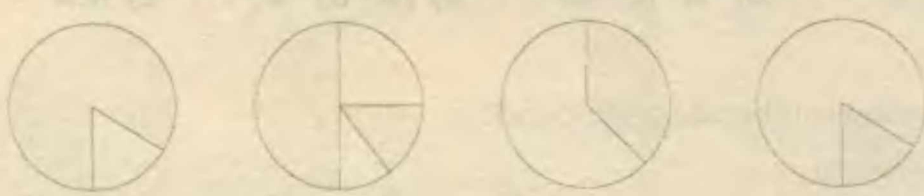
III) {1; 2; 6} ∪ {3} = {1; 2; 3; 6} ⇒ no es la región sombreada

RPTA. A

9.- Si las regiones sombreadas representan a tres conjuntos:



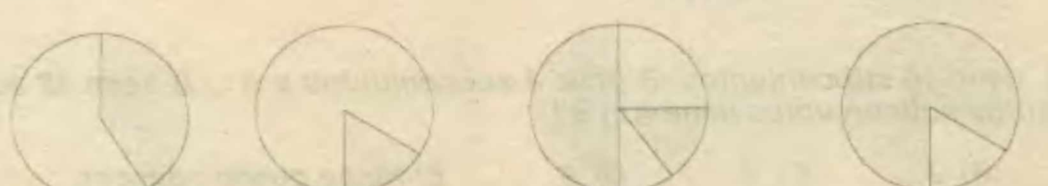
El gráfico que corresponde a la operación (P - R) ∪ [Q - (R ∩ P) es:



(A) (B) (C) (D) E) N.A UNFV 91

Resolución:

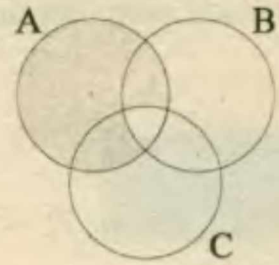
En forma gráfica:



P - R R ∩ P Q- (R ∩ P) (P - R) ∪[Q -(R ∩ P)]

RPTA. A

10.- ¿Qué representa la región sombreada?



A) $(A - B) \cup (A - C)$

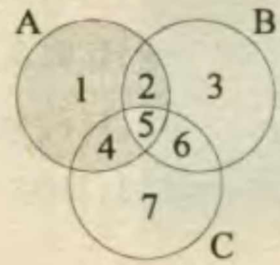
B) $A - (B \cap C)$

C) $(A - B) - (A - C)$

D) $A \cap (C - B)$

E) Más de una es verdadera.

Resolución:



Analizando los distractores según los números anotados, tendremos:

A) $\{1; 4\} \cup \{1; 2\} = \{1; 2; 4\}$

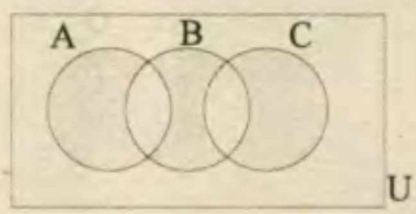
B) $\{1; 2; 4; 5\} - \{5; 6\} = \{1; 2; 4\}$

Luego las proposiciones A y B representan a la región sombreada **RPTA. E**

11.- Definimos la siguiente operación:

$A * B = (A - B)' \cap (B - A)'$

Entonces la región sombreada corresponde a:



A) $(A \cup C) * B$ B) $A * C$ C) $A * (B * C)$ D) $(A - B) * C$. E) N.A

Resolución:

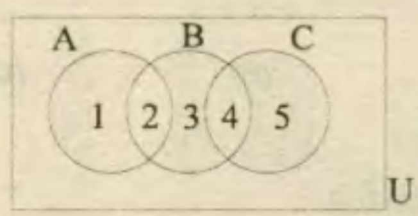
Podemos demostrar que la región sombreada corresponde a:

$A * (B * C) = A * [(B - C)' \cap (C - B)']$

$= A * \{1; 4; 5; 6\} \cap \{1; 2; 3; 4; 6\}$

$= \{1; 2\} * \{1; 4; 6\}$

$= \{1; 3; 5\}$ RPTA. C



12.- Si A tiene 16 subconjuntos, B tiene 8 subconjuntos y $A \cup B$ tiene 32 subconjuntos ¿Cuántos subconjuntos tiene $A \cap B$?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) No se puede conocer PUCP 95 - II

Resolución:

$16 = 2^4 \Rightarrow n(A) = 4$; $B = 2^3 \Rightarrow n(B) = 3$

$32 = 2^5 \Rightarrow n(A \cup B) = 5$

De la información anterior, podemos hallar $n(A \cap B)$, aplicando:

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 2$$

Luego $A \cap B$ tendrá 2^2 = **4 subconjuntos** RPTA. C

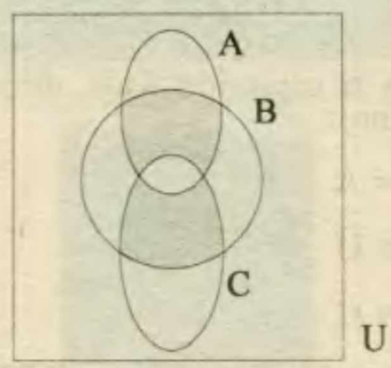
13.- ¿Cuántas de las siguientes expresiones le corresponde al diagrama?

I) $[(C \cap B) - A] \cup [(A \cap B) - C]$

II) $(C' \cap B) \cup [(A - B) \cup C']$

III) $(C - B)' \cap [(A \cup B) - C]$

A) *I* ***B)*** *II* ***C)*** *III* ***D)*** *I y III* ***E)*** *Todas*



PUCP 93 - II

Resolución:

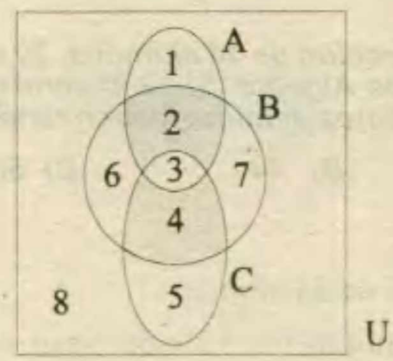
Sólo (I) corresponde al diagrama:

$(C \cap B) - A = \{3; 4\} - \{1; 2; 3\} = \{4\}$

$(A \cap B) - C = \{2; 3\} - \{3; 4; 5\} = \{2\}$

$[(C \cap B) - A] \cup [(A \cap B) - C] = \{2; 4\}$

RPTA. A



14.- ¿Cuál de las siguientes expresiones pertenecen a:

$\complement [(A \cup \complement_B) \cap \complement_A]$

A) $(\complement_A \cup \complement_B) \cup A$ ***B)*** $(\complement_A \cup \complement_B) \cap B$ ***C)*** $(A \cup B) \cap B$

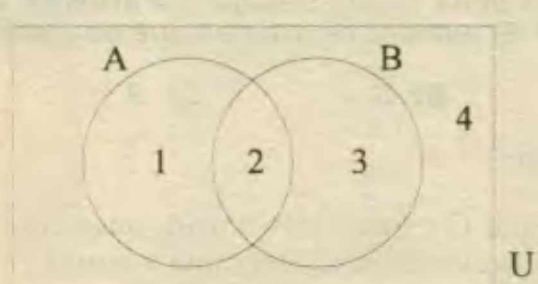
D) $A \cup (\complement_A \cap B)$ ***E)*** *El conjunto universal*

Resolución:

Simplificamos la expresión:

$A \cup B' = \{1; 2; 4\}$

$A' = \{3; 4\}$



$\complement[(A \cup B') \cap A'] = \complement\{4\} = \{1; 2; 3\} = A \cup B.$

Entre las alternativas, corresponde a $A \cup B$ la D:

$A \cup (A' \cap B) = \{1; 2\} \cup \{3\} = \{1; 2; 3\}$ RPTA. D

15.- Si: $A \subset C$ y $A \cap B = \varnothing$, al simplificar la expresión:

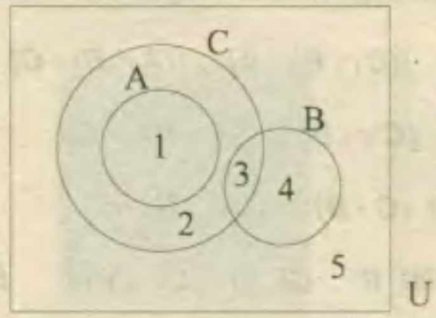
$$[A \cap (C - B)] \cup [(\complement_A \complement_B) \cap (C - A)]$$

Se obtiene:

A) A *B) B* *C) C* *D) ∅* *E) U*

Resolución:

Simplificamos la expresión dada, de acuerdo al diagrama adjunto:



$A \cap (C - B) = A$

$\complement_A \cup \complement_B = U$

$U \cap (C - A) = C - A = \{2; 3\}$

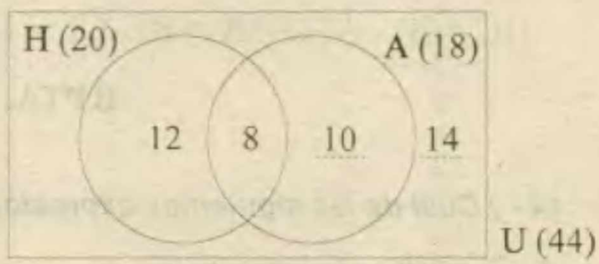
Finalmente: $A \cup \{2; 3\} =$ **C** RPTA. C

16.- En una sección de 44 alumnos, 20 deben rendir examen de Historia y 18 deben rendir examen de Algebra. Si 12 alumnos deben rendir Historia pero no Algebra, se desea saber cuantos alumnos deben rendir por lo menos un examen.

A) 36 *B) 44* *C) 50* *D) 20* *E) 30*

Resolución:

El universo es de 44 *alumnos*.



Primero se anotan los 12 que están en Historia(H) pero no en Algebra(A), luego se anotan los 8 que faltan para completar H.

El resto es fácil, pues el grupo de alumnos que rindió al menos un examen viene dado por $H \cup A$:

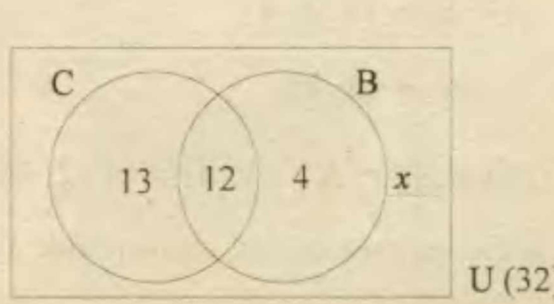
$n(H \cup A) = 12 + 8 + 10 =$ **30** RPTA. E

17.- En una peña criolla trabajan 32 artistas. De éstos, 16 bailan, 25 cantan y 12 cantan y bailan. El número de artistas que no cantan ni bailan es:

A) 4 *B) 5* *C) 2* *D) 1* *E) 3* ***UNMSM 87***

Resolución:

Sabiendo que C cantan y B bailan, anotamos los datos y deducciones en el diagrama adjunto:



$13 + 12 + 4 + x = 32$

$x = 3$

RPTA. E

18.- En un salón de postulantes hay 58 alumnos, 36 piensan seguir ingeniería, 24 piensan seguir ciencias y sólo 13 piensan estudiar letras; el número que piensan ser ingenieros y científicos es:

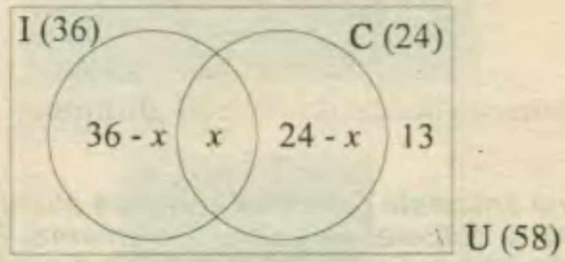
A) 13 *B) 15* *C) 17* *D) 18* *E) 19* ***UNFV 94***

Resolución:

$(36 - x) + x +$

$+ (24 - x) + 13 = 58$

$x = 15$



RPTA. B

19.- De los 300 integrantes de un club deportivo, 160 se inscribieron en natación y 135 en el gimnasio. Si 30 no se incribieron en ninguna de las dos especialidades. ¿Cuántos se inscribieron en ambas disciplinas?

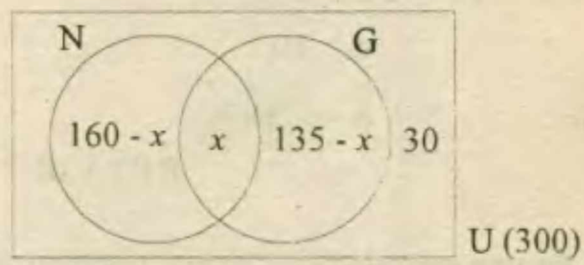
A) 25 *B) 30* *C) 55* *D) 0* *E) 5* ***PUCP 95 - II***

Resolución:

Del diagrama:

$160 + (135 - x) + 30 = 300$

$x = 25$



RPTA. A

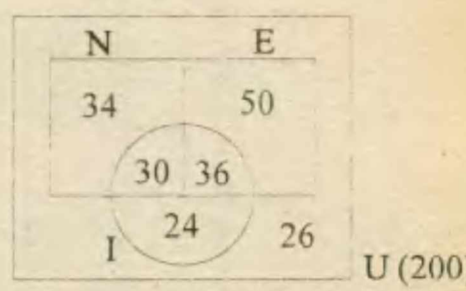
20.- Entre la información referida a 200 turistas se sabe que 64 eran norteamericanos, 86 eran europeos, 90 eran ingenieros, de estos últimos, 30 eran norteamericanos y 36 europeos. ¿Cuántos turistas de los que no son europeos no eran norteamericanos ni ingenieros?

A) 22 *B) 24* *C) 23* *D) 26* *E) 25*

Resolución:

La solución se muestra en el diagrama.

26 no son europeos E, ni norteamericanos N, ni ingenieros I.



RPTA. D

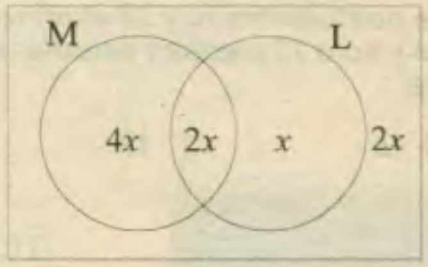
21.- De 180 alumnos de la UNFV el número de los que estudian Matemática es el doble de los que estudian Lenguaje. El número de alumnos que estudian ambos cursos a la vez es el doble de los estudian sólo Lenguaje e igual a los que no estudian algunos de esos cursos. ¿Cuántos alumnos estudian solo Matemática?

A) 20 *B) 40* *C) 80* *D) 120* *E) 140* ***UNFV 95***

Resolución:

De acuerdo con los datos:

$$2x + 4x + 2x + x = 180$$
$$9x = 180$$
$$x = 20$$



Solo Matemática llevan: $4x =$ **80 alumnos** RPTA. C

22.- En una encuesta realizada entre los alumnos de un centro de idiomas, se determinó que 18 % estudiaban alemán solamente, 23% estudiaban alemán pero no inglés, 8 % alemán y francés, 26 % alemán, 48% francés, 8% francés e inglés, 24% ninguno de los 3 idiomas. ¿Qué % estudiaban inglés?

A) 24% *B) 18%* *C) 36%* *D) 20 %* *E) N.A*

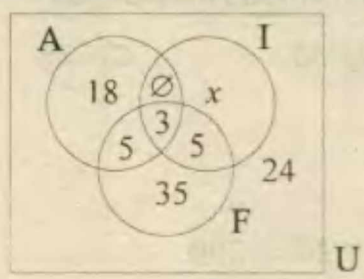
Resolución:

El universo debe ser 100 %

$$26 + x + 40 + 24 = 100$$
$$x = 10$$

Inglés: $x + 3 + 5 =$ **18%**

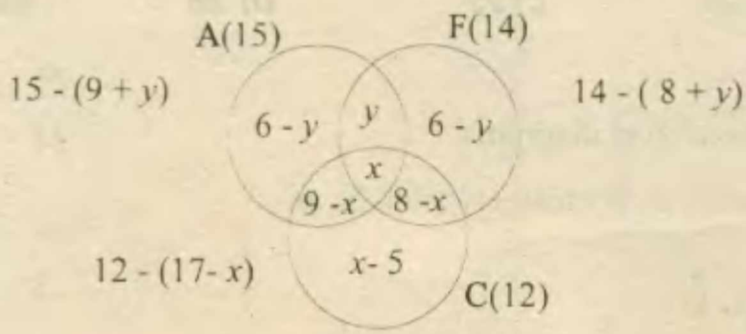
RPTA. B



23.- En una embajada en donde trabajan 20 secretarias se sabe que 15 hablan alemán, 14 hablan francés, 12 hablan castellano, 9 hablan alemán y castellano, 8 hablan francés y castellano. ¿Cuántas hablan alemán y francés pero no castellano?

A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) 6* *E) N.A*

Resolución:



y: hablan alemán y francés pero no castellano.

$$15 + 6 - y + 8 - x + x - 5 = 20$$

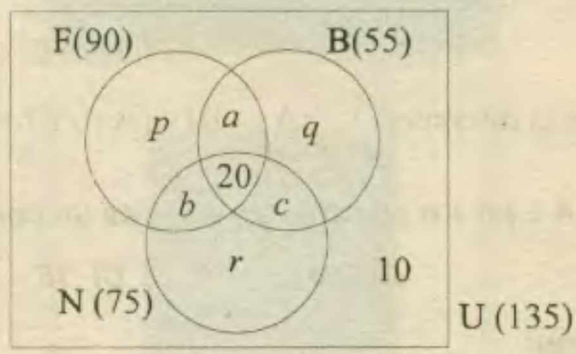
$$24 - y = 20 \quad \Rightarrow \quad y = 4 \qquad \text{RPTA. B}$$

24.- En una escuela de 135 alumnos, 90 practican futbol, 55 basquetbol y 75 natación. Si 20 alumnos practican los 3 deportes y 10 no practican ninguno. ¿Cuántos practican un deporte y sólo uno?

A) 50 B) 55 C) 60 D) 70 E) 65 UNMSM 91

Resolución:

Sean p, q y r los que practican un solo deporte, luego:



$p + q + r = x$

$a + b + c = y$

Del diagrama, se deduce:

$x + y + (10+20) = 135$

$a + b + p = 70$

$a + c + q = 35$

$b + c + r = 55$

De aquí se deduce el sistema: $x + y = 105$

$x + 2y = 160$

cuya solución es: $x = 50$; $y = 55$

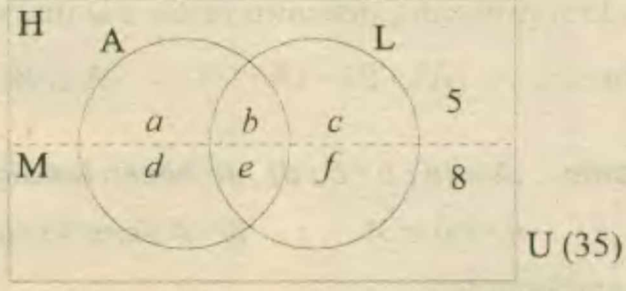
Practican sólo un deporte: $p + q + r = x = 50$ RPTA. A

25.- En una aula de 35 alumnos, 7 hombres aprobaron Aritmética, 6 hombres aprobaron Literatura, 5 hombres y 8 mujeres no aprobaron ningún curso, 5 aprobaron los dos cursos, 11 aprobaron sólo Aritmética. Si hay 16 hombres en total, ¿cuántas mujeres aprobaron solo Literatura?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 E) No se puede determinar

Resolución:

A partir del esquema mostrado, diremos que los hombres(H) y las mujeres (M), se distribuyen de manera que :



$a + b = 7$

$b + c = 6$

$b + e = 5$

$a + d = 11$

$a + b + c = 16 - 5$

$d + e + f = 19 - 8$

Resolviendo se obtiene: $a = 5$; $b = 2$; $c = 4$

$d = 6$; $e = 3$; $f = 2$

Mujeres que aprobaron sólo Literatura: $f = 2$ RPTA. D

26.- Si : $A = \{m ; n ; p ; q\} \wedge B = \{m ; p ; a ; b\}$; determine el número de elementos de $(A \cup B) - (A \cap B)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

De los datos podemos encontrar : $A \cup B = \{a ; b ; m ; n ; p ; q\}$

$A \cap B = \{m ; p\}$

Hallamos la diferencia : $(A \cup B) - (A \cap B) = \{a ; b ; n ; q\}$ **RPTA. D**

27.- Si : $A = \{m + n ; 8 ; 2m - 2n + 4\}$, es un conjunto unitario; hallar el valor de $2m + n$.

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Resolución:

Como A solo tiene un elemento, se debe cumplir que : $m + n = 8$ ....(1)

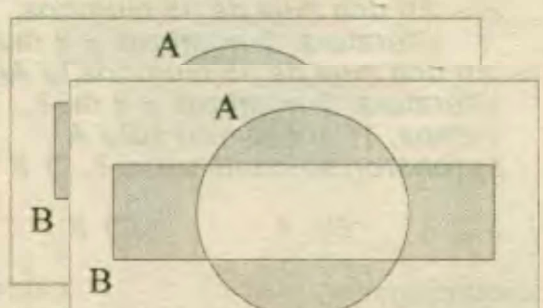
Del mismo modo , tendremos que : $2m - 2n + 4 = 8$

Esta última ecuación se puede transformar en : $m - n = 2$ ....(2)

Luego de (1) y (2), se determina que : $m = 5$; $n = 3$

Asi el valor de $2m + n$ es : **13** **RPTA. A**

28.- ¿Qué operación entre los conjuntos A y B representa la región sombreada?



A) $A \div B$ B) $A * B$ C) $A - B$

D) $A + B$ E) $A \Delta B$

Resolución:

Podemos reconocer que la región común $A \cap B$, está sin sombrear (en blanco), por lo tanto para representar a lo sombreado, debemos restar a la unión $A \cup B$ la región $A \cap B$.

$\therefore$ Región sombreada $= (A \cup B) - (A \cap B) =$ **$A \Delta B$** **RPTA. E**

29.- Dado el conjunto : $A = \{a ; b ; c ; d\}$, se hacen las siguientes afirmaciones :

I.- $b \in A$; II.- $\{a\} \subset A$; III.- A tiene 16 subconjuntos.

¿Cuáles son verdaderas?

A) II B) I ; II ; III C) I D) III E) I ; II

Resolución:

I) Dado que b es un elemento de A, es correcto afirmar que : $b \in A$

II) $\{a\}$ es subconjunto de A , luego se puede afirmar que : $\{a\} \subset A$

III) A tiene 4 elementos, entonces tiene : $2^4 = 16$ subconjuntos.

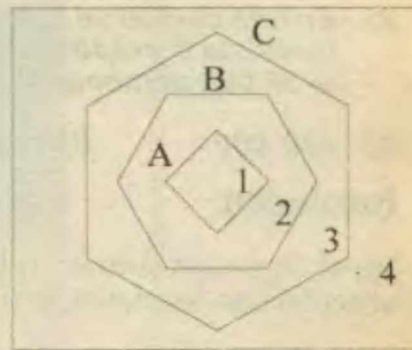
Todas son verdaderas. **I , II y III** **RPTA. B**

30.- Si : $A \subset B \subset C$; simplifica la expresión : $(A \cap B) \cup (B \cap A') \cup (B \cap C) \cup (C \cap B')$

A) B - C ***B) B - A*** ***C) C*** ***D) B*** ***E) A***

Resolución:

Según los datos elaboramos el diagrama adjunto , en el que hemos utilizado los elementos: 1 ;2 ;3 y 4 ; luego :



$A \cap B = \{1\}$

$B \cap A' = \{2\}$

$B \cap C = \{1 ; 2\}$

$C \cap B' = \{3\}$

Reuniendo todo obtenemos : $\{1 ; 2 ; 3\}$, es decir : **C** **RPTA. C**

31.- Si un conjunto tiene 2 047 subconjuntos propios. ¿Cuántos elementos tiene dicho conjunto?

A) 10 ***B) 11*** ***C) 12*** ***D) 13*** ***E) 14***

Resolución:

El número de subconjuntos propios está dado por la expresión : $2^n - 1$, donde n es el número de elementos del conjunto. Por esta razón y por los datos del problema , podemos plantear :

$$2^n - 1 = 2047$$

$$\Rightarrow \quad 2^n = 2\,048 \quad \Rightarrow \quad 2^n = 2^{11}$$

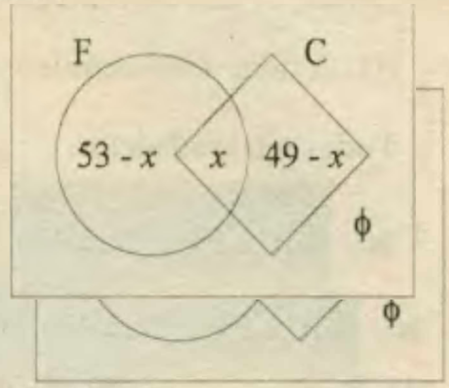
Finalmente por comparación resulta que : $n = 11$ **RPTA. B**

32.- Jessica tomó helados de fresa o coco durante todas las mañanas en los meses de verano (enero, febrero y marzo) de 1996. Si tomó helados de fresa 53 mañanas y tomó helados de coco durante 49 mañanas . ¿Cuántas mañanas tomó helados de los dos sabores?

A) 9 ***B) 10*** ***C) 11*** ***D) 12*** ***E) 13***

Resolución:

Enero : 31 días ; Febrero : 29 días ; Marzo : 31 días



El universo es de 31 + 29 + 31 = 91 días. En el diagrama x indica el número de mañanas en que consumió los dos sabores F = Fresa , y , C = Coco . Luego :

$$53 - x + x + 49 - x = 91$$

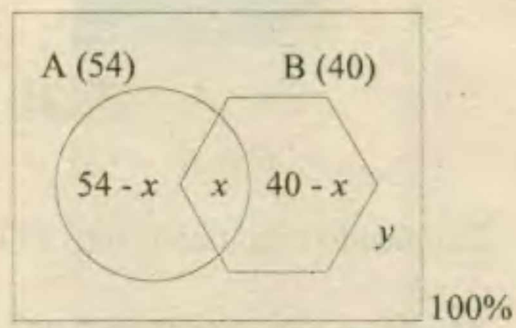
$$102 - x = 91$$

$$x = 11$$ RPTA. C

33.- En una ciudad se determinó que el 46% de la población no lee la revista A , 60% no lee la revista B y el 58% leen A ó B pero no ambas. ¿Cuántas personas hay en la población si 36 000 personas leen A y B?

A) 420 000 *B) 840 000* *C) 350 000* *D) 100 000* *E) 630 000*

Resolución:



En el diagrama sólo se indican porcentajes . Luego de acuerdo con los datos se tiene :

Porcentaje de los que leen A : 100 - 46 = 54

Porcentaje de los que leen B : 100 - 60 = 40

Porcentaje de los que leen A ,o, B :

$$54 - x + x + 40 - x = 58$$

$$x = 36$$

Entonces 36 000 es el 36% de toda la población N , luego :

$$0{,}36\ N = 36\ 000$$

$$\therefore\quad N = 100\ 000$$ RPTA. D

34.- 41 estudiantes de idiomas que hablan inglés, francés o alemán son sometidos a un exámen de verificación , en el cual se determinó que :

** 22 hablan inglés y 10 solamente inglés.*

** 23 hablan francés y 8 solamente francés*

** 19 hablan alemán y 5 solamente alemán*

¿Cuántos hablan alemán, pero no inglés?

A) 11 *B) 12* *C) 13* *D) 14* *E) 15*

Resolución:

Luego de anotar los datos y las incógnitas en el diagrama adjunto, planteamos :

$y + z + u = 12$ ...... (1)

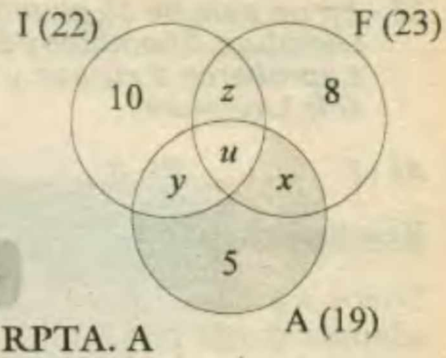
$x + z + u = 5$ ...... (2)

$x + y + u = 14$ ...... (3)

Además : $x + y + z + u + 10 + 8 + 5 = 41$ ...... (4)

De (1) y (4) : $x = 6$

$\therefore$ Hablan alemán (A), pero no inglés(I) : $x + 5 =$ **11**



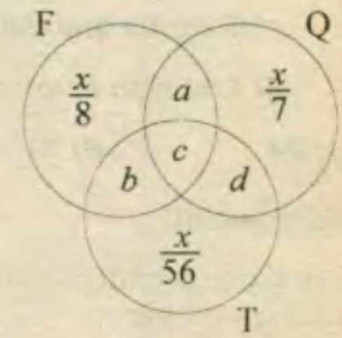
RPTA. A

35.- *De un grupo de músicos que tocan flauta, quena o tuba se sabe que la octava parte toca solo flauta, la sétima parte solo toca quena, la diferencia de los que tocan solo flauta y los que tocan solo quena es igual a la cantidad de músicos que tocan solo tuba. Si además 80 tocan por lo menos 2 de los instrumentos mencionados. ¿Cuántos tocan solo quena?*

A) 15 *B) 16* *C) 17* *D) 18* *E) 19*

Resolución:

De acuerdo a los datos, hacemos un diagrama de Venn - Euler :



$$a + b + c + d = 80$$

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{7} + \frac{x}{56} + 80 = x$$

Resolviendo : $x = 112$

Tocan solo quena (Q) : $\frac{x}{7} =$ **16** RPTA. B

36.- *En un evento social donde habian 180 personas, 40 eran hombres que no gustaban del "Rock", 80 eran mujeres que gustaban de esta música . Si el número de hombres que gustan de la música "Rock" es la cuarta parte del número de mujeres que no gustan de ésta música. ¿Cuántos gustan del "Rock"?*

A) 88 *B) 89* *C) 90* *D) 91* *E) 92*

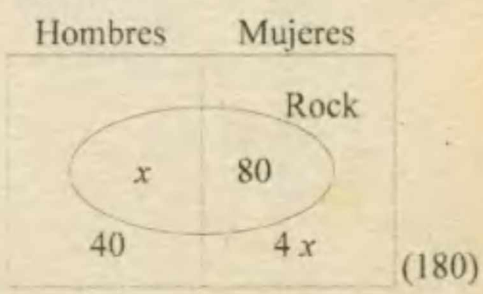
Resolución:

Del diagrama podemos afirmar que :

$x + 80 + 40 + 4x = 180$

$5x = 60 \Rightarrow x = 12$

Finalmente gustan del Rock : $x + 80 =$ **92**



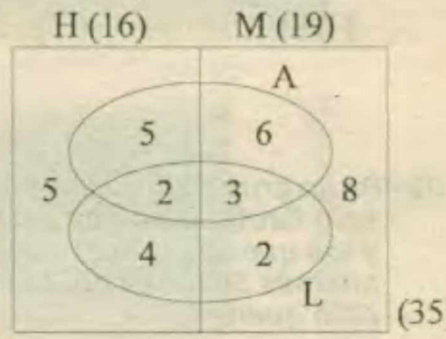
RPTA. E

37.- En un aula de 35 alumnos, 7 hombres aprobaron Aritmética, 6 hombres aprobaron Literatura, 5 hombres y 8 mujeres no aprobaron ningún curso, hay 16 hombres en total, 5 aprobaron 2 cursos y 11 aprobaron solo Aritmética. ¿Cuántas mujeres aprobaron solo Literatura?

A) 1 *B) 3* *C) 2* *D) 4* *E) 6*

Resolución:

Todos los datos quedan anotados en el diagrama adjunto, donde pueden deducirse las cantidades que cumplen con todas las condiciones.



Ahí se observa que hay 2 mujeres que aprobaron sólo Literatura.

2 RPTA. C

38.- De un grupo de 60 personas, los que leen "El Comercio" y "La República" son :

- 1/3 de los que leen "El Comercio"

- 1/5 de los que leen "La República"

Si 4 no leen estos diarios, ¿Cuántos leen solo "El Comercio"

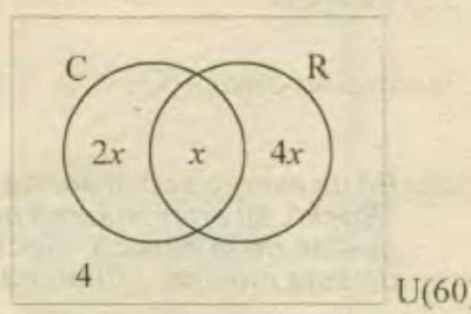
A) 24 *B) 10* *C) 16* *D) 14* *E) 21*

Resolución:

Los datos permiten elaborar el diagrama adjunto en el cual se cumple :

$$2x + x + 4x + 4 = 60$$

$$x = 8$$



Leen sólo "El Comercio" : $2x =$ 16

RPTA. C

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. $\{1\} \in \{1;2\}$ 3. $\varnothing \subset \{\varnothing\}$

2. $\varnothing \in \{\varnothing\}$ 4. $\{1\} \cap \{\{1\},2\} = \{1\}$

A) FVFV B) VFFV C) FVVF
D) VVVV E) VFVV

2.- Si: $A - B = \varnothing$; $B - A = \{a; d\}$

$A \cap B = \{b; c; f; g\}$

Determinar el número de elementos de:

$[(A \cup B) - (B - A)] \cap A$

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.- Si : $U = \{a; b; c; d; e\}$

$A \cup B = \{a; b; c; d\}$

$A \cap B = \{a; c\}$

$A - B = \{b\}$

Los conjuntos A y B son:

I) $A = \{a; b\}$; $B = \{a; c; d\}$

II) $A = \{a; b; c\}$; $B = \{a; c; d\}$

III) $A = \{b\}$; $B = \{a; c; d\}$

Son verdaderas :

A) Sólo I B) II y III C) Sólo II
D) I y II E) Todas

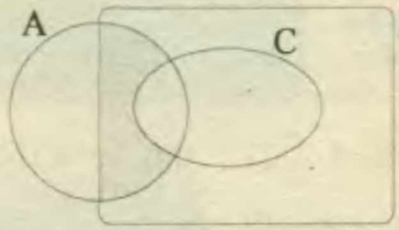
4.- Dados los conjuntos:

$S = \{r; s; t; u\}$; $P = \{r; t; v; x\}$; $Q = \{r; s; x; y\}$

hallar: $S \cap (P \Delta Q)$

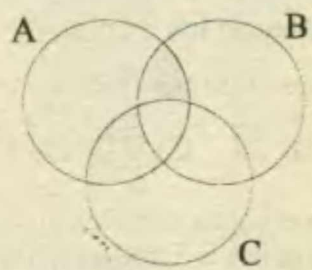
A) $\{s;t\}$ B) $\{r\}$ C) $\{r;s;t\}$ D) $\{r;t\}$ E) $\{t\}$

5.- ¿Qué representa la región sombreada?



A) $(A \cap B) - (A \cap C)$
B) $(A \cap B) - C$
C) $A - (B \cap C)$
D) $(A \cup B) - C$
E) Más de una es verdadera

6.- La parte sombreada representa a:



A) $[A - B \cap C] \cap [(B - A) \cap C]$
B) $[(A - B) \cap C] \cup [(A - C) \cap B]$
C) $(A \cap B) - (A \cap C)$
D) $(A \cup B) - (A \cup C)$
E) Ninguna anterior

7.- Sean: $A = \{1; 2; 3\}$

$B = \{x / x^2 - x - 6 = 0\}$

$C = \{x / 2 < x \leq 6 , x \in N\}$

$D = C - (A \cap B)$

¿Cuántos elementos tiene el conjunto P (D)?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) Ninguna

8.- En un conjunto de 400 alumnos, 180 no postulan a la UNI, 210 no postulan a SAN MARCOS y 88 no postulan a ninguna de

estas. ¿Cuántos postulan a ambas universidades?

A) 86 B) 98 C) 100 D) 48 E) 64

9.- En un grupo de 50 personas, 28 conocen Arequipa, 32 conocen Trujillo y 15 ambas ciudades ¿cuántos no conocen ninguna de estas ciudades?

A) 10 B) 5 C) 2 D) 4 E) Ninguna

10.- De un grupo de estudiantes que rindieron exámenes, los resultados fueron:

10 aprobaron Matemática y Física

7 aprobaron Matemática y Química

9 aprobaron Química y Física.

17 aprobaron Matemática

19 aprobaron Física

18 aprobaron Química

4 aprobaron los 3 cursos

¿Cuántos alumnos rindieron exámenes?

A) 37 B) 28 C) 32 D) 27 E) N.A

11.- De 22 personas, a 12 les gusta la manzana, a 13 la pera y a 5 ambas frutas; ¿A cuántos no le gustan estas frutas?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

12.- Si: $M = \{1;3;5;7\}$; $N = \{2;3;4\}$;

¿Cuántos elementos tiene :

$(M \cup N) - (M \cap N)$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13.- Si : $A = \{x/x$ es una letra de la palabra : *murciélago*$\}$

$B = \{x/x$ es una letra de la palabra : *eucalipto*$\}$

¿Cuántas letras conforman $A \cap B$?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 8

14.- Si : $A \cap B = \{2;3;4\}$ y $A \subset B$. ¿Cuántos elementos tiene A?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) más de 3

15.- De un grupo de 25 jóvenes, 12 practican tenis; 18 practican natación y 3 no practican tenis ni natación. ¿Cuántos practican ambos deportes?

A) 5 B) 8 C) 11 D) 3 E) 7

16.- ¿Qué operación representa el siguiente diagrama?

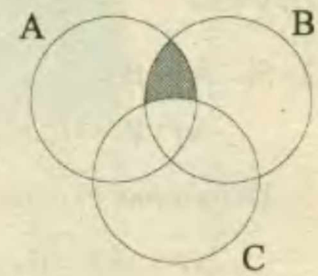
A) $A \cap B$

B) $(A - C) \cap B$

C) $A \Delta B$

D) $(B - A) \cap C$

E) $A \cap B \cap C$



17.- En este diagrama, ¿Cuánto suman los elementos de : $(E - F) \cup (G - E)$?

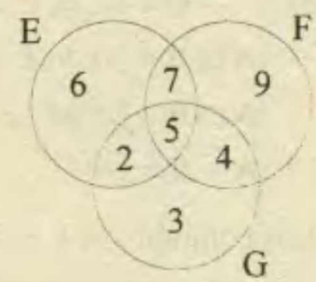
A) 10

B) 18

C) 12

D) 15

E) 21



NIVEL B

18.- Si: $A \cup B = A \cap B$, determinar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I) $A - B = \varnothing$

II) $(A \cup B) - B = \varnothing$

III) $(A - C) - (B - C) = A - B$

A) FVF B) FFF C) VVV D) VFV E) FFV

19.- Si: $A \subset B$. ¿cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I) $A \cup (B - A) = B$

II) $A \cap (B - A) = A \cap B$

III) $A - (A - B) = A$

IV) $(A - B) \cup (B - A) = B - A$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

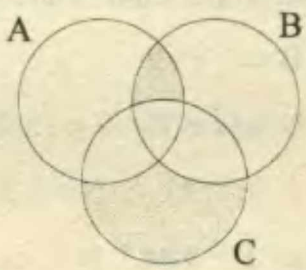
20.- Si $A \subset B$ y $A \cap C = \varnothing$

Simplificar :

$$[A \cap (B \cup C)] - [(A \cup B) \cup (A \cap C)]$$

A) $A \cap B$ B) $\varnothing$ C) B D) B - A E) C

21.- La parte sombreada corresponde a:



A) $(A - B) \cup [C - (A \cup B)]$

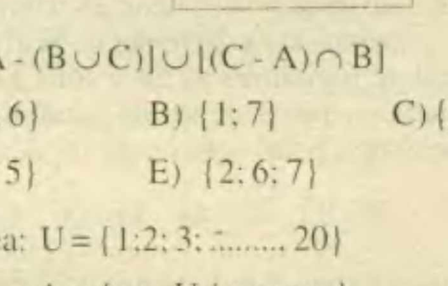
B) $(A - C) \cap (B - C)]$

C) $(C - B) \cup (C - A)$

D) $[(A \cap B) - C]\ [C - (A \cup B]$

E) N.A

22.- En base a la figura, hallar el resultado de la siguiente operación:



$$[A - (B \cup C)] \cup [(C - A) \cap B]$$

A) {2; 6} B) {1; 7} C) {5; 3}

D) {4; 5} E) {2; 6; 7}

23.- Sea: U = { 1;2; 3; .... 20}

A = {$x \in$ U / x es par}

B = {$x \in$ U / x es impar}

C = {$x \in$ U / x es de dos cifras}

D = {$x \in$ U / x es múltiplo de 4}

¿Cuántos elementos tiene el conjunto potencia de E?

$$E = [(A - C) \cup (C - B)] - D$$

A) 64 B) 8 C) 16 D) 32 E) Ninguna

24.- Sean A y B dos conjuntos tales que:

$n(A) = 4$

$n(B) = 5$; $n(A \cap B) = 2$. Hallar $n\,[P(A \cup B)]$

A) 64 B) 32 C) 128 D) 256 E) 512

25.- Si X es un conjunto que tiene $3p + 9$ elementos, Y es un conjunto que tiene $2q + 3$ elementos y los dos tienen $p + q - 4$ elementos comunes. ¿Cuántos elementos tiene $X \Delta Y$?

A) $p + q + 19$ B) $2p + q + 15$ C) $p + 1$

D) $p + 19$ E) N.A

26.- En una encuesta aplicada a 100 clientes del **"Burger grill"** se obtuvo esta información:

40 clientes gustan de las hamburguesas con mayonesa.

35 clientes las prefieren con mostaza.

50 les agrada con salsa de tomate.

15 les gustan con mayonesa y mostaza.

20 les agradan con mostaza y salsa de tomate.

25 les gustan con mayonesa y salsa de tomate.

5 las prefieren con mayonesa, mostaza y salsa de tomate.

¿Cuántos gustan de un solo condimento en su hamburguesa?

A) 25 B) 20 C) 30 D) 35 E) 15

27.- Un concesionario de la **Nissan Motor** vendió 47 automóviles de esa marca en el primer trimestre del año, de los cuales 23 tenían dirección hidráulica, 27 tenían cambios automáticos y 20 tenían equipo

de audio con CD. Además y según el orden mencionado: 7 tenían los tres accesorios; 3 tenían el primero y segundo pero no el tercero; 4 tenían el primero y el tercero pero no el segundo y 2 tenían el segundo y el tercero pero no el primero. ¿Cuántos automóviles se vendieron con solo uno de estos accesorios?

A) 21 B) 29 C) 36 D) 27 E) 31

28.- La suma de los elementos de $(A \cap B) \cup C$, sabiendo que :

$A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, $B = \{2 ; 3 ; 5\}$

y $C = \{1 ; 3 ; 5 ; 7\}$, es :

A) 12 B) 14 C) 10 D) 9 E) 18

29.- Si : $U = \{a ; b ; c \ldots\ldots\ldots z\}$

$X = \{$letras de la palabra "*tiburón*"$\}$

$A = \{$vocales$\}$

Hallar : X - A

A) $\{t ; b ; r ; n\}$ B) $\{i ; u ; o\}$

C) $\{t ; u ; b ; o\}$ D) $\{t ; u ; r ; b ; o\}$

E) $\{i ; b ; o ; n\}$

30.- Si : $U = \{1 ; 2 ; 3 ; \ldots\ldots\ldots ; 13 ; 14\}$

$A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

$B = \{1 ; 4 ; 13 ; 14\}$

¿Cuántos subconjuntos tiene $A \cap B$?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

31.- De acuerdo al gráfico se afirma :

I.- $A \cap B \subset A$

II.- $B - A = B \cap (C - A)$

III.- $A \cap C = B - A$

Son ciertas :

A) Solo I B) Solo II C) Solo III

D) Todas E) N.A.

32.- De las siguientes proposiciones :

I.- $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)$

II.- $A - B = A \cap \mathcal{C}(B)$

III.- $\mathcal{C}(U) = \phi$

Son verdaderas :

A) Todas B) Solo I C) Solo II

D) Solo III E) Solo dos de ellas

NIVEL C

33.- Se define la operación * entre conjuntos por:

$A * B = \mathcal{C}_A \cap B$

Si : $U = \{x \in Z / -2 < x \leq 2\}$

$M = \{-1; 0; 1; 2\}$; $N = \{-2; 1\}$; $P = \varnothing$

Entonces $P * (M * N)$, es:

A) $\{1\}$ B) $\{-2\}$ C) M D) N E) $\varnothing$

34.- Si al conjunto $\{\{a\}; \{a; b\}; \{a; b; c\}\}$

lo denotamos por : $\langle a, b, c \rangle$

Se afirma : I) $\langle a; b; c \rangle = \langle b; a; c \rangle$

II) $\langle a; b; c \rangle \cap \langle c; b; a \rangle = \varnothing$

III) $\langle a; a; b \rangle = \langle a; b; b \rangle$

Son verdaderas :

A) Sólo I B) I y II C) I y III

D) Sólo III E) Ninguna

35.- Un club de deportes tiene 38 frontonistas, 15 pimponistas y 20 tenistas. Si el número total de jugadores es 58 y solo 3 de ellos practican los 3 deportes ¿cuántos jugadores practican solamente un deporte?

A) 42 B) 43 C) 44 D) 45 E) 46

36.- En un barrio donde habitan 31 personas, 16 compran en el mercado, 15 en la bodega y 18 en el supermercado; 5 en los dos

últimos sitios, únicamente 6 en los dos primeros y 7 en el primero y último. ¿Cuál es el menor número de personas que podrían comprar solamente en el mercado?

A) 1 B) 6 C) 3 D) 8 E) Ninguna

37.- En el casino de un gran hotel, 120 entraron en competencia para definir mejor o mejores de cada juego. De estos, 68 juegan poker, 38 juegan black jack y otros son malos jugadores. 40 son buenos jugadores de poker solamente, 5 son buenos jugadores de poker y black jack solamente, 17 son jugadores regulares de black jack solamente y 4 son jugadores regulares de poker y black jack solamente. ¿Cuántos son jugadores regulares de poker?

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) N.A.

38.- Si A tiene 16 subconjuntos, B tiene 8 subconjuntos y $A \cup B$ tiene 32 subconjuntos. ¿Cuántos subconjuntos tiene $A \cap B$?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

39.- En una escuela de 600 alumnos, 100 no estudian ningún idioma extranjero; 450 estudian francés y 50 estudian francés e inglés. ¿Cuántos estudian solo inglés?

A) Ninguno B) 50 C) 100

D) 150 E) 200

40.- A, B y C son tres conjuntos tales que satifacen las siguientes condiciones :

1ro.- A está contenido en B y B está contenido en C.

2do.- Si x es un elemento de C, entonces x también es un elemento de A.

Por lo tanto :

A) B no está contenido en A

B) C no está contenido en B

C) A = B, pero C no es igual a B

D) La intersección de A y B es C

E) La reunión de A y B tiene elementos que no pertenecen a C.

41.- Si $A \subset B$, entonces, ¿Cuál es la afirmación falsa?

A) $A \cap B = A$ B) $A \cup B = B$ C) $A - B = \phi$

D) $B - A = B$ E) $B' \subset A'$

42.- Si : $M \subset N$ y $S \cap N = \phi$, entonces la expresión equivalente a :

$$[M \cup (N-S)] \cap [N \cup (S-M)] \text{ ; es :}$$

A) N B) S C) $N \cup S$ D) $N \cap S$ E) ϕ

43.- En un conjunto de 400 alumnos de una Academia, se sabe que :

a) 136 se portan bien

b) 276 son inteligentes

c) 320 son conversadores

d) 240 son conversadores e inteligentes

e) 40 se portan bien y no son inteligentes

f) 26 no son conversadores y se portan bien.

g) 30 son conversadores, no son inteligentes y se portan bien.

¿Cuántos de éstos alumnos no se portan bien, no son conversadores y no son inteligentes?

A) 34 B) 20 C) 19 D) 18 E) 17

44.- La operación $\uparrow$ entre conjuntos se define de la siguiente manera :

$$A \uparrow B = C(A - B)$$

De las siguientes afirmaciones :

I.- $A \uparrow B = B \uparrow A$

II.- $C(A \uparrow B) = A \cap CB$

III.- $A \uparrow A = U$

A) Solo I II B) Solo III C) Solo I

D) Solo I y III E) Solo II y III

DIAGRAMAS DE VENN - EULER

Las ideas de conjunto y subconjunto, así como las operaciones referentes a la combinación de éstos pueden ilustrarse gráficamente por medio de los llamados *Diagramas de Venn-Euler* (en honor a los matemáticos John Venn y Leonard Euler). En dichos diagramas se representan al conjunto universal $\mathcal{U}$ por un rectángulo, y se usan regiones encerradas por curvas simples (generalmente círculos) dibujadas dentro del rectángulo para representar los conjuntos que intervienen. Por ejemplo, si A es un subconjunto del conjunto universal puede representarse este último por el conjunto de puntos en el interior del rectángulo tal como se muestra en la *Fig*. 1. El interior del círculo representa el conjunto de puntos en A, en tanto que la serie de puntos dentro del rectángulo y fuera del círculo constituyen el conjunto A'. Obviamente cualquier otra figura cerrada puede usarse para representar los puntos del conjunto A. La *Fig*. 2 muestra un diagrama de Venn-Euler, en el cual A está representado por los puntos que se hallan dentro del triángulo.

En los siguientes ejemplos se ilustra la idea de los diagramas de Venn-Euler.

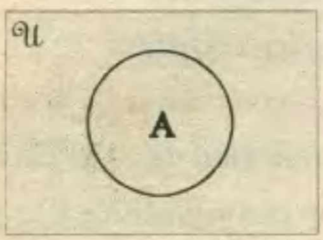


Fig. 1

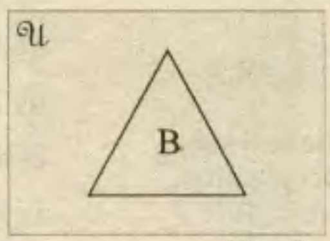


Fig. 2

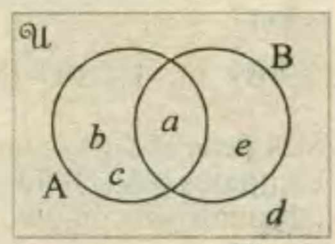


Fig. 3

Si $\mathcal{U} = \{a ; b ; c ; d ; e\}$, $A = \{a ; b ; c\}$ y $B = \{a ; e\}$. Dibuje un diagrama de Venn-Euler que ejemplifique esta situación.

Se traza un rectángulo cuyos puntos interiores representan el conjunto $\mathcal{U}$ y dos círculos cuyos puntos interiores constituyen los conjuntos. A y B. El diagrama completo aparece en la *Fig*.3. Observe que a está en ambos conjuntos. A y B. porque $A \cap B = \{a\}$. Así mismo. d es el único elemento que no pertenece ni a A ni a B. de modo que $(A \cap B)' = \{d\}$.

Las intersecciones y uniones de los conjuntos pueden ilustrarse fácilmente por medio de los diagramas de Venn-Euler. Por ejemplo, con dos conjuntos. A y B, puede dibujarse un diagrama de Venn-Euler para representar la región correspondiente a $A \cap B$. Para ellos se hace lo siguiente:

1. Por lo regular, los puntos que se hallan dentro del rectángulo representan a $\mathcal{U}$, y los que se encuentran en el interior de los dos círculos constituyen A y B (*Fig*.4). Observe que A y B se trasladan admitiendo la posibilidad de que A y B tengan puntos en común.
2. Se destaca al conjunto A mediante una región sombreada (*Fig*.5).
3. Señalamos al conjunto B por medio de puntos. La región en la cual la región sombreada se intersecta con la región de puntos (*Fig*. 6) es la que corresponde a $A \cap B$.

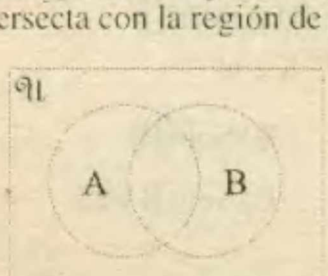


Fig. 4

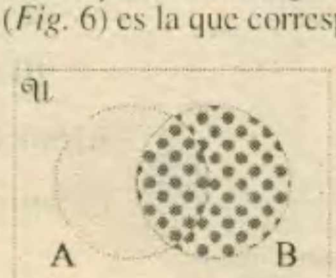


Fig. 5

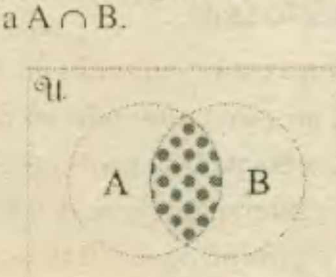


Fig. 6

10 Geometría Básica

Una geometría basada solo en la intuición sensitiva, sabiendo que nuestros sentidos no siempre captan con exactitud las figuras u objetos percibidos, conduce a aproximaciones erróneas. Haciendo frente a esta realidad, surge el saber humano, con sentido racional y sistemático, para ir más allá del simple acopio de conocimientos, hasta construir un sistema lógico de postulados, axiomas y teoremas; edificando así y con bases sólidas la ciencia geométrica.

Teoremas fundamentales como:

-*"Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes"* ,

-*"Los ángulos interiores de un triángulo suman 180° "* ,

-*"La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"*

..., etc, constituyen las piezas que manejan los geómetras para resolver desde simples hasta intrincadas situaciones donde la imaginación cuenta más que el conocimiento.

Por esto, todo estudiante que ambicione dominar las matemáticas, tiene en la solución de problemas geométricos una actividad llena de desafíos que, al enfrentarlos con la elegancia y la precisión de los procedimientos que brinda la geometría, será un estímulo para incrementar su habilidad y capacidad de raciocinio.

La presente solución de problemas básicos trata sobre los siguientes temas, habitualmente presentados en los concursos de Admisión en el área del Razonamiento Matemático:

- Segmentos y ángulos
- Triángulos, cuadriláteros y Polígonos.
- Circunferencia y Círculo.
- Teorema de Pitágoras y Relaciones Métricas.

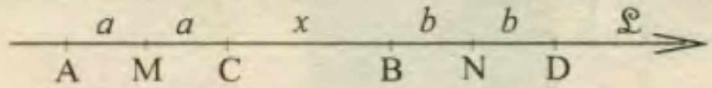
PROBLEMAS RESUELTOS

1.- En una recta $\mathcal{L}$ se tienen los puntos A, B, C, y D tal que el punto C está entre A y B ; B entre C y D. Si M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente, y d (AB) = m, d (CD) = n ; d (MN) = 2CB; hallar CB.

A) $\frac{3(m+n)}{2}$ *B)* $\frac{m+n}{4}$ *C)* $\frac{m+n}{2}$ *D)* $\frac{3(m+n)}{5}$ *E)* $\frac{5(m+n)}{3}$ **PUCP 94 - II**

Resolución:

De la figura y uno de los datos:



$d(\text{MN}) = 2\text{ CB}$

$a + x + b = 2x$

$x = a + b$ ...... (1)

Por otro lado se sabe que:

$d\,(\text{AB}) = m \quad \Rightarrow \quad 2a + x = m$ .... (2)

$d\,(\text{CD}) = n \quad \Rightarrow \quad 2b + x = n$ .... (3)

Entonces, al sumar (2) y (3) reemplazamos lo obtenido en (1):

$$2a + 2b + 2x = m + n$$

$$4x = m + n$$

$$x = \frac{m+n}{4}$$ RPTA. B

2.- Hallar la diferencia entre las medidas de los ángulos x é y si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

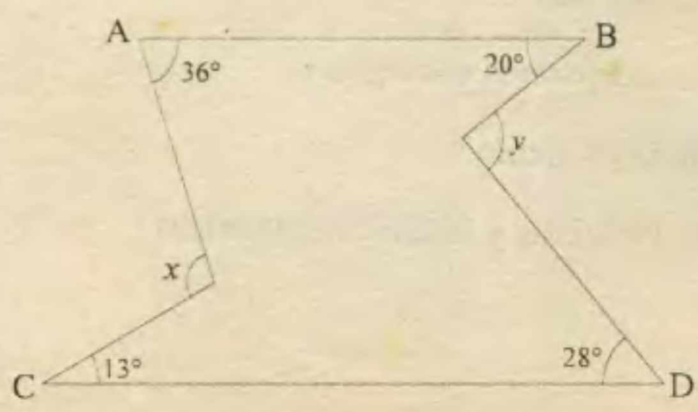
A) 1º

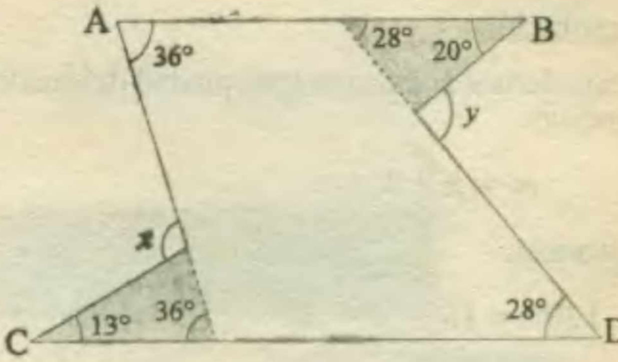
B) 2º

C) 12º

D) 18º

E) 25º





Resolución:

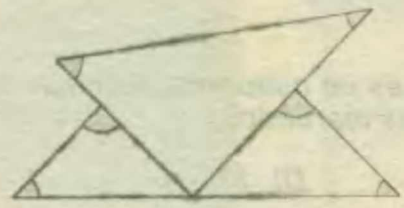
Luego de trazar las prolongaciones mostradas en la figura y por la propiedad del ángulo exterior en cada triángulo:

$x = 36° + 13° = 49°$

$y = 20° + 28° = 48$

$x - y = 49° - 48° =$ **1°** RPTA. A

3.- ¿Cuánto vale la suma de los ángulos marcados?

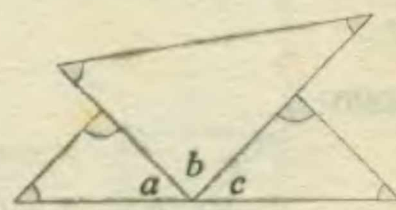


A) 180º *D) 720º*

B) 360º *E) N.A*

C) 540º

Resolución:



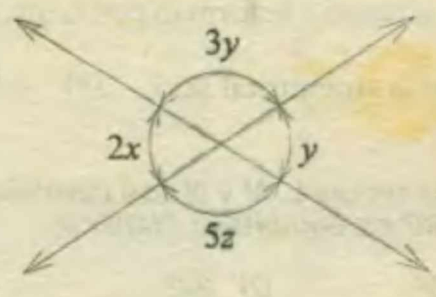
La suma S de los ángulos marcados más los no marcados (a, b, c) de la figura, equivalen a la suma de los ángulos de 3 triángulos:

$S + (a + b + c) = 3 \times 180$

$S + 180° = 540°$

$\therefore$ $S = 360°$ RPTA. B

4.- ¿Cuál es el valor de z en la siguiente figura?



A) 30º *D) 53º*

B) 37º *E) 27º*

C) 45º

Resolución:

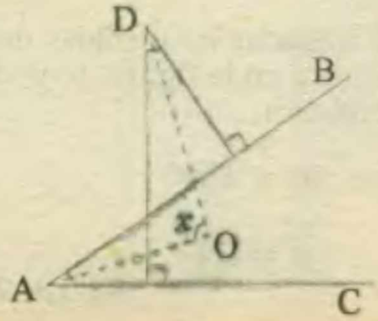
Primero se calcula y : $3y + y = 180° \Rightarrow y = 45°$

Luego : $5z = 3y = 3\,(45°) = 135°$

$\Rightarrow z = 135° \div 5$

$\therefore$ $z = 27°$ RPTA. E

5.- Las líneas punteadas son bisectrices de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{D}$. Si m∠BAC= 30 ; hallar x:

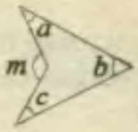


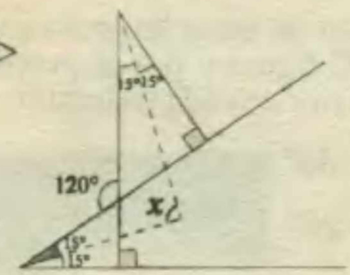
A) 120º *D) 75º*

B) 90º *E) N.A*

C) 105º

Resolución:





Recordemos la siguiente propiedad del cuadrilátero cóncavo:

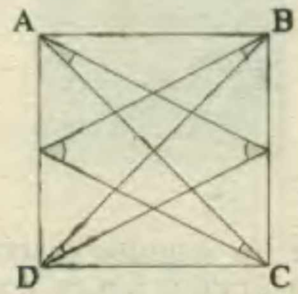
$$m = a + b + c$$

Entonces:

$$120° = 15° + x + 15°$$

$\therefore$ $x = 90°$ RPTA. B

6.- *ABCD es un cuadrado, calcular la suma de los ángulos marcados.*

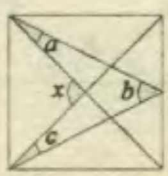


A) 360º *D) 135º*

B) 270º *E) 225º*

C) 180º

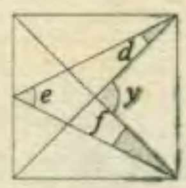
Resolución:



$x = a + b + c$

$y = d + e + f$

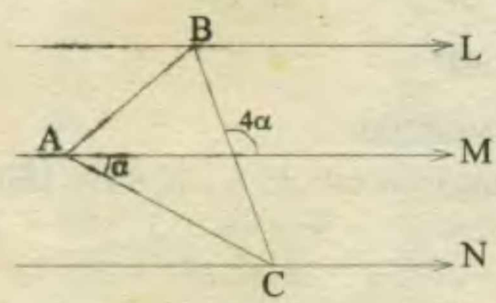
$x = y = 90°$



Tanto x como y se forman por la intersección de las diagonales del cuadrado, por eso miden 90°.

Luego la suma total será: $90° + 90° =$ **180°** RPTA. C

7.- *Las rectas L, M y N son paralelas y el triángulo ABC es equilátero. Hallar α.*



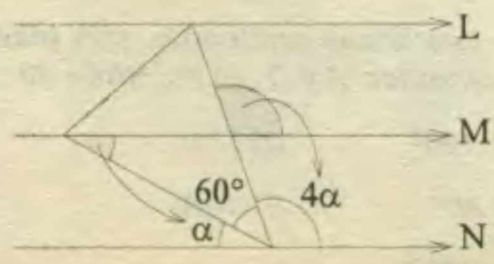
A) 30º *D) 24º*

B) 60º *E) 36º*

C) 45º

Resolución:

Luego de trasladar las medidas de los ángulos tal como se indica en la figura, se podrá establecer la siguiente relación.



$$\alpha + 60° + 4\alpha = 180°$$

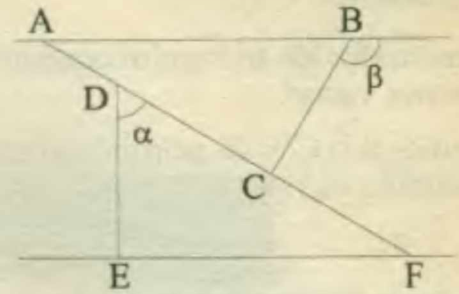
$\alpha = 24°$ RPTA. D

8.- En la figura:

$\overline{AB} // \overline{EF}$; $\overline{BC} \perp \overline{AF}$;

$\overline{DE} \perp \overline{EF}$

Si α y β están en la relación de 2 a 7. ¿Cuál es el valor de : α - β?

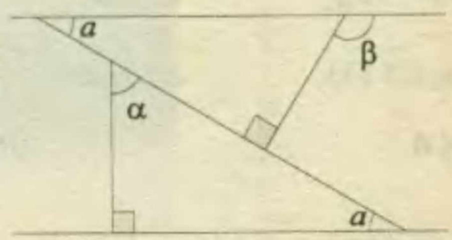


A) 140º D) 80º

B) 120º E) 100º

C) 40º

Resolución:



En la figura : $\beta = 90° + a$

$a + \alpha = 90°$

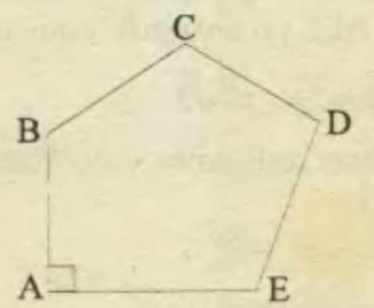
entonces : $\alpha + \beta = 180°$

Pero $\alpha = 2x$ y $\beta = 7x$

luego : $9x = 180° \Rightarrow x = 20°$

finalmente : $\beta - \alpha = 5x =$ **100°** RPTA. E

9.- En la figura mostrada, la suma de los ángulos B, C, D y E disminuída en el ángulo A es igual a:



A) 360º D) 450º

B) 540º E) 180º

C) 270º

Resolución:

En el pentágono ($n = 5$) la suma de ángulos interiores es:

$180°(n - 2) = 180°(5 - 2) = 540°$

entonces $B + C + D + E = 540° - 90° = 450°$

de aquí : $B + C + D + E - A = 450° - 90° =$ **360°** RPTA. A

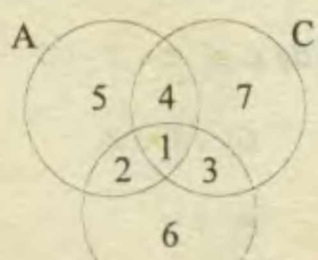
10.- Dados los siguientes conjuntos:

A = polígonos regulares

B = cuadriláteros

C = triángulos equiláteros

¿Cuáles de las regiones son vacías?



A) 1, 3 y 5 B) 1, 3 y 7 C) 2, 3 y 4 D) 3, 6 y 7 E) 1, 6 y 7 PUCP 90 - I

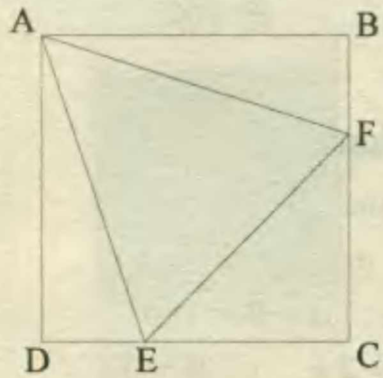
Resolución:

Como todos los triángulos equiláteros son polígonos regulares, $C \subset A$, luego 3 y 7 deben ser regiones vacías.

Además $B \cap C = \varnothing$, porque ningún triángulo puede ser a la vez cuadrilátero, luego la región 1 también es vacía.

RPTA. B

11.- *Dado el cuadrado de lado "a" ¿cuál debe ser el valor de DE para que el triángulo AEF sea equilátero?*



A) $a(2-\sqrt{3})$ *D)* $a/3$

B) $a(\sqrt{3}+1)$ *E)* N.A

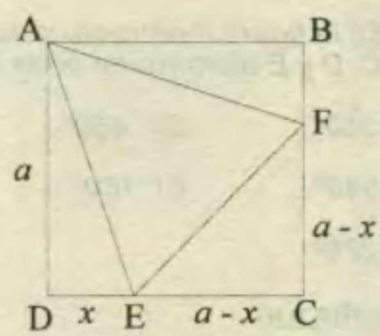
C) N.A *UNFV 90*

Resolución:

En la figura: $DE = x$; $EC = a - x = FC$, con lo cual el triángulo rectángulo FCE también es isósceles, luego : $EF = (a-x)\sqrt{2}$

Por ser AEF un triángulo equilátero :

$$AE = (a-x)\sqrt{2}$$



Finalmente aplicamos el teorema de Pitágoras en el ΔADE :

$$AE^2 = a^2 + x^2$$

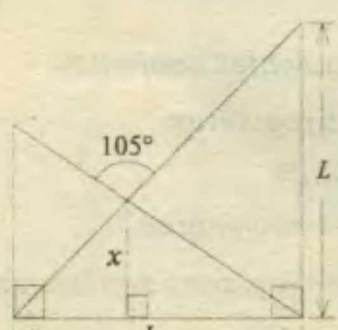
$$\left[\sqrt{2}(a-x)\right]^2 = a^2 + x^2$$

$$2a^2 - 4ax + 2x^2 = a^2 + x^2$$

$$x^2 - 4ax + a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 4a^2}}{2} = \frac{4a \pm 2a\sqrt{3}}{2}$$

Como $x < a$;concluimos que : $x = 2a - a\sqrt{3}$ **RPTA. A**

12.- *Hallar el valor de x, si* $L = 3 + \sqrt{3}$

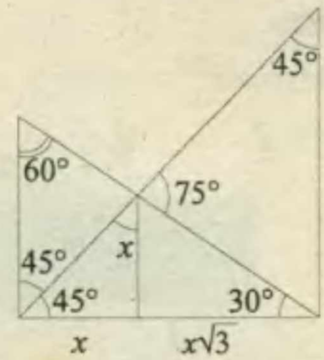


A) 3 *D)* $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

B) $\sqrt{3}$ *E)* 1

C) $1 + \sqrt{3}$

Resolución:



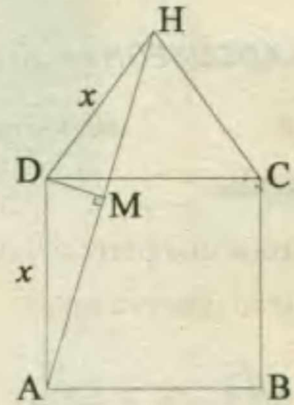
En la figura dada encontramos triángulos de 30°, 60°, 90° y de 45°, 45°, 90°

$x + x\sqrt{3} = L = 3 + \sqrt{3}$

$x(1+\sqrt{3}) = \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$

$x = \sqrt{3}$ RPTA. B

13.- ABCD es un cuadrado de lado x . Si DCH es un triángulo equilátero de lado x ; hallar la atura DM del triángulo ADH.



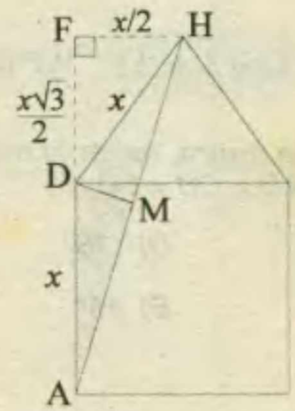
A) $\dfrac{x}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ *D)* $\dfrac{x}{4}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

B) $\dfrac{x}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ *E)* $\dfrac{x}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

C) $2x\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ***UNMSM 91***

Resolución:

Completamos el triángulo DFH que es notable (30 - 60 - 90)



Por semejanza entre los triángulos AMD y AFH

$$\frac{DM}{x/2} = \frac{x}{AH} \;......... (1)$$

Donde : $AH = \sqrt{\left(x+\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}$

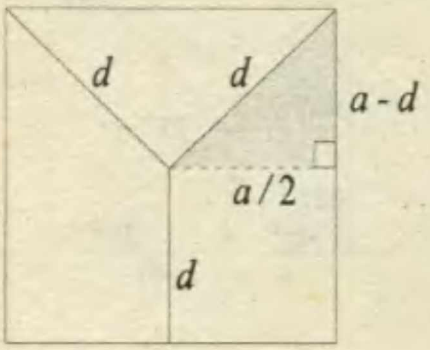
$$AH = x\sqrt{2+\sqrt{3}} \;....... (2)$$

(2) en (1): $DM = \dfrac{x}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \dfrac{x}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ RPTA. E

14.- Dentro de un cuadrado de lado "a" se localiza un punto P que es equidistante de dos vértices adyacentes y del lado opuesto a dichos vértices. Si "d" representa a esa distancia común, entonces "d" es igual a:

A) $\dfrac{3a}{5}$ *B)* $\dfrac{5a}{8}$ *C)* $\dfrac{3a}{8}$ *D)* $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ *E)* $\dfrac{a}{2}$

Resolución:



Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo sombreado:

$$d^2 = \frac{a^2}{4} + (a - d)^2$$

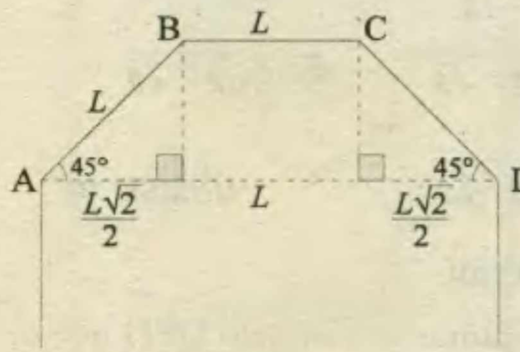
De aquí : $d = \frac{5a}{8}$ RPTA. B

15.- Si ABCDEFGH es un octógono regular de lado L ; hallar la medida de $\overline{AD}$.

A) $L\sqrt{2}$ *B)* $L(2+\sqrt{2})$ *C)* 5L *D)* 4L *E)* $L(\sqrt{2}+1)$

Resolución:

Dibujemos una parte del octógono :



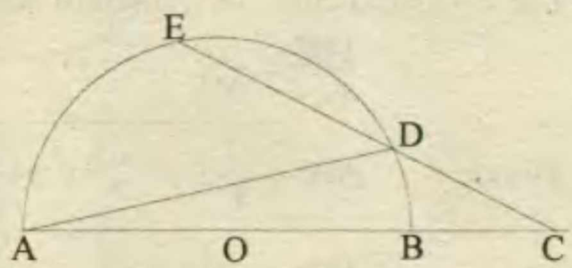
De aquí se observa que :

$$AD = \frac{L\sqrt{2}}{2} + L + \frac{L\sqrt{2}}{2}$$

$$= L\sqrt{2} + L$$

$$= L(\sqrt{2} + 1)$$ RPTA. E

16.- En la figura, hallar la medida del ángulo ADE; si: AO = OB = ED

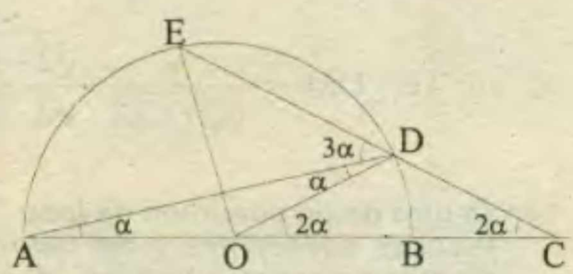


A) 30º *D)* 75º

B) 60º *E)* 45º

C) 53º

Resolución:



Formemos los triángulos isósceles: ODC y AOD.

También el triángulo equilátero EOD, entonces:

$3\alpha + \alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$

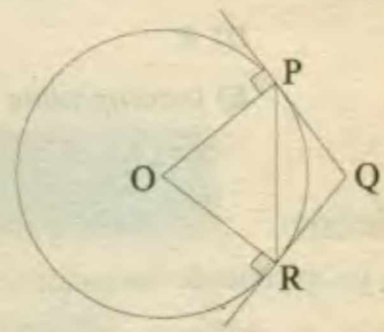
$m\angle ADE = 3\alpha = 45^\circ$ RPTA. E

17.- ¿Cuánto mide el mayor ángulo formado por las tangentes trazadas a una circunferencia, desde un punto exterior, si la cuerda que une los puntos de tangencia es igual al radio de la circunferencia?

A) 120º *B)* 60º *C)* 30º *D)* 150º *E)* 90º *PUCP 92 - I*

Resolución:

Sea Q el punto exterior, P y R puntos de tangencia. Si PR es de igual tamaño que el radio, entonces el ΔOPR es equilátero.



$m\angle OPR = 60 \Rightarrow m\angle RPQ = 30$

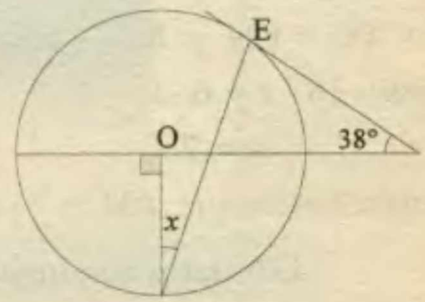
$m\angle OPR = 60 \Rightarrow m\angle PRQ = 30$

En el Δ PRQ :

$30° + 30° + m\angle PQR = 180°$

$\therefore$ $m\angle PQR = 120$ RPTA. A

18.- Si E es punto de tangencia, el ángulo x mide:



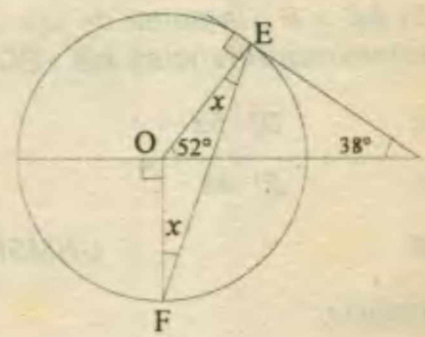
A) 22º *D) 17º*

B) 19º *E) 26º*

C) 18º

Resolución:

Al trazar $\overline{OE}$ se forma el triángulo isósceles OEF, luego se puede establecer que:

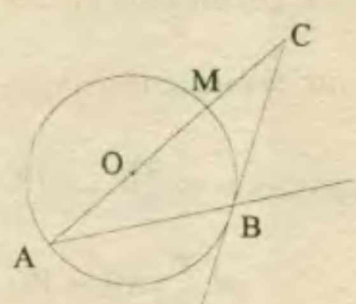


$x + x + (90° + 52°) = 180°$

$2x = 38°$

$x = 19°$ RPTA. B

19.- En la siguiente figura : AO = OM = MC . Hallar la medida del ángulo ABC.



A) 135º *D) 125º*

B) 150º *E) N.A*

C) 120º

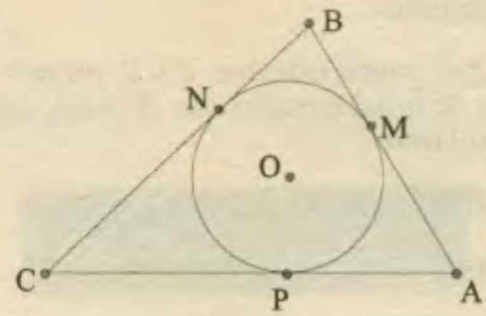
Resolución:

Al trazar $\overline{OB}$ se forma el ⊾OBC donde OB = r ; y puesto que : OC = $2r$, podemos afirmar que ⊾OBC es un triángulo notable de: 30°, 60°, 90°.

Por otro lado, en el ΔAOB se tienen los ángulos 30°, 120°, 30° y finalmente:

$m\angle ABC = 90 + 30 =$ 120 RPTA. C

20.- En la siguiente figura M, N y P son puntos de tangencia. Si AB = 6 , AC = 16 ; BC = 8 , hallar AM.



A) 5 *D) 8*

B) 6 *E) Incompatible*

C) 7

Resolución:

Por la propiedad de las tangentes, si :

AM = x ⇒ AP = x.

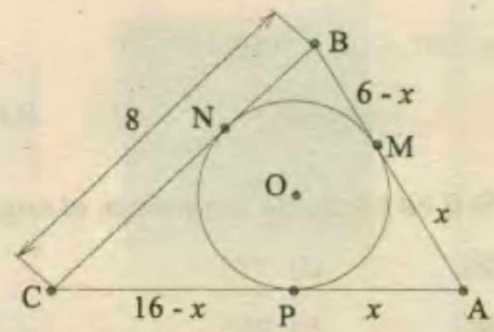
Luego :PC = 16 - x

y BM = 6 - x

Como PC = CN y BM = NB

tenemos: $16 - x + 6 - x = 8$

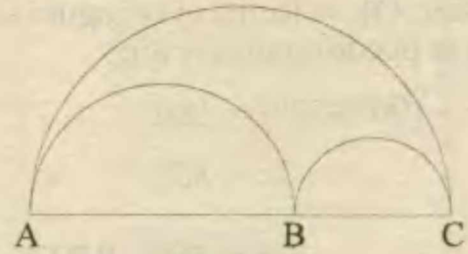
$x = 7$



De esto se tendrá que: AM = 7 y AB = 6 , lo cual es absurdo. Por tanto :

Los datos son inconsistentes. RPTA. E

21.- Si AC = 6 ; la suma de las longitudes de las semicircunferencias $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ y $\overset{\frown}{AC}$ es igual a:



A) 6π *D) 5π*

B) 9π *E) 4π*

C) 3π *UNMSM 90*

Resolución:

Longitud de una circunferencia = π (diámetro)

Longitud de una semicircunferencia = $\frac{\pi}{2}$(diámetro)

$$\text{Suma de longitudes} = \pi\frac{AB}{2} + \pi\frac{BC}{2} + \pi\frac{AC}{2}$$

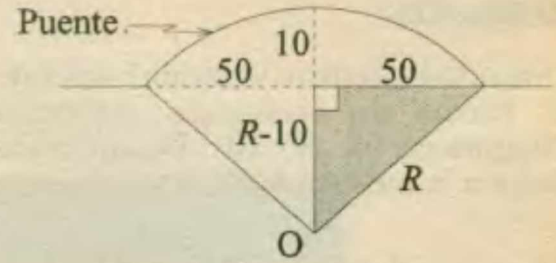
$$= \frac{\pi}{2}(AB + BC + AC) = \frac{\pi}{2}(AC + AC)$$

$$= \pi AC = 6\pi$$ RPTA. A

22.- Un puente en forma de arco de circunferencia une las orillas de un río de 100 metros de ancho. El punto más alto del puente está a 10 metros de la horizontal. Hallar el radio de la circunferencia.

A) 130 m *B) 80 m* *C) 100 m* *D) 110 m* *E) 120 m* *PUCP 90 - I*

Resolución:



Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo sombreado :

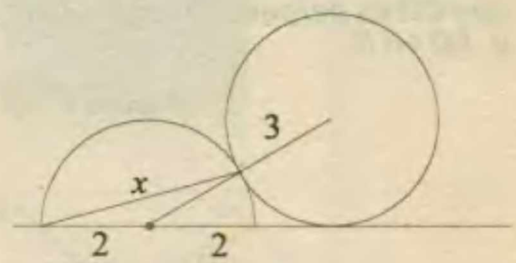
$$R^2 = (R - 10)^2 + 50^2$$

$$R^2 = R^2 - 20R + 100 + 2\,500$$

$$20R = 2\,600$$

$$R = 130$$ RPTA. D

23.- En la figura, hallar la longitud de la cuerda x :

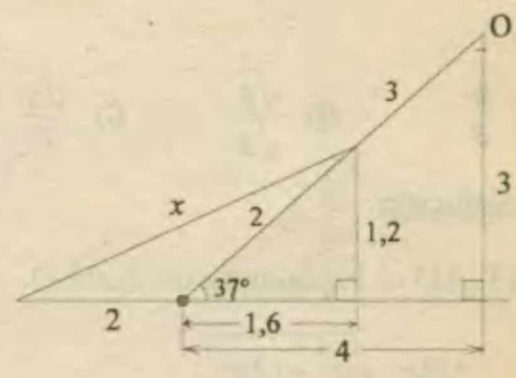


A) $\sqrt{14,4}$ *D)* $\sqrt{8}$

B) $\sqrt{8,5}$ *E) N.A*

C) 2

Resolución:



El triángulo retángulo formado por los centros de las circunferencias y el punto de tangencia ,es notable : (3 - 4 - 5).

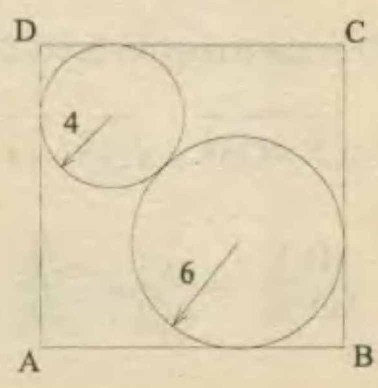
Después de completar los lados del triángulo sombreado, reconocemos que también es notable :($3k$ - $4k$ - $5k$), luego aplicamos Pitágoras:

$$x^2 = (3,6)^2 + (1,2)^2 = 14,4$$

$$x = \sqrt{14,4}$$ RPTA. A

24.- En la siguiente figura, los radios de las circunferencias miden 4 y 6 respectivamente.

Si AB = 18, cuál es la medida de BC = ?



A) 18

B) 15

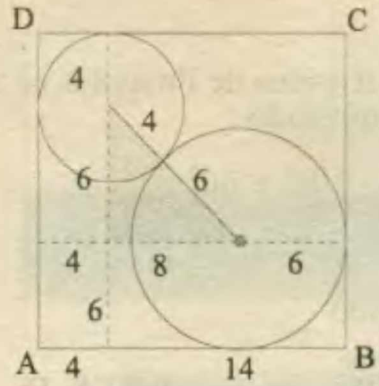
C) 20

D) 16

E) 14

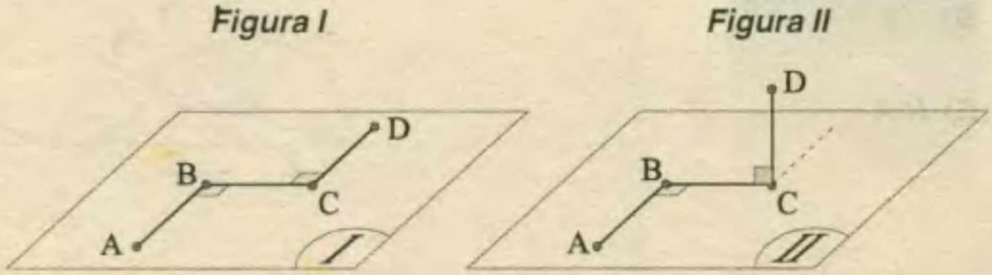
Resolución:

Uniendo los centros y trazando los lados se forma un triángulo retángulo Pitagórico : (6 - 8 - 10). De ahí es fácil deducir la medida de BC.



BC = 6 + 6 + 4 = **16** RPTA. D

25.- *Todos los segmentos son iguales y perpendiculares. La única diferencia en I y II es que CD es perpendicular al plano II. Hallar la relación entre la distancia AD en I en AD y AD en II.*



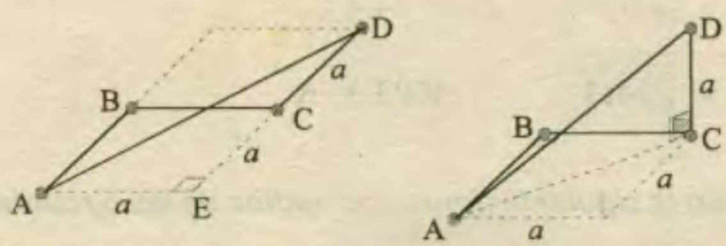
A) $\frac{5}{3}$ *B)* $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ *C)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *D)* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ *E)* $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ***PUCP 93 - II***

Resolución:

En I, AD es hipotenusa del ⊾AED:

$$AD = \sqrt{a^2 + (2a)^2}$$

$$\Rightarrow \quad AD = a\sqrt{5}$$

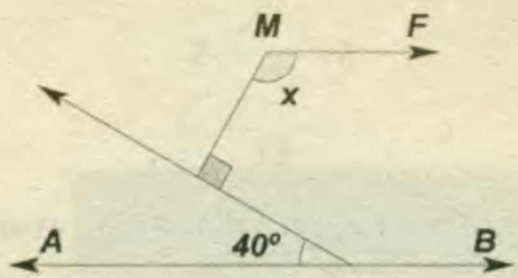


En II, AD es hipotenusa del ⊾ ACD, donde $AC = a\sqrt{2}$.

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{2a^2 + CD^2} = a\sqrt{3}$$

Luego: $\frac{AD(I)}{AD(II)} = \frac{a\sqrt{5}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ RPTA. B

26.- Hallar x , si : $\overline{MF} \parallel \overline{AB}$.



A) 130º

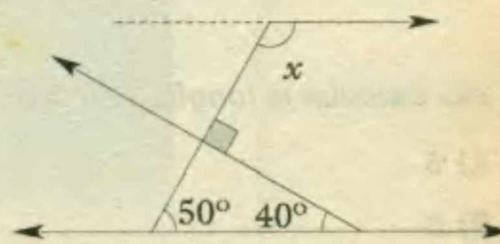
B) 140º

C) 150º

D) 160º

E) 170º

Resolución:

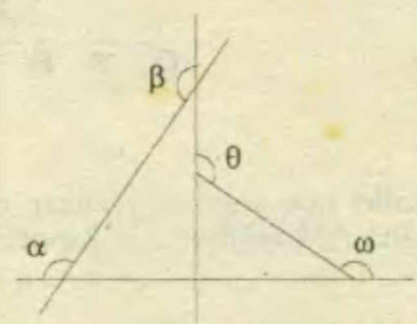


Prolonguemos el segmento perpendicular hasta interceptar a la otra paralela , hasta formarse el triángulo rectángulo indicado . Entonces por propiedad de ángulos correspondientes, se verifica que :

$$x + 50 = 180^\circ$$

$$x = 130^\circ$$ RPTA. A

27.- En la figura, calcular : $\alpha + \beta + \theta + \omega$



A) 500º

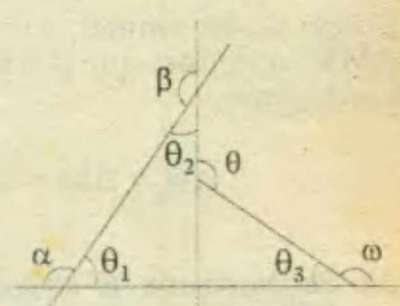
B) 510º

C) 520º

D) 530º

E) 540º

Resolución:



En la figura : $\alpha + \theta_1 = \beta + \theta_2 = \omega + \theta_3 = 180^\circ$

Luego : $\alpha + \beta + \omega + \underbrace{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} = 540^\circ$.........(*)

Pero por propiedad : $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta$

Entonces , en (*) : $\alpha + \beta + \omega + \theta = 540^\circ$

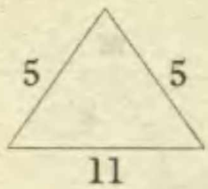
540° RPTA. E

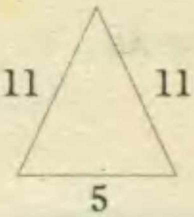
28.- Calcular el perímetro de un Δ isósceles en el cual 2 de sus lados miden 5 y 11.

A) 23 *B) 25* *C) 27* *D) 29* *E) 31*

Resolución.-

Podemos reconocer que el lado faltante puede medir 5 ú 11. Así en un 1er caso los lados del Δ serían : 5 ; 5 y 11 , y en el 2do caso los lados serían : 5 ; 11 y 11.





La 1ra opción es imposible, pues dicho Δ no existe , ya que : $11 > 5 + 5$

Solo queda la 2da opción, que si cumple la condición de existencia del triángulo.

Finalmente el perímetro está dado por : $P = 11 + 11 + 5 =$ **27** RPTA. C

29.- Calcular la longitud de $\overline{AB}$:

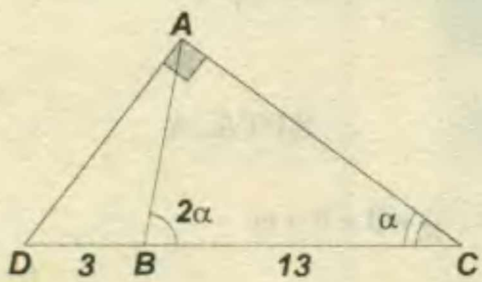
A) 5

B) 6

C) 7

D) 8

E) 9

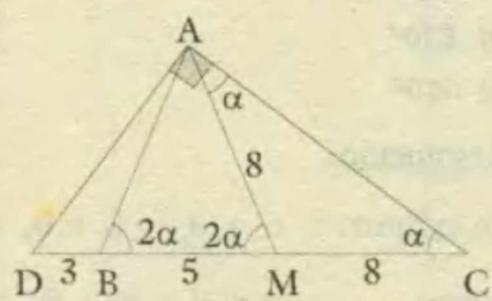


Resolución:

Un análisis sencillo nos sugiere realizar un trazo auxiliar, la mediana AM relativa a la hipotenusa del triángulo .

Asi tendremos : $AM = DM = MC = 8$

Luego de determinar la medida del ángulo $\widehat{AMB}$, se deduce que el Δ BAM es isósceles, por lo tanto :



$AB = AM =$ **8** RPTA. D

30.- Sabiendo que "E" es punto medio de $\overline{BC}$ y ABCD es un cuadrado ; hallar "x" :

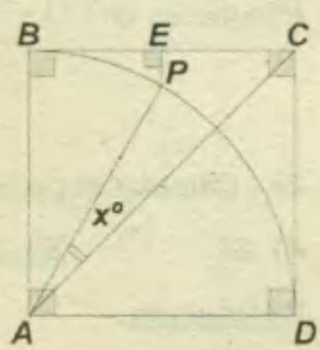
A) 10º

B) 11º

C) 12º

D) 13º

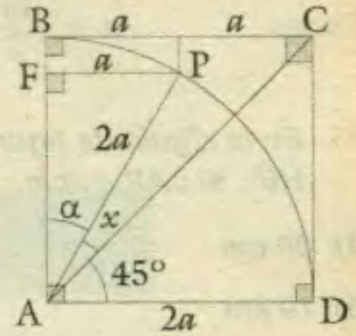
E) 15º



Resolución:

Trazando por P una paralela FP al lado BC , obtenemos el triángulo PFA que es notable : 30º ;

60°; 90° (por ser la hipotenusa, el doble de un cateto)



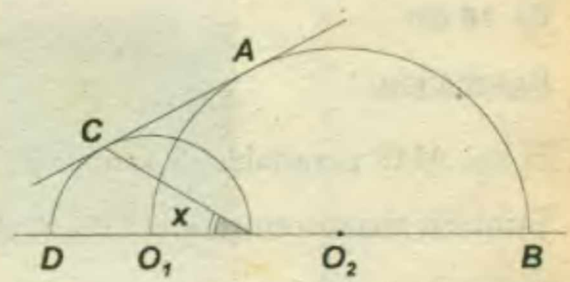
Entonces : $m \angle FAP = 30° = \alpha$

Además : $m \angle CAD = 45°$

Luego : $30° + x + 45° = 90°$

$x = 15°$ **RPTA. E**

31.- Si : $\overset{\frown}{AB} = 100°$; hallar "x" ,sabiendo que : O_1 y O_2 son centros de las semicircunferencias. Asimismo : A y C son puntos de tangencia.



A) 30° *B) 40°* *C) 50°*

D) 60° *E) 70°*

Resolución:

Se observa que : $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AO_1} = 180°$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AO_1} = 180° - \overset{\frown}{AB}$

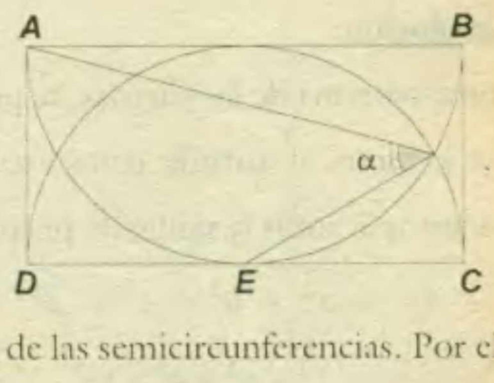
$\Rightarrow \overset{\frown}{AO_1} = 180° - 100°$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AO_1} = 80°$

Además se puede reconocer que : $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AO_1}$ y $x = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2}$

Entonces : $x = \dfrac{\overset{\frown}{AO_1}}{2} = \dfrac{80°}{2} = 40°$ **RPTA. B**

32.- Si ABCD es un rectángulo con semicircunferencias inscritas ; hallar "α".



A) 45° *B) 50°* *C) 55°*

D) 60° *E) 75°*

Resolución:

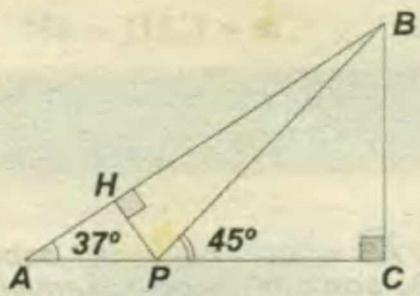
Se puede observar que el ángulo α está inscrito en una de las semicircunferencias. Por ello aplicaremos la propiedad de ángulos inscritos :

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AE}}{2}$$

Pero $\overset{\frown}{AE}$ es un cuarto de circunferencia, luego : $\overset{\frown}{AE} = 90°$

Luego : $\alpha = \frac{90°}{2} = 45°$ RPTA. A

33.- En la siguiente figura; hallar la medida de $\overline{HB}$, si : AP = 5cm.



A) 20 cm *D) 17 cm*

B) 19 cm *E) 16 cm*

C) 18 cm

Resolución:

El ⊿ AHP es notable de lados : 3 - 4 - 5 , con : AH = 4 *cm* ; AP = 5 *cm*

También reconocemos que : PC = BC = x

El ⊿ ACB también es de lados :$3k$ - $4k$ - $5k$, entonces : $\frac{AC}{4} = \frac{BC}{3} \Rightarrow \frac{5+x}{4} = \frac{x}{3}$

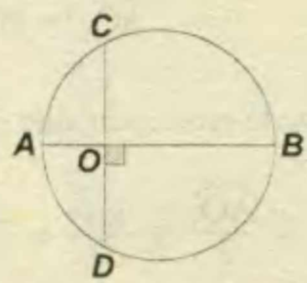
Resolviendo, hallamos x = 15 , luego : AC = 20 *cm*; BC = 15 *cm* , y , AB = 25 *cm* .

Entonces : HB = AB - AH

HB = 25 - 4 = 19 *cm* RPTA. B

34.- Hallar el diámetro de la circunferencia si :

AO = 2 , OB = 6 , CO = 3



A) 28,5 *D) 34,5*

B) 30,5 *E) 36,5*

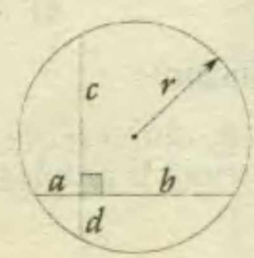
C) 32,5

Resolución:

Por el teorema de las cuerdas, se puede establecer que : $a \cdot b = c \cdot d$

Por lo tanto, al sustituir datos , tendremos : $2 \cdot 6 = 3 \cdot d \Rightarrow d = 4$

Luego aplicamos la siguiente propiedad :



$$4r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$\therefore \quad r^2 = \frac{2^2 + 6^2 + 3^2 + 4^2}{4} = 16{,}25$$

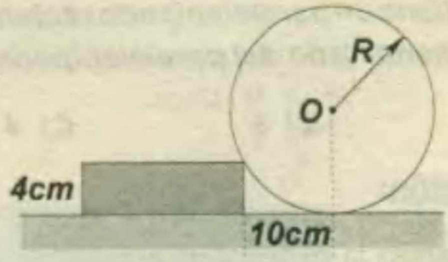
Finalmente el diámetro mide : $2r$ = 32,5 RPTA. C

35.- De la figura , calcular "R".

A) 14,5 *D) 19,5*

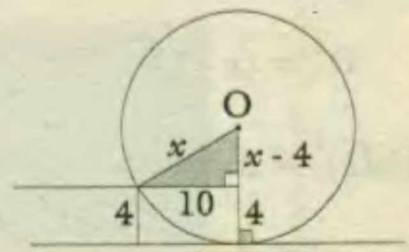
B) 16,5 *E) 20,5*

C) 18,5



Resolución:

Sea $R = x$, de acuerdo a la figura aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo sombreado :



$$x^2 = (x-4)^2 + 10^2$$

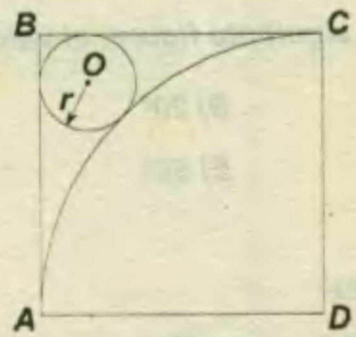
$$x^2 = x^2 - 8x + 16 + 100$$

$$\therefore \quad 8x = 116$$

$$x = 14,5$$

RPTA. A

36.- ABCD es un cuadrado de lado "a"; hallar el radio del círculo de centro "O".



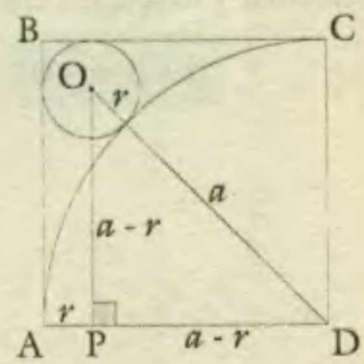
A) $\frac{a}{3}(3-\sqrt{2})$ *D)* $\frac{a}{2}(2+\sqrt{2})$

B) $\frac{a}{3}(3-\sqrt{3})$ *E)* $\frac{a}{2}(2-\sqrt{2})$

C) $\frac{a}{3}(3+\sqrt{3})$

Resolución:

Por "O" trazamos una paralela OP al lado AB y luego de formar el ⊿ OPD, aplicamos Pitágoras :



$$(a-r)^2 + (a-r)^2 = a^2$$

$$2\,(a-r)^2 = a^2$$

Entonces : $a - r = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \quad r = \frac{a\,(2-\sqrt{2})}{2}$$

$$r = \frac{a}{2}(2-\sqrt{2})$$

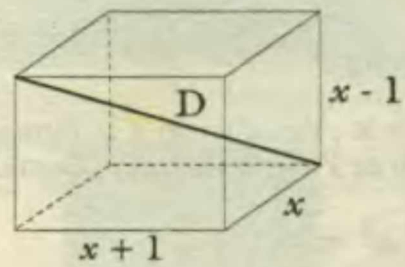
RPTA. E

37.- Se tiene un paralelepípedo rectangular cuyos lados son números consecutivos. Hallar el menor lado del paralelepípedo si la longitud de la diagonal interior mide $5\sqrt{2}$ cm.

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

Resolución:

Recordando la propiedad geométrica relativa a la diagonal de un paralelepípedo rectangular, podemos establecer que :



$$D^2 = (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2$$

$$\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 3x^2 + 2$$

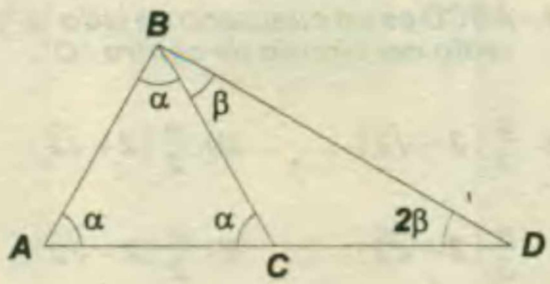
De donde : $x = 4$

Asi el menor lado mide : $x - 1 =$ **3** RPTA. B

38.- En la siguiente figura, el valor de $\alpha - \beta$; es :

A) 10º *B) 20º* *C) 30º*

D) 40º *E) 50º*



Resolución:

En el Δ ABC , es verifica que : $3\alpha = 180$ $\Rightarrow$ $\alpha = 60^\circ$

En el Δ CBD aplicamos la propiedad del ángulo exterior : $2\beta + \beta = 60$

Luego de efectuar y despejar , encontramos que : $\beta = 20$

Entonces : $\alpha - \beta = 40^\circ$ RPTA. D

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

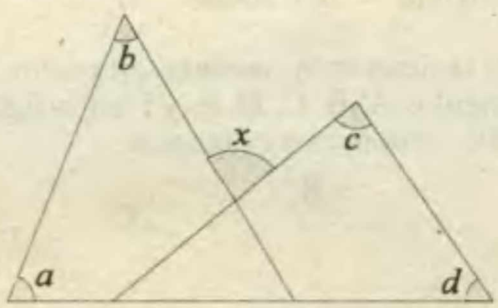
1.- B es punto medio de $\overline{AC}$ y D es el punto medio de $\overline{BE}$. Si $\overline{AE}$ mide $45\,cm$ y contiene 9 veces a $\overline{BC}$. ¿A qué distancia de A está D?



A) $20\,cm$ B) $25\,cm$ C) $18\,cm$

D) $24\,cm$ E) $30\,cm$

2.- Una de las siguientes expresiones relaciona la medida de los ángulos $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$ con $\hat{x}$. ¿Cuál es?



A) $x = a + b + c + d$

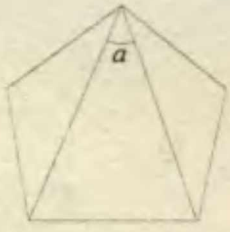
B) $2x = a + b + c + d$

C) $a + b + x = c + d$

D) $x + 180 = a + b + c + d$

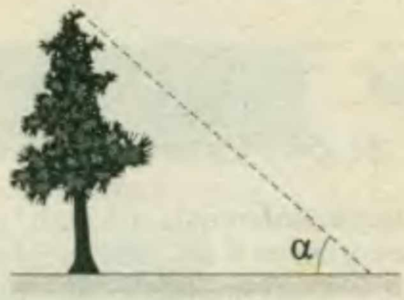
E) N.A

3.- Si la figura es un pentágono regular ; la medida del ángulo a es:



A) 72° B) 18° C) 36° D) 54° E) N.A

4.- La longitud de la sombra de un árbol situado en terreno horizontal es mayor que la altura del árbol.El ángulo formado por los rayos solares con el plano horizontal será menor que:



A) 30° B) 36° C) 40° D) 45° E) 60°

5.- En la figura calcular x si ABCD es un cuadrado y M , N son puntos medios de BC y CD respectivamente.

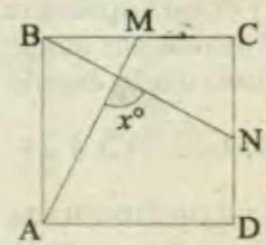
A) 60°

B) 75°

C) 90°

D) 120°

E) N.A



6.- En el siguiente gráfico hallar la medida de x.

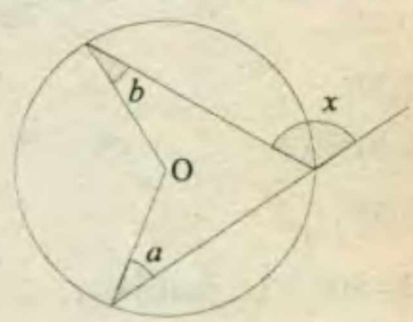
A) $a + b$

B) $180 - (a - b)$

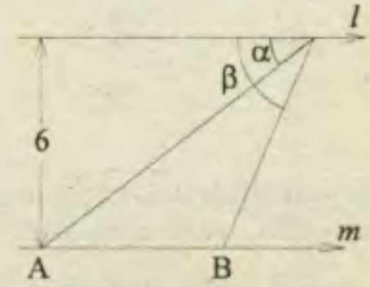
C) $2(a + b)$

D) $2(a + b)$

E) N.A

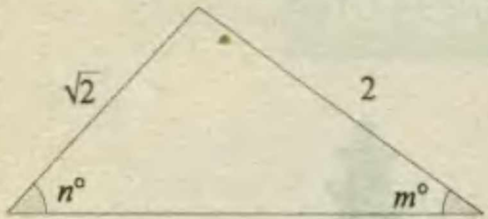


7.- En la figura, las rectas l y m son paralelas. $\alpha = 30°$ $\beta = 60°$ ¿Cuánto mide $\overline{AB}$?



A) 6 B) $4\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 4 E) $2 + \sqrt{3}$

8.- Si $n = 45°$, ¿cuál será el valor de m = ?



A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 120°

9.- En una circunferencia se trazan las cuerdas que se cortan en P. En cada cuerda se determinan dos segmentos cuyas longitudes dan como producto 231. Hallar la distancia del centro al punto P, sabiendo que el radio de la circunferencia es 20.

A) 10 B) 15 C) 12 D) 13 E) 6,5

10.- Uno de los ángulos de un triángulo mide 45° y el lado opuesto a este ángulo mide 8, si el otro de sus ángulos mide 30° ; el lado opuesto a este ángulo medirá:

A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{6}$ E) 5

11.- En la figura mostrada, el valor de α es :

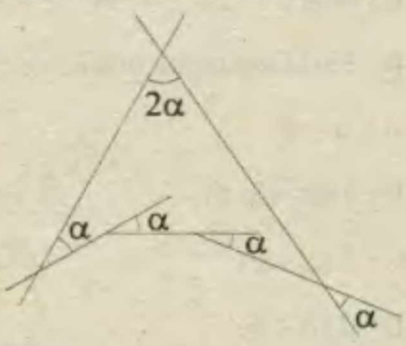
A) 10°

B) 20°

C) 30°

D) 40°

E) 50°



12.- Si $L_1 // L_2$, hallar α :

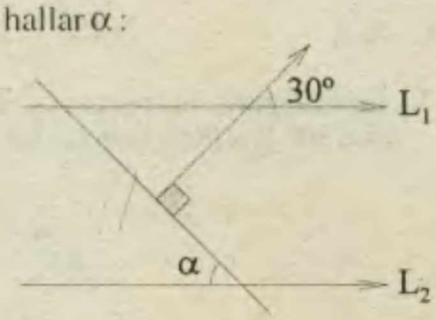
A) 30°

B) 60°

C) 90°

D) 45°

E) 15°



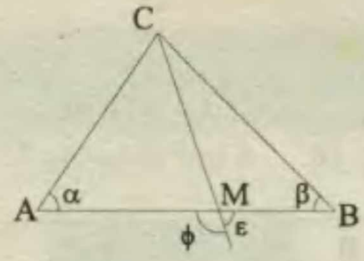
13.- Calcular la medida del mayor ángulo de un triángulo ABC, si se sabe que :

$m\angle A - m\angle B = 45°$; $m\angle A - m\angle C = 30°$

A) 75 B) 85 C) 60 D) 95 E) 90

NIVEL B

14.- En la figura: AM = MB = MC ¿Qué relaciones son verdaderas?



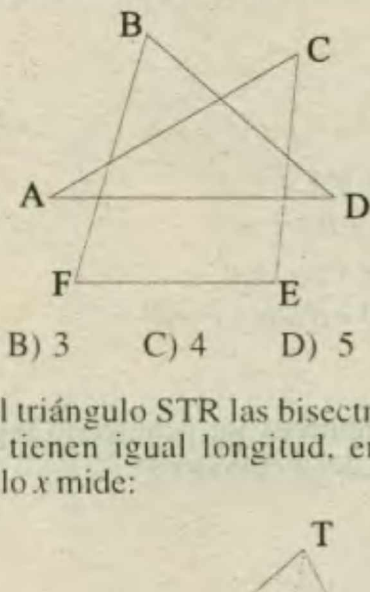
I) $\alpha = \frac{\phi}{2}$ III) $\alpha + \beta = 90°$

II) $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} = 90°$ IV) $\phi = 180° - 2\beta$

A) I y III B) I, II, III C) II y IV

D) Ninguna E) Todas

15.- Si la suma de las medidas en grados de los ángulos A, B, C, D, E, y F en la figura es $90n$, entonces n es igual a:



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

16.- En el triángulo STR las bisectrices $\overline{TP}$ y $\overline{RQ}$ tienen igual longitud, entonces el ángulo x mide:

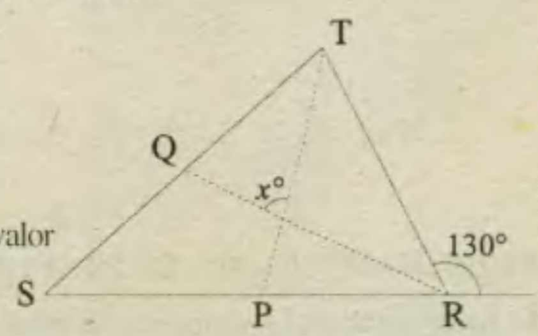
A) 50°

B) 65°

C) 45°

D) 60°

E) Otro valor



17.- Una cuerda de 40 *cm* dista 15 *cm* del centro de una circunferencia. ¿Cuánto distará del centro una cuerda de 30 *cm*?

A) 15 B) 18 C) 20 D) 24 E) N.A

18.- En la figura, hallar el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo rectángulo ABC.

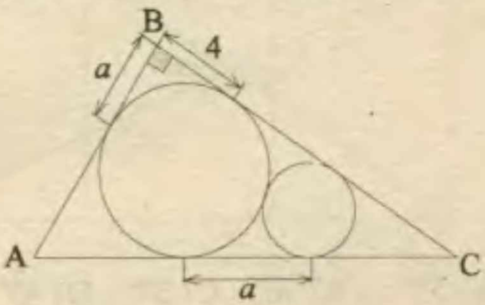
A) a

B) $a+2$

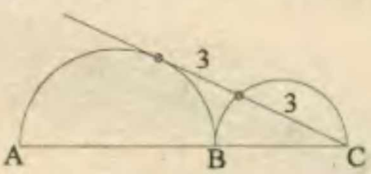
C) $a-2$

D) 2

E) 4



19.- En la figura, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son diámetros. Hallar AC.



A) 4 B) $6\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) 6 E) N.A

20.- Sean los conjuntos :

PR = {polígonos regulares}
CU = {cuadrados}
RE = {rectángulos}
RO = {rombos}

Y las siguientes afirmaciones:

I) RO ∩ RE = CU
II) PR ∩ RE = RE
III) CU - RO = RE

Son verdaderas:

A) Sólo I B) I y II C) I, II y III
D) I y III E) Ninguna

21.- ABCD es un cuadrado de 26 *m* de semiperímetro y las rectas que pasan por A,B y C son paralelas. La distancia entre las paralelas A y C es:

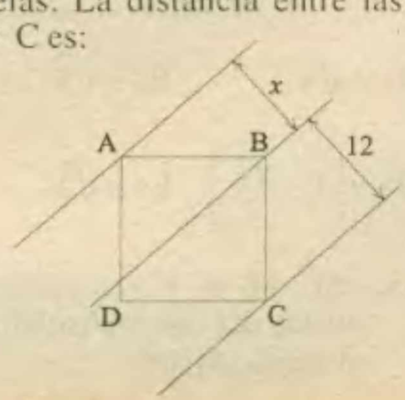
A) 19

B) 18

C) 15

D) 16

E) 17



22.- M es punto medio del lado $\overline{AB}$ del triángulo equilátero ABC. Si $\overline{RM}$ mide 3 *cm*; ¿cuánto mide $\overline{AB}$?

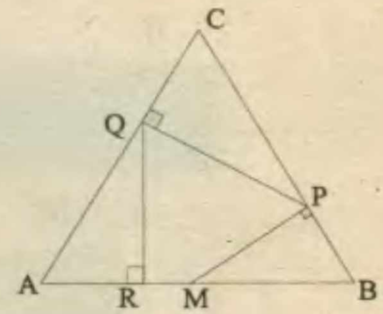
A) 12

B) 5

C) 8

D) 16

E) 18



23.- Calcular la medida del lado del triángulo equilátero inscrito en el sector circular de 60° cuyo radio mide $\sqrt{3}$. Además B es el punto medio del arco AC.

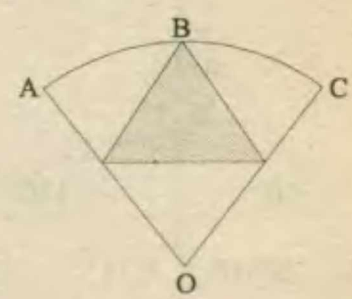
A) 1

B) 1/2

C) $\sqrt{3}/2$

D) $\sqrt{3}-1$

E) N.A



24.- En la figura, calcular "x".

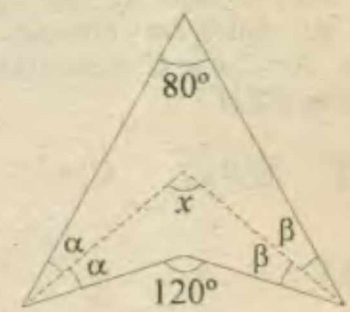
A) 80

B) 100

C) 120

D) 90

E) 75



25.- Si : BH = HA , y, CD = 1 ; hallar CB.

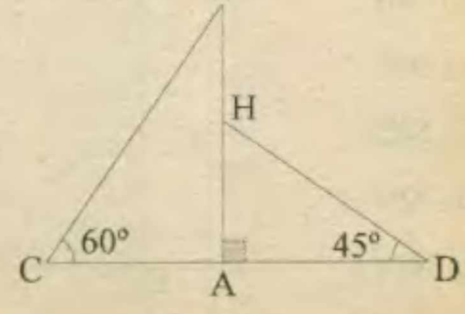
A) $2+2\sqrt{3}$

B) $4(2-\sqrt{3})$

C) $6\sqrt{2}+\sqrt{3}$

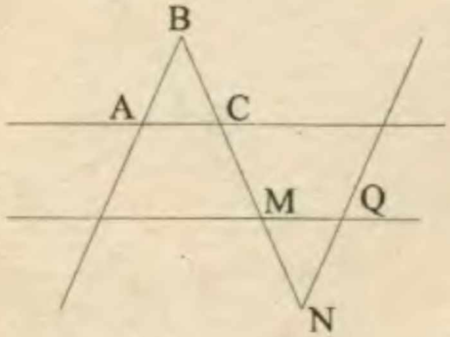
D) $12\sqrt{3}$

E) $4\sqrt{3}/3$



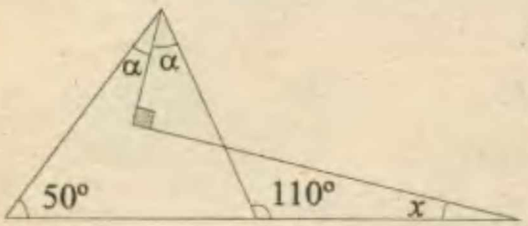
26.- En el esquema : $\overline{AB} \,//\, \overline{NQ}$; $\overline{AC} \,//\, \overline{MQ}$

AB = 5 ; BC = 3 ; NQ = 4 ; hallar MN.



A) 1 B) 1,2 C) 2,4 D) 3,8 E) 5,2

27.- En el gráfico; hallar "x"



A) 5° B) 10° C) 15° D) 20° E) N.A.

28.- En un triángulo ABC la altura BH determina sobre el lado $\overline{AC}$ dos segmentos AH y HC que miden $2m$ y $8m$ respectivamente ;si: $m\angle A = 2m\angle C$; calcular la longitud de la altura BH.

A) $2\sqrt{5}$ B) $4\sqrt{2}$ C) 5 D) 6 E) 4,5

NIVEL C

29.- Si ABCD es un cuadrado; calcular la suma de las medidas de los ángulos marcados.

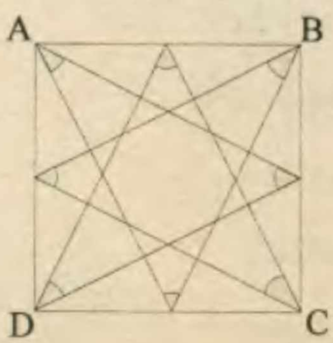
A) 180°

B) 360°

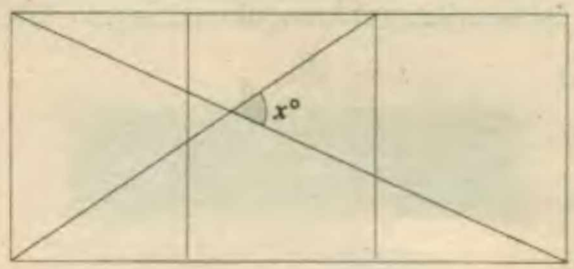
C) 540°

D) 720°

E) N.A

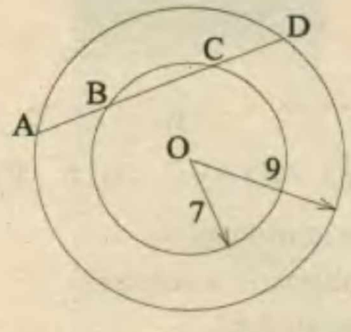


30.- La figura esta formada por 3 cuadrados iguales. ¿Cuánto mide x ?



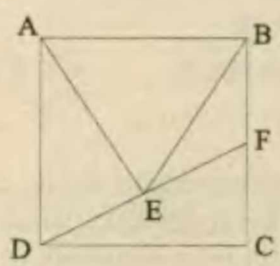
A) 53° B) 30° C) 37° D) 45° E) 60°

31.- Se traza la cuerda $\overline{AD}$ donde AB = BC = CD. Hallar AD.



A) 7,5 B) 9 C) 15 D) 10,5 E) 12

32.- Trazamos $\overline{DF}$ de tal manera que pase por el vértice E del triángulo equilátero AEB. ABCD es un cuadrado de lado a. ¿Cuánto mide $\overline{FC}$?



A) $a\sqrt{3}$ B) $a\sqrt{3}/2$ C) $a(2-\sqrt{3})$

D) $a\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ E) $a\sqrt{2}$

33.- Si : M, N, P, son puntos medios de las aristas del cubo mostrado. ¿Cuánto mide el ángulo MNP?

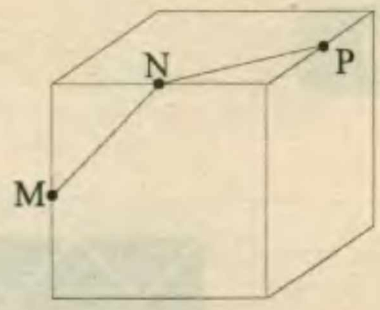
A) 60

B) 90

C) 120

D) 150

E) N.A.



34.- Calcular $\overline{BM}$, si se sabe que $\overline{MH}$ es mediatriz, AC = 12 y BC = 10

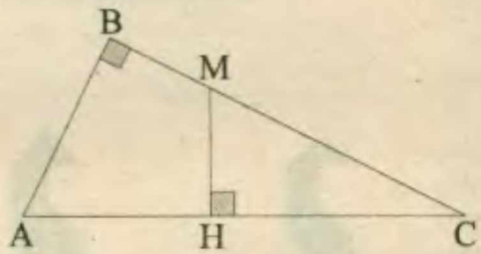
A) 4,8

B) 5,4

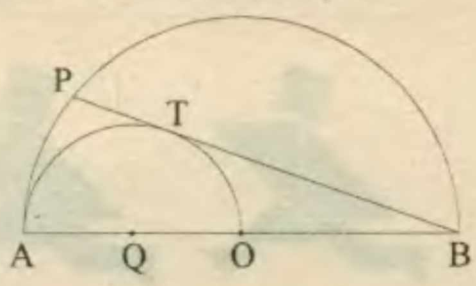
C) 2,8

D) 2,4

E) 3,6



35.- Sabiendo que $\overline{AB}$ es diámetro al igual que $\overline{AO}$, O es punto medio y T punto de tangencia: hallar PB, si PT = 2



A) 12 B) 10 C) 8 D) $4\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{3}$

36.- Si AD = 8, BC = 4 y AB = 18; hallar BP.

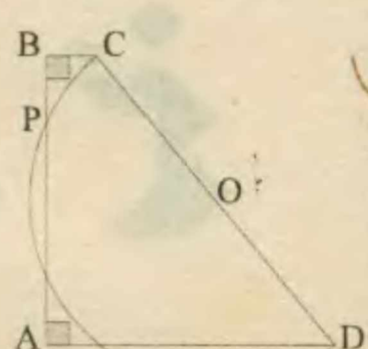
A) 1

B) 1.5

C) 3

D) 2.5

E) 2



37.- Calcular la suma de las longitudes de las semicircunferencias construídas sobre el diámetro $\overline{AB}$, que mide $8m$.

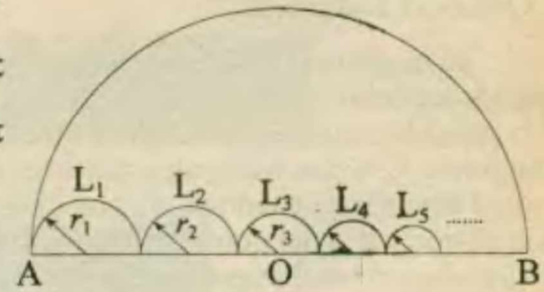
A) 12π

B) $8+\pi$

C) $4+\pi$

D) 4π

E) 6π



38.- Hallar AF, si AM = MB y el lado del cuadrado ABCD mide $\sqrt{10}$

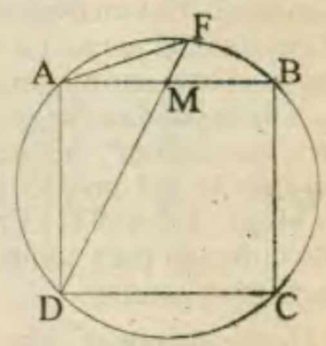
A) 1

B) 2

C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$

E) 3



39.- Determinar el lado de un cuadrado inscrito en un rombo cuyas diagonales miden "a" y "b".

A) $\dfrac{2ab}{a+b}$ B) $\sqrt{ab}$ C) $\dfrac{ab}{a+b}$

D) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ E) $\dfrac{(a+b)\,b}{a-b}$

40.- ¿Qué ángulo es necesario girar la puerta de la figura, para que la distancia entre el punto medio P y Q sea 2?

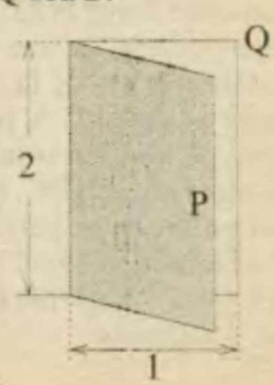
A) 120°

B) 90°

C) 60°

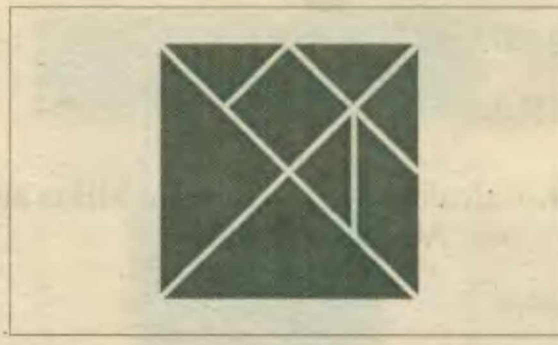
D) 150°

E) 45°

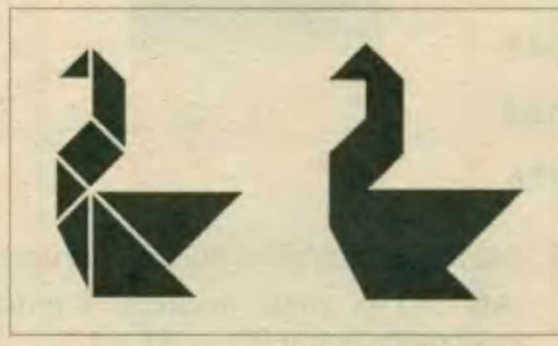


TANGRAM

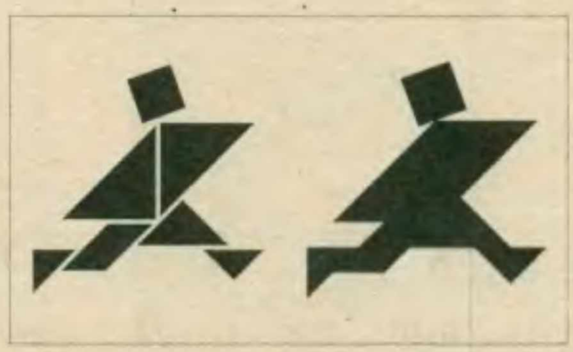
¿Qué es el Tangram?



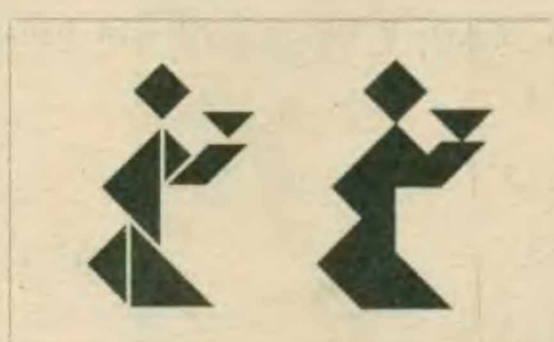
El tangram es un rompecabezas formado por siete piezas recortadas a partir de un cuadrado. Estas son : Un paralelogramo, un cuadrado y cinco triángulos rectángulos. Los dos triángulos mayores equivalen a la mitad del área de cuadrado menor, como a la del paralelogramo y a la del quinto triángulo. Este triángulo, el cuadrado y el paralelogramo representan, cada uno, 1/8 del cuadrado original y los dos triángulos pequeños, 1/16 cada uno.



Es la regularidad entre las piezas y su escaso número que hacen del Tangram un juego fascinante, el cual requiere habilidad y creatividad a pesar de su aparente facilidad. Y es en esta contradicción, que reside todo el encanto del juego. La verdad es que el término *juego* no es el más apropiado para este rompecabezas. El origen de la palabra *Juego* (siglo XII) significa "diversión", "recreación", "juguete", y su esencia es más antigua que la del propio trabajo (según George Herbert Mead - 1863/1931). En la actualidad este término se ha utilizado para competencias deportivas, colectivas o entre parejas.



El tangram, por el contrario, se trata de un juego individual y no de competencia. El objetivo consiste en formar el *borde* de una figura utilizando sus siete piezas. Las posibilidades de creación son infinitas. Un buen ejercicio al comienzo para los novatos consiste en intentar formar el cuadrado original utilizando todas las piezas. La supuesta sencillez que presenta el juego inicialmente, dará lugar a un complicado ejercicio de aritmética visual.



No se conoce con exactitud la edad de este juego o quien fue su inventor. Algunos consideran que existe desde el comienzo de la china unificada, durante la dinastía Ts'in (1122 - 256 a. C.). Como los registros de este periodo en ese país son muy escasos, toda una valiosa parte de la historia de la humanidad aún permanece oscura. A pesar de tratarse de un juego antiguo, el tangram solamente se difundió en el Occidente en el siglo XIX , para convertirse desde entonces en un juego respetado por las esferas intelectuales de Europa al igual que el ajedrez. Cuentan que Napoleón se entretenía en el frente de batalla solucionando Tangrams.

11 Planteo de Ecuaciones

Para resolver un problema relativo a números o cantidades desconocidas se debe expresar una información escrita en idioma normal, en el simplificado idioma de las proposiciones matemáticas, las cuales nos permiten operar con más comodidad y rapidez que otros procedimientos. Esto implica realizar una especie de *traducción* de situaciones de la vida real, al simbolísmo matemático, tarea que constituye el argumento más útil en todo el proceso de solución.

A continuación te presento un listado de frases típicas que suelen aparecer en los problemas, y a un costado su respectiva traducción matemática :

El resultado de sumar un número a 7	→	$7 + x$
La suma de algún número y 13	→	$\square + 13$
El resultado de restar a 18 algún número	→	$18 - z$
5 por algún número	→	$5 . \Delta$
Dos veces la suma de un número y 5	→	$2.(\square + 5)$

Nótese que cada vez que nos hemos referido a un número o algún número, en la traducción matemática, ésta se ha representado por una letra (x, y, o, z) o un símbolo : $\square$; Δ.

Ahora, cuando tengas que traducir una frase a una ecuación, debes determinar el significado de cada parte y asimismo tendrás que reconocer qué es lo que vas a reemplazar por una variable.

Ejemplo 1 :

Un número, aumentado en 5 da como suma 23

$$n + 5 = 23$$

Ejemplo 2 :

S/. 6 menos que el costo de un sombrero es S/. 17

$$x - 6 = 17$$

I) PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER PROBLEMAS

La experiencia me permite proponer que lo esencial para resolver un problema planteando ecuaciones, consiste en la habilidad para seguir cada uno de los siguientes pasos:

1º) **Representación** de las cantidades desconocidas o incógnitas por variables (x, y, z, etc).

2º) **Planteo** de las ecuaciones que relacionan a las incógnitas con los datos del problema.

3º) **Solución** de las ecuaciones planteadas, esto es, determinar los valores de las variables.

4º) **Prueba** o verificación de los valores obtenidos para ver si cumplen las condiciones del problema.

No está demás afirmar que las etapas de representación y planteo, requieren la mayor concentración posible, pues al realizarlas correctamente se asegura una solución del problema. Es por eso que a estas etapas les daremos mayor énfasis en la resolución de los problemas que presentaremos a continuación.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Leonor y Eduardo tienen juntos 75 monedas. Eduardo tiene el doble de monedas que Leonor. ¿Cuántas monedas tiene cada una de estas dos personas?

A) L = 25 ; E = 45 *B) L = 30 ; E = 40* *C) L = 20 ; E = 50*

D) L = 25 ; E = 50 *E) L = 15 ; E = 55*

Resolución:

En principio no se sabe cuántas *monedas*, tiene cada persona. A continuación representaremos matemáticamente las condiciones del problema:

Sea x el número de monedas de Leonor x

Eduardo tiene el doble de monedas que Leonor .... $2x$

Número de monedas que ellos tienen juntos : .... $x + 2x$

Como "$x + 2x$" y "75" son el mismo número, la ecuación será : .... $x + 2x = 75$

Con la ecuación ya planteada, la solución que sigue es inmediata : $3x = 75 \Rightarrow x = 25$

Así concluímos que Leonor tiene 25 monedas y como Eduardo tiene el doble, poseerá: $2 \times 25 = 50$ monedas. **RPTA. D**

Nota: *Es fácil comprobar que juntos tienen 25 + 50 = 75 monedas lo que coincide con la información dada.*

2.- Beatriz y Sara coleccionan cupones de modo que entre las dos tienen 80. Tres veces el número de cupones que tiene Beatriz es igual a 5 cupones más que el doble de los cupones que tiene Sara. ¿Cuántos cupones tiene cada una de las muchachas?

A) B = 27 ; S = 63 *B) B = 33 ; S = 47* *C) B = 22 ; S = 68*

D) B = 47 ; S = 33 *E) B = 35 ; S = 45*

Resolución:

Sea z el número de cupones que tiene **Beatriz** : .... z

Entre las dos tienen 80, luego el número de cupones que tiene **Sara** es: .... $80 - z$

Tres veces el número de cupones que tiene **Beatriz** .... $3z$

Es igual a .... $=$

Cinco cupones más que el doble del número de cupones que tiene **Sara** : .... $2.(80 - z) + 5$

La ecuación es: .... $3z = 2.(80 - z) + 5$

Después de resolver la ecuación se obtiene $z = 33$, de este modo Beatriz tiene 33 cupones y Sara tiene $80 - 33 = 47$. **RPTA. B**

3.- Un granjero tiene pollos y caballos. Todos estos animales tienen juntos 50 cabezas y 140 patas. ¿Cuántos pollos y cuántos caballos tiene el granjero?

A) P = 30 ; C = 20 *B) P = 25 ; C = 25* *C) P = 18 ; C = 32*
D) P = 20 ; C = 30 *E) P = 32 ; C = 18*

Resolución:

Es necesario hacer unas hipótesis lógicas respecto a la información dada. En primer lugar debemos suponer que todos los animales son "normales", es decir : Cada uno de ellos tiene una cabeza, asimismo cada pollo tiene un número habitual de patas, es decir 2, y que cada caballo tiene un número usual de patas, es decir 4. No sabemos ni el número de pollos ni el de caballos, pero sabemos que entre unos y otros hay 50.

Representemos por x al número de caballos : x

El número de pollos será : .... $50 - x$

La última parte de la información se refiere al número de patas.
Si un caballo tiene 4 patas, x caballos tendrán : .... $4x$

Igualmente, el número de patas de los pollos será : .... $2\,(50 - x)$

Hay en total 140 patas, por tanto la ecuación es : .... $4x + 2(50 - x) = 140$

Resolviendo:.. $4x + 100 - 2x = 140$

$$2x = 40$$

$$x = 20$$

Hay 20 caballos y $50 - 20 = 30$ pollos. **RPTA. A**

Nota: ***En estos primeros ejemplos se han planteado ecuaciones con una sola variable y aunque esto parece sufiente, veremos que a veces es deseable representar cada una de las incógnitas con una letra diferente. Con la práctica que tú mismo realices lograrás reconocer cuál planteamiento es el más conveniente.***

4.- Si se suman dos números, se obtiene 27 y si se restan, el resultado es 13. Hallar los números.

A) x = 12 ; y = 15 *B) x = 11 ; y = 16* *C) x = 20 ; y = 7*
D) x = 15 ; y = 12 *E) x = 18 ; y = 9*

Resolución:

Sea "x" el primer número, e, "y" el segundo.

La suma de los dos es 27 .... $x + y = 27$

Asumiendo que x es el mayor, siendo la resta
igual a 13, escribimos : .... $x - y = 13$

Aplicando cualquier método de eliminación, reducimos el sistema a una sola ecuación con una incógnita, hasta obtener $x = 20$; $y = 7$ **RPTA. C**

5.- La suma de tres números consecutivos es 24 ¿cuáles son dichos números ?

A) 6 ; 7 ; 8 ***B) 8 ; 9 ; 10*** ***C) 5 ; 6 ; 7*** ***D) 7 ; 8 ; 9*** ***E) N.A.***

<u>Resolución:</u>

* Podría parecer algo ingenuo (aunque no incorrecto) escribir :

$x + y + z = 24$; $y = x + 1$; $z = y + 1$

Pero lamentablemente hay demasiadas variables, dejémoslo ahí.

* Más bien, podría decirse que si x es el primer número, el segundo es $x + 1$ y el tercero es $x + 2$, entonces :

$x + (x + 1) + (x + 2) = 24$

Indudablemente esto está mejor.

* O podría decirse que si x es el entero intermedio, entonces el menor número es: $x - 1$ y el mayor es: $x + 1$; de modo que:

$(x - 1) + x + (x + 1) = 24$, lo cual conduce a : $3x = 24$.

Como se ha podido apreciar, el mismo problema lo hemos planteado de 3 formas diferentes, pero es fácil reconocer que algunas son más eficaces que otras; en este caso la tercera, de la cual se obtiene $x = 8$ y los números serán :

7; 8 y 9. RPTA. D

6.- En una billetera hay 45 billetes que hacen un total de 1 530 soles. Si una parte son billetes de 10 soles y la otra billetes de 50 soles. ¿Cuántos billetes de cada clase hay en la billetera?

A) 15 de S/. 10 ; 30 de S/. 50 ***B) 28 de S/. 10 ; 17 de S/. 50*** ***C) 25 de S/. 10 ; 20 de S/. 50***

D) 20 de S/. 10 ; 25 de S/. 50 ***E) 18 de S/. 10 ; 27 de S/. 50***

<u>Resolución:</u>

Sea x el número de billetes de 10 *soles*, e, y el número de billetes de 50, entonces: $x + y = 45$; pero "y" billetes de 50 *soles* hacen un total de $50y$ *soles*, mientras "x" billetes de 10 *soles* hacen un total de $10x$ *soles*, entonces: $50y + 10x = 1\ 530$. El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ 50y + 10x = 1\ 530 \end{cases}$$

Otra Método :

Sea x el número de billetes de 10, entonces $(45 - x)$ es el número de billetes de 50. Luego x billetes de 10 totalizan $10x$ *soles* y los otros totalizan $50(45 - x)$ *soles*; por tanto la ecuación a resolver es:

$$10x + 50(45 - x) = 1\ 530$$

En conclusión:

Cualquiera sea la forma del planteo de las ecuaciones, estas nos conducirán a: $x = 18$ billetes de S/.10 y 27 billetes de S/.50.

OJO! La elección del mejor método, dependerá de tu decisión personal. **RPTA. E**

7.- Un caballo y un mulo caminaban llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el caballo de su enojosa carga, a lo que el mulo dijo : "¿De qué te quejas? Si yo tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco tu carga se igualará a la mía". ¿Cuánto sacos llevaba el caballo y cuántos el mulo?

A) C = 6 ; M = 8 *B) C = 3 ; M = 6* *C) C = 5 ; M = 7*

D) C = 5 ; M = 6 *E) C = 7 ; M = 9*

Resolución:

Como la información está dispersa en un enunciado más o menos extenso, conviene representar cada una de sus partes conforme se realiza la lectura. Llamemos "x" a la carga del caballo e "y" a la carga del mulo. Ahora expresando matemáticamente las "palabras" del mulo, tendremos:

Si yo te tomara un saco .... $x - 1$ (carga del caballo)

Mi carga .... $y + 1$

Sería el doble que la tuya .... $y + 1 = 2(x - 1)$ .... (α)

Y si te doy un saco .... $y - 1$ (carga del mulo)

Tu carga .... $x + 1$

Se igualará a la mía .... $y - 1 = x + 1$ .... (β)

Se ha logrado plantear el problema mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas :

$$\begin{cases} y+1 = 2(x-1) \\ y-1 = x+1 \end{cases} \quad ó \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ \quad y = x+2 \end{cases}$$

El resto es fácil, sumamos las dos ecuaciones y obtenemos: $2x = x + 5$, es decir $x = 5$; después se obtiene: $y = 5 + 2 = 7$. El caballo llevaba 5 sacos y el mulo 7. **RPTA. C**

8.- Al ser preguntada una dama por su edad, contestó que no tenía porqué ocultarla, pero a aquel que quisiera saberla, le costaría cierto trabajo determinarla y agregó: "Si al año en que cumplí los 15 le suman el año en que cumplí los 20 y si a este resultado le restan la suma del año en que nací con el año actual obtendrán 7". ¿Cuá es la edad de la dama?

A) 28 *B) 32* *C) 36* *D) 40* *E) 42*

Resolución:

Año de nacimiento x

Edad actual .... y

Año en que cumplió 15 años .... $x + 15$

Año en que cumplió 20 años .... $x + 20$

Año actual .... $x + y$

La ecuación es: $\{(x + 15) + (x + 20)\} - \{x + (x + y)\} = 7$

Simplificando, quedaría:.. $y = 28$

Por lo tanto la dama tiene **28 años.** RPTA. A

9.- Quince personas, entre hombres y mujeres, comen en un restaurante, los hombres gastan 360 soles y las damas también. Búsquese el número de hombres y su gasto individual sabiendo que cada mujer ha gastado 20 soles menos que un hombre.

A) 12 y S/. 30 B) 9 y S/. 40 C) 8 y S/. 45 D) 4 y S/. 90 E) 6 y S/. 60

Resolución:

Sea x el número de hombres; entonces $(15 - x)$ será el número de mujeres.

El gasto de un hombre está dado por : $\frac{360}{x}$

Luego el gasto de una mujer vendría dado por : $\frac{360}{15-x}$

Según condición, del problema esta última cantidad resulta ser 20*soles* menos que la primera; luego la ecuación será :

$$\frac{360}{x} - \frac{360}{15-x} = 20 \quad , \text{ ó } , \quad x^2 - 51x + 270 = 0$$

$$(x - 45)(x - 6) = 0$$

Resolviendo : $x = 45$, y , $x = 6$

Observamos que el valor ó raíz $x = 45$ da un número de personas superior a 15, lo cual contradice el enunciado. Luego solo sirve la solución : $x = 6$.

Esto nos permite asegurar que en la reunión estuvieron 6 hombres y 9 mujeres los cuales gastaron 60 y 40 *soles* respectivamente. RPTA. E

10.-Tres jugadores acuerdan que el perdedor duplicará el dinero de los otros dos. Juegan 3 partidas, pierden una cada uno y al retirarse lo hacen con 16 soles cada uno. ¿Cuánto tenía cada jugador al principio?

A) 8 ; 24 ; 16 B) 26 ; 14 ; 8 C) 12 ; 1 ; 28 D) 24 ; 28 ; 30 E) N.A.

Resolución:

Sean x, y, z lo que tenía cada jugador al inicio.

Después de la *primera partida* el primero habrá perdido $(x + z)$, de tal modo que cada jugador tendrá:

$$1^{\underline{o}})\ x - y - z \quad ; \quad 2^{\underline{o}})\ 2y \quad ; \quad 3^{\underline{o}})\ 2z$$

Después de la *segunda partida*, el segundo habrá dado :

$$\{(x - y - z) + 2z\} \quad ó \quad (x - y + z)$$

Por tal razón al final de esta partida los jugadores quedarán con las siguientes cantidades:

$$1^{\underline{o}})\ 2x - 2y - 2z \quad ; \quad 2^{\underline{o}})\ 3y - x - z \quad ; \quad 3^{\underline{o}})\ 4z$$

Después de la *tercera partida* los jugadores quedarán con las siguientes cantidades:

$$1^{\underline{o}})\ 4x - 4y - 4z \quad ; \quad 2^{\underline{o}})\ 6y - 2x - 2z \quad ; \quad 3^{\underline{o}})\ 7z - x - y$$

Como cada jugador queda finalmente con 16 *soles* cada uno, logramos establecer las siguientes ecuaciones:

$$4x - 4y - 4z = 16 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$
$$6y - 2x - 2z = 16 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$
$$7z - x - y = 16 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

La ecuación (1) dividida por 4 da : $x - y - z = 4$ ......(*)

Sumando (1)+(2)+(3), se tiene : $x + y + z = 48$ ......(**)

Y sumando (*) + (**) se deduce que : $2x = 52 \Rightarrow x = 26$

El resto es fácil : $y = 14 \ ; \ z = 8$ RPTA. B

11.- "Sumar cuatro unidades a la mitad del triple de un cierto número m" , se escribe :

A) $4 + \frac{m}{2} + 3$ *B)* $4 + \frac{1}{2} + 3m$ *C)* $4 + \frac{m}{2} + 3$ *D)* $4 + \frac{3}{2} + m$ *E)* $4 + \frac{3m}{2}$

Resolución:

La mitad del triple de m es : $\frac{3m}{2}$

Sumar 4 unidades a lo anterior es : $4 + \frac{3m}{2}$ RPTA. E

12.- ¿Cómo se escribe el enunciado: "Si al cuadrado de un número n se le sustrae el duplo del mismo número, resulta (2n - 1)"?

A) $2n - \frac{n}{2} = 2n - 1$ *B)* $n^2 - 2n^2 = 2n - 1$ *C)* $n^2 - \frac{n}{2} = 2n - 1$

D) $n^2 - (n + 2) = 2n - 1$ *E)* $n^2 - 2n = 2n - 1$

Resolución:

Al cuadrado de un número n : .... n^2

Se le sustrae el duplo del mismo número : .... $n^2 - 2n$

Resulta $2n - 1$ $= 2n - 1$ RPTA. E

13.- María pensó un número, lo multiplicó por 4, le sumó 6, lo dividió entre 2 y le restó 4. Si el resultado es 39 ¿En qué número pensó?

A) 16 *B) 15* *C) 20* *D) 21* *E) 19* ***UNMSM 96***

Resolución:

Sea x el número que pensó María .

Lo multiplicó por 4 y le sumó 6 : .... $4x + 6$

Lo dividió entre 2 y le restó 4 : .... $\frac{4x+6}{2} - 4$

Si el resultado es 39 ,entonces : $\frac{4x+6}{2} - 4 = 39$

$\Rightarrow \quad x = 20$ RPTA. C

14.- Una inmobiliaria ha comprado 4 casas. La segunda ha costado "x" soles más que la primera, la tercera "y" soles más que la segunda; la cuarta "z" soles más que la tercera. Si la primera casa ha costado "a" soles ¿ Cuánto se ha gastado en total?

A) a + 3x + 2y + 2z *B) a + x + y + z* *C) a + 2x + 3y + 4z*

D) 4a + x + x + z *E) 4a + 3x + 2y + z* ***PUCP 95 - II***

Resolución:

1ra: a ; 2da: $a + x$; 3ra: $a + x + y$; 4ta: $a + x + y + z$

En total : $4a + 3x + 2y + z$ RPTA. E

15.- Un comerciante tenía cierta suma de dinero. El primer año gastó 100 soles; durante el segundo año aumentó su capital en un tercio de lo que le quedó y luego gastó 100 soles, quedándole al final el doble de la suma inicial. Si la cantidad inicial es x. ¿Cuál de los siguientes planteamientos del problema es correcto?

A) $\frac{x-100}{3} = 2x + 100$ *B)* $x - 100 + \frac{x}{3} = 2x$ *C)* $x - 200 + \frac{x-100}{3} = 2x$

D) $x - 100 + \frac{x-100}{3} = 2x$ *E) Ninguno es correcto.*

Resolución:

Primer año : $x - 100$

Segundo año : $x - 100 + \frac{x-100}{3} - 100$

Le quedó el doble de x : $x - 100 + \frac{x-100}{3} - 100 = 2x$

Ordenando se obtiene una expresión como : C RPTA. C

16.- Tengo "r" soles y me obsequian como propina "t" soles, entonces podré comprarme "u - 4" libros. ¿Cuánto cuesta cada libro?

A) $(r+t)(u-4)$ *B)* $\dfrac{r+t}{u-4}$ *C)* $(r-t)(u-4)$ *D)* $\dfrac{r-t}{u+t}$ *E)* $\dfrac{r+t}{r-t}$ *UNFV 96*

Resolución:

Dinero disponible : $r + t$

\# de libros comprados : $u - 4$

Precio de 1 libro : $\dfrac{r+t}{u-4}$ RPTA. B

17.- Un niño tenía 20 bolas, unas rojas y otras azules. Si pierde 4 bolas de cada color, entonces el triple del número de bolas azules equivaldría al número de bolas rojas. ¿Cuántas bolas rojas tenía?

A) 14 *B) 7* *C) 12* *D) 13* *E) 11* *UNMSM 93*

Resolución:

R: rojas y A: azules, entonces : $R + A = 20$ .... (1)

Si se pierde 4 de cada color, quedan : $R - 4$ y $A - 4$.

Y con ellos se cumple esta otra condición : $3(A - 4) = R - 4$ .... (2)

Resolviendo (1) y (2) : $R = 13$; $A = 7$ RPTA. D

18.- Con 3 125 soles se pueden hacer tantos grupos iguales con monedas de 5 soles como monedas tenga cada grupo. La suma de las cifras del número que expresa el valor en soles de cada grupo es:

A) 8 *B) 10* *C) 11* *D) 13* *E) 7* *PUCP 90 - I*

Resolución:

Consideremos que el # de monedas en cada grupo es : x

Luego el # de grupos que existen es : x

Entonces el # total de monedas viene dado por : $x.x$

Cada moneda es de 5 *soles*, entonces : $5x.x = 3\,125 \Rightarrow x^2 = 625 \Rightarrow x = 25$

En cada grupo tenemos 25 monedas de 5 *soles*: 125 *soles*.

Suma de cifras = 1 + 2 + 5 = 8 RPTA. A

19.- Lo que un obrero gana en 6 días, un técnico lo gana en 4 días. Si el obrero trabaja 60 días y el técnico 50 días, entre ambos cobran 810 soles. ¿A cuánto asciende lo que ambos cobran en un día?

A) 6 *B) 8* *C) 9* *D) 14* *E) 15* *PUCP 93 - II*

Resolución:

Sean x ,e, y respectivamente lo que ganan diariamente el obrero y el técnico , entonces :

$$6x = 4y \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$60x + 50y = 810 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Resolviendo : $x = 6$; $y = 9$; $x + y = 15$ RPTA. E

20.- Un turista repartió 20 dólares entre 20 niños, de modo que el que tenía 3 años recibió 3 dólares, el que tenía 2 años 2 dólares y el que tenía medio año, 0,5 dólares. Entonces, el valor absoluto de la diferencia entre el número de niños de 3 años y el número de niños de dos años es:

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5* ***UNFV 92***

Resolución:

Sean x; y; z respectivamente el número de niños de 3 años, 2 años y 1/2 año.Luego :

$$x + y + z = 20 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$3x + 2y + \frac{1}{2}z = 20 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

De (1) y (2) : $5x + 3y = 20$ ....(*)

Resolvemos (*), considerando que tanto x como y deben ser enteros: $x = 1$; $y = 5$

Entonces $|x - y| = |1 - 5| = 4$ RPTA. D

21.- Dos cirios de igual calidad y diámetro difieren en 12 cm de longitud. Se encienden al mismo tiempo y se observa que en un momento determinado, la longitud de uno es el cuádruplo de la del otro y media hora después se termina el más pequeño. Si el mayor dura 4 horas, su longitud era:

A) 24 *B) 28* *C) 32* *D) 30* *E) 48* ***UNFV 94***

Resolución:

En un momento determinado medirán "$x + 12$" y "x" *cm* : $x + 12 = 4x \Rightarrow x = 4$

Estos 4 *cm* se consumen en 1/2 *hora*.

Si el más grande dura 4 *horas*, entonces mide : $4 \,.\, 8 = 32$ *cm* RPTA. C

22.- Un salón está iluminado por 48 focos y otro salón está a oscuras. Si en el primer salón se apagan 4 focos y en el segundo se encienden 2, y esta operación se repite hasta que ambos salones queden con igual número de focos encendidos, entonces el número total de focos encendidos es:

A) 30 *B) 34* *C) 36* *D) 32* *E) 28* ***UNMSM 93***

Resolución:

1^er^ salón : $\overbrace{48 - 4 - 4 - \ldots\ldots}^{x \text{ veces}} = 48 - 4x$ focos encendidos

2^do^ salón : $\overbrace{0 + 2 + 2 + \ldots\ldots}^{x \text{ veces}} = 0 + 2x$ focos encendidos

Igualando los segundos miembros : $48 - 4x = 2x \Rightarrow x = 8$

En cada salón habrá 16 focos encendidos. **RPTA. D**

23.- Los ahorros de un niño constaban de (p + 1) ; (3p - 5) y (p + 3) monedas de 5, 10 y 20 centimos de nuevo sol respectivamente. ¿A cuánto ascienden sus ahorros, si al cambiarlos en monedas de 25 centimos el número de monedas obtenidas es el doble del número de monedas de 5 centimos?

A) 900 *B) 455* *C) 345* *D) 400* *E) 360*

Resolución:

Monto ahorrado : $5(p + 1) + 10\,(3p - 5) + 20\,(p + 3)$

Esto equivale a: $25\,.2\,(p + 1)$

Igualando : $55p + 15 = 50p + 50 \Rightarrow p = 7$

El monto ahorrado es: $50p + 50 =$ **400** **RPTA. D**

24.- Cuatro hermanos tienen 45 soles. Si el dinero del primero es aumentado en 2 soles, el segundo reducido en 2 soles, se duplica el del tercero y el cuarto se reduce a la mitad, todos los hermanos tendrán la misma cantidad de soles. ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

A) 4; 10; 5 y 26 *B) 7; 12; 6 y 20* *C) 6; 14; 7 y 18*

D) 8; 10; 4 y 20 *E) 8; 12; 5 y 20*

Resolución:

Sean x, y, z, w ; lo que tienen los hermanos . Luego se tendrá : $x + y + z + w = 45$

Además se sabe que : $\left.\begin{array}{r} x + 2 = a \\ y - 2 = a \\ 2z = a \\ w \div 2 = a \end{array}\right\} \Rightarrow (a - 2) + (a + 2) + \frac{a}{2} + 2a = 45$

Resolviendo : $a = 10$

Luego se obtiene que : $x = 8 \;;\; y = 12 \;;\; z = 5 \;;\; w = 20$ **RPTA. E**

25.- Juan y Samuel salieron de cacería y trajeron patos y conejos. Juan mató el doble de patos de lo que mató en conejos. Samuel mató tantos conejos como Juan. Ambos trajeron 21 cabezas y 54 patas. ¿Cuántos conejos mató cada uno?

A) 3 y 9 *B) 4 y 8* *C) 6 y 6* *D) 9 y 4* *E) 11 y 1*

Resolución:

	CONEJOS	PATOS
Juan	x	$2x$
Samuel	x	y

$x + 2x + x + y = 21$ cabezas

$4x + 2\,(2x) + 4x + 2y = 54$ patas

Resolviendo : $x = 3$; $y = 9$ RPTA. A

26.- Si al cuadrado de la cantidad que tengo, le disminuyo el doble de la misma, me quedaría S/. 120 ¿Cuánto tengo?

A) 10 *B) 11* *C) 12* *D) 13* *E) 14*

Resolución:

Sea x la cantidad de dinero que tengo, entonces, según los datos :

Si al cuadrado de lo que tengo : x^2

Le disminuyo el doble de lo mismo : $x^2 - 2x$

Me quedaría S/. 120 : $x^2 - 2x = 120$

Transponiendo : $x^2 - 2x - 120 = 0$

Factorizando, se tiene : $(x + 10)\,(x - 12) = 0$

Obtenemos 2 soluciones : $x_1 = -10$; $x_2 = 12$

Elegimos la solución positiva : $x = 12$ RPTA. C

27.- Alberto tiene 2 veces más de lo que tiene Juan; si Alberto le da S/. 15 a Juan entonces tendrían la misma cantidad, ¿Cuánto tienen entre los dos?

A) S/. 70 *B) S/. 90* *C) S/. 50* *D) S/. 100* *E) N.A.*

Resolución:

Alberto tiene $2x$ y Juan tiene x .

Según el enunciado : Alberto Juan

Si Alberto le da S/. 15 a Juan : $2x - 15$; $x + 15$

Entonces tendrían lo mismo : $2x - 15 = x + 15$

Resolviendo : $x = 30$

Entre los dos tienen : $3x =$ S/. 90 RPTA. B

28.- Entre cuatro personas tienen S/. 45; si lo que tiene el 1ro se aumenta en S/. 2; lo del 2do se reduce en S/. 2; se duplica lo del 3ro y se reduce a la mitad a lo del 4to, resultan las 4 personas con la misma cantidad de soles. ¿Quién tenía menos dinero?

A) 2 *B) 4* *C) 6* *D) 5* *E) 10*

Resolución:

Sean A, B, C y D las cuatro cantidades, entonces por condición del problema se tiene :

$A + B + C + D = 45$ .... (α)

$A + 2 = B - 2 = C . 2 = D \div 2 = x$

Ahora a cada cantidad la expresaremos en función de x y reemplazando en (α), tendríamos :

$(x - 2) + (x + 2) + \left(\frac{x}{2}\right) + 2x = 45$

De donde $x = 10$ y enseguida se obtiene :

$A = 8$; $B = 12$; $C = 5$; $D = 20$ RPTA. D

29.- En una práctica de 30 preguntas, cada respuesta correcta vale 4 puntos, la incorrecta - 1 y en blanco 0 puntos. Un estudiante obtuvo 82 puntos y observó que por cada respuesta en blanco tenía tres respuestas correctas. ¿Cuántas incorrectas respondió?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución:

Puntaje de cada uno : 0 en blanco
4 correcta
-1 incorrecta

Número de respuestas en blanco : x

Número de respuestas correctas : $3x$

Número de respuestas incorrectas : $30 - 4x$

Si en total obtuvo 82 puntos , éste se obtendrá sumando los puntajes parciales :

$0 . x + 4.3x + (-1).(30 - 4x) = 82$

$12x - 30 + 4x = 82 \Rightarrow x = 7$

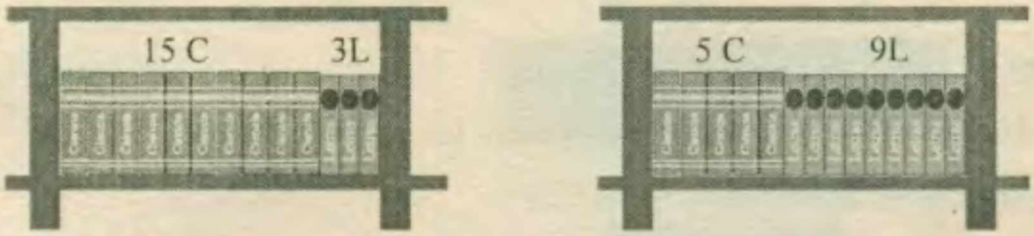
Las incorrectas son : $30 - 4x =$ 2 RPTA. B

30.- En un estante se pueden colocar 15 libros de ciencias y 3 libros de letras ó 9 libros de letras y 5 libros de ciencias. ¿Cuántos libros de ciencias únicamente entran en el estante?

A) 30 *B) 25* *C) 20* *D) 22* *E) N.A.*

Resolución:

Designamos por C al espesor de un libro de ciencias y por L al espesor de uno de letras, entonces, de acuerdo con el esquema :



Entonces : $15\,C + 3\,L = 5\,C + 9\,L$

Esto implica : $5\,C = 3\,L$

Luego, si en el primer esquema cambiamos 3 L por 5 C, todos los libros serían de ciencias y tendríamos en el estante :

$15\,C + 5\,C =$ **20 C** RPTA. C

31.- Una piscina se ha estado desaguando durante 3 días, hasta que solamente ha quedado 10 galones de agua. En cada día se extraía sus 2/3 partes, más 3 galones ¿Cuál es el volumen total desalojado hasta el momento?

A) 377 *B) 373* *C) 375* *D) 371* *E) N.A.*

Resolución:

Sea x la cantidad inicial :

En cada día se extraía sus 2/3 partes, más 3 galones, luego lo que quedaba en la piscina era :

$$x - \left(\frac{2}{3}x + 3\right)$$

Efectuando ,diremos que al final del 1er día queda : $\frac{1}{3}x - 3$

Si este proceso se repite 3 días más, tendremos 10 galones al final; entonces planteamos :

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x - 3\right) - 3\right] - 3 = 10$$

Resolviendo obtenemos : $x = 387$

Y el volumen desalojado es : $387 - 10 =$ 377 RPTA. A

32.- Un estudiante gasta S/. 5 en pasajes, cuando va a una conferencia; si en "a" días ha gastado "k" soles. ¿Cuántos días no asistió a la conferencia durante los "a" días?

A) $\frac{3a-k}{3}$ *B)* $\frac{5a-k}{5}$ *C)* $\frac{4a-k}{4}$ *D)* $\frac{2a-k}{2}$ *E) N.A.*

Resolución:

Sean x los días de inasistencia, luego $a - x$ serán los de asistencia.

Los gastos en pasajes deben ser : $(a - x).5$

Que equivalen a "k" soles, luego : $5a - 5x = k$

Despejando x : $x = \frac{5a-k}{5}$ RPTA. B

33.- Yo tengo el triple de la mitad de lo que tú tienes, más 10 soles; si tú tuvieras el doble de lo que tienes, tendrías 5 soles más de lo que tengo. ¿Cuánto me quedaría si comprara un artículo que cuesta la cuarta parte de lo que no gastaría?

A) 41 *B) 42* *C) 43* *D) 44* *E) N.A.*

Resolución:

Recopilamos la información en el cuadro adjunto y luego planteamos :

	Tengo	Tuviera
Yo	$\frac{3x}{2} + 10$	....
Tú	x	$2x$
	Tienes	Tuvieras

$$2x = \left(\frac{3x}{2} + 10\right) + 5$$

De donde : $x = 30$; lo que yo tengo es : 55

Al gastar en un artículo que cuesta n, me quedaría $(55 - n)$ y según las condiciones :

$$n = \frac{55-n}{4} \text{ , de donde : } n = 11$$

Entonces, de hacer tal gasto, me quedaría : 44 *soles* RPTA. D

34.- Veintidos estudiantes de un colegio, entre alumnos del 3ro y 4to reciben un conjunto de revistas de matemáticas; los alumnos del 3ro reciben 60 revistas, lo mismo que los alumnos del 4to. ¿Cuántos alumnos hay de 3ro y cuántos de 4to si cada uno de éstos recibe una revista menos que un alumno de 3ro?

A) 11 ; 13 *B) 14 ; 11* *C) 10 ; 12* *D) 13 ; 15* *E) N.A.*

Resolución:

Número de alumnos de 3^{ro} : x ; número de alumnos de 4^{to} : $22 - x$

Cada alumno de 3^{ro} recibió : $\frac{60}{x}$, y cada alumno de 4^{to} : $\frac{60}{22-x}$

Por condición del problema se tiene : $\frac{60}{x} - \frac{60}{22-x} = 1$

Que al resolverse nos da : $x = 10$

$\therefore$ 10 son de 3ro y 12 de 4to. **RPTA. C**

35.- Un litro de leche pura pesa "x" kg, si 10 litros de una mezcla de leche con agua pesa "y"kg ¿Cuántos litros de agua hay en dicha mezcla?

A) $\frac{10x-y}{x-1}$ *B)* $\frac{11x-y}{x-1}$ *C)* $\frac{10x-y}{x-2}$ *D)* $\frac{11x-y}{x-2}$ *E) N.A.*

Resolución:

Sean n los *litros* de agua y $10 - n$ los de leche pura.

Además se debe saber que 1 *litro* de agua pesa 1*kg*.

Los *litros* de agua pesan : $n \cdot 1$ *kg*

Los *litros* de leche pura : $(10 - n) \cdot x$ *kg*

Entonces : $n + (10 - n)x = y$

De donde : $n = \frac{10x-y}{x-1}$ **RPTA. A**

36.- Se quiere colocar cierto número de fichas de modo que formen un cuadrado completo. En la primera disposición sobran 8 fichas; formando el cuadrado con una ficha más por lado faltan 23. ¿Cuántas son las fichas?

A) 230 *B) 232* *C) 233* *D) 235* *E) 2 36*

Resolución:

Sean "n" las fichas. De los datos : $n - 8 = x^2$ ....(1)

$n + 23 = (x+1)^2$ ....(2)

Resolviendo (1) y (2), tendremos : $x^2 + 8 = x^2 + 2x - 22 \Rightarrow x = 15$

Luego el número de fichas : $n = 15^2 + 8 = 233$ **RPTA. C**

37.- En un mal reparto de S/. 864 entre 24 personas, algunos de ellos reciben la misma suma mientras que el resto se queda sin recibir nada. Entonces Mireya dona su parte a los que no fueron beneficiados tocándole a cada uno de éstos S/. 6 ¿A cuántos no se les dió nada inicialmente?

A) 10 *B) 12* *C) 14* *D) 16* *E) N.A.*

Resolución:

De las 24 personas : $\begin{cases} x & \text{si recibieron} \\ 24 - x & \text{no recibieron} \end{cases}$

Cada uno de los beneficiados recibió : $\frac{564}{x}$

$\therefore \quad \frac{864}{x} = (24 - x) \,.\, 6$

Resolviendo : $x = 12$

Asi $(24 - x)$ no recibieron, es decir : **12** RPTA. B

38.- Si un ladrillo pesa "x" kg; dos ladrillos pesan juntos "2y - 1" kg y tres ladrillos pesan juntos "x + y" kg. ¿Cuánto pesan cuatro ladrillos juntos? Los ladrillos son del mismo peso.

A) 3 kg. *B) 6 kg.* *C) 8 kg.* *D) 5 kg.* *E) 2 kg.*

Resolución:

Si dos ladrillos pesan $2y - 1$, entonces : $2x = 2y - 1$

Si tres ladrillos pesan $x + y$, entonces : $3x = x + y$

Resolviendo : $x = \frac{1}{2}$; $y = 1$

$\therefore$ 4 ladrillos pesan : $4x = 2(2y - 1)$

$4x = 2(2[1] - 1) =$ **2 *kg*.** RPTA. E

39.- Luego de realizar ciertas compras, Daniel razonaba : "Si gastara la mitad de lo que no gasté, de esta manera no habría gastado S 800 menos de lo que realmente no gasté. ¿Cuánto tenía en total, si al principio gastó 600?

A) S/. 4 000 *B) S/. 3 000* *C) S/. 3 400* *D) S/. 2 000* *E) N.A.*

Resolución:

Realmente gastó S 800 , y , no gastó x.

Por datos : si gastara $\frac{x}{2}$; no hubiera gastado : $x - 800$

Entonces : $600 + x = \frac{x}{2} + x - 800$

$x = 2\,800$

Si realmente gastó 600 y no gastó 2 800, tenía : **S/. 3 400** RPTA. C

40.- En una fiesta hay 8 mujeres sentadas y tantas parejas bailando como hombres sentados. Luego se observa que todas las mujeres se encuentran bailando y 8 hombres se encuentran sentados. ¿Cuántas personas hay en la fiesta?

A) 55 *B) 56* *C) 57* *D) 58* *E) 59*

Resolución.-

Tenemos dos situaciones :

1ro) Número de mujeres sentadas = 8
Número de hombres sentados = x
Número de parejas bailando = x
} En total = $8 + x + 2x$

De aquí se deduce que el número de mujeres es $8 + x$

2do) Número de parejas bailando = $8 + x$
Número de hombres sentados = 8
} En total = $2(8 + x) + 8$

Igualando los totales : $8 + 3x = 2(8 + x) + 8$

Y resolviendo : $x = 16$

Número de personas : $8 + 3x =$ **56** **RPTA. B**

41.- En una reunión el número de hombres es el triple del número de mujeres. Se retiran 8 parejas y el número de hombres que aún quedan es 5 veces el de mujeres que quedan ¿Cuántas personas asistieron a la reunión?

A) 64 *B) 80* *C) 72* *D) 48* *E) 90*

Resolución.-

Inicialmente : número de hombres = $3x$; número de mujeres = x

Cuando se retiran 8 parejas, quedan :

de hombres : $3x - 8$; # de mujeres : $x - 8$

Por dato : $3x - 8 = 5\ (x - 8)$

$3x - 8 = 5x - 40$

Resolviendo : $x = 16$

$\therefore$ Asistieron : $3x + x = 4x =$ **64 personas** **RPTA. A**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- "Un número x, disminuído en a veces b", se expresa por :

A) $x - ab$ B) $(x - a)b$ C) $(x - b)a$

D) $x - (a + b)$ E) Ninguna anterior.

2.- Si x es un número entero ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?

A) $(x^2 + 1)$ es el entero que sigue al cuadrado de x.

B) $(x - 1)$ es el entero anterior a x.

C) $(x - 1)^2$ es el cuadrado del entero anterior a x.

D) $(x + 1)^2$ es el cuadrado del entero que sigue a x.

E) $(x - 1)^2$ es el entero anterior al cuadrado de x.

3.- En una clase con x estudiantes hay 8 niñas más que niños. ¿Cuántos niños hay en cada clase?

A) $\frac{x}{2} - 8$ B) $\frac{x}{2} - 2$ C) $\frac{x-8}{2}$

D) $x - 8$ E) $\frac{x+8}{2}$

4.- Se ha repartido una suma de dinero entre tres personas: La segunda recibió "y" *soles* más que la primera, la tercera "z" *soles* más que la segunda. Siendo x la parte de la primera, entonces la suma repartida es:

A) $x + 2y + 3z$ D) $3x + 2y + z$

B) $x + 3y + 2z$ E) $3x + 2y + 2z$

C) $3x + 2y + 3z$

5.- La cabeza de un pescado mide 20 *cm*. La cola mide tanto como la cabeza más medio cuerpo, y el cuerpo tanto como la cabeza y la cola juntas. ¿Cuál es la longitud del pescado?

A) 140 *cm* B) 160 *cm* C) 180 *cm*

D) 200 *cm* E) N.A

6.- Carlos tiene $5q + 1$ monedas de 25 *centavos*; Ricardo tiene $q + 5$ monedas de las mismas; la diferencia de dinero que tienen en monedas de 10 *centavos* es:

A) $10(q - 1)$ B) $\frac{2}{5}(4q - 4)$ C) $\frac{2}{5}(q - 1)$

D) $\frac{5}{2}(q - 1)$ E) Ninguna

7.- En un lote de 154 abrigos hay 3 abrigos blancos menos que abrigos de color rojo pero 5 abrigos blancos más que verdes. Si todos los abrigos son rojos, blancos o verdes. ¿Cuántos abrigos rojos hay?

A) 55 B) 45 C) 65 D) 35 E) N.A.

8.- En el aula los alumnos están agrupados en un número de bancas de 6 alumnos cada una. Si se les coloca en banca de 4 alumnos se necesitarán 3 bancas más. ¿Cuántos alumnos hay?

A) 48 B) 36 C) 60 D) 72 E) 24

9.- En un hotel de 3 pisos hay 112 personas en el primer y el segundo piso, 116 en el segundo y el tercer piso y 118 personas en el primer y tercer piso. ¿Cuántas personas hay en el primer piso?

A) 55 B) 54 C) 53 D) 57 E) 56

10.- En un corral hay conejos y gallinas, el número de patas, aumentado en 8 es el cuádruplo del número de cabezas. ¿Cuántas gallinas hay?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

11.- Una persona tiene 4 000 *soles* y otra 1 500 *soles*. Cada una ahorra 200 *soles* mensuales. ¿Dentro de cuántos meses, la cantidad que habrá acumulado la primera será el doble de la segunda?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 8

NIVEL B

12.- "Yo tengo tantas hermanas como hermanos, pero mi hermana tiene la mitad de hermanas que hermanos. ¿Cuántos somos?

A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) N.A.

13.- Una planta crece a razón de 2,5 *cm* por año durante los 7 primeros años y en adelante 4 *cm* por año. La fórmula que explica la altura de la planta para x años $(x > 7)$ es:

A) $h = 2{,}5x + x$ D) $h = 2{,}5(x - 7) + 4x$

B) $h = 2{,}5(7) + 4(x - 7)$ E) Ninguna.

C) $h = 7(2{,}5) + 4x$

14.- Un granjero compró 5 caballos y 3 burros. Si hubiera comprado un caballo menos y un burro más habría gastado 5 000 menos. ¿En cuánto difieren el precio de un caballo y el de un burro?

A) 5 000 B) 10 000 C) 2 500

D) 15 000 E) Ninguna

15.- La suma de tres números es 6; si el doble del primero más el segundo es igual al triple del tercero aumentado en 5, si además sabemos que el triple del primero menos el tercero es igual al segundo aumentado en 6, entonces el doble del primero más el triple del segundo es :

A) 13 B) 12 C) 5 D) 7 E) 11

16.- Se debía repartir 1 800 *soles* entre cierto número de personas, cuatro de ellas renuncian a su parte, por consiguiente a cada una de las restantes les tocó 15 *soles* más. ¿Cuántas personas eran originalmente?

A) 30 B) 24 C) 20 D) 18 E) 36

17.- En un rebaño el número de ovejas más bueyes es 30, el de bueyes más vacas es 50, el de vacas más cabras es 70 y el de vacas más ovejas es 40. Podemos afirmar que el número de bueyes más cabras es:

A) 55 B) 60 C) 65 D) 50 E) 45

18.- Un pollero tiene 12 pollos y 5 pavos. Permuta con otro, 3 de sus pollos por un pavo, luego vende en el mercado todas las aves por 135 *soles*. ¿Cuántos costaban los pollos?

A) 6 B) 5 C) 12 D) 15 E) N.A.

19.- Un anciano deja una herencia de $2mn$ *soles* a un cierto número de parientes. Sin embargo "m" de estos renuncian a su parte y entonces, cada uno de los restantes se beneficia en "n" *soles* más. ¿Cuántos son los parientes?

A) n B) m C) $2n$ D) $2m$ E) $m + n$

20.- Después de un ciclo escolar, los estudiantes intercambiaron fotografías. ¿Cuántos estudiantes había si se sabe que se intercambiaron un total de 600 fotografías?

A) 15 B) 24 C) 60 D) 25 E) 30

21.- Dos vehículos con idénticos depósitos de gasolina los consumen uniformemente en 4 y 5 *horas* respectivamente. ¿Después de cuanto tiempo el depósito de un vehículo tendrá el doble del otro?

A) $4\frac{1}{2}$ *horas* B) $3\frac{1}{3}$ *horas* C) $3\frac{1}{2}$ *horas*

D) $4\frac{1}{3}$ *horas* E) $2\frac{1}{2}$ *horas*

22.- Un ladrillo pesa 10 *kg* más medio ladrillo. ¿Cuánto pesa ladrillo y medio?

A) 15 *kg* B) 10 *kg* C) 30 *kg*

D) 45 *kg* E) 60 *kg*

23.- En una fiesta un grupo de hombres y mujeres deciden bailar de la siguiente manera : Un hombre baila con 6 mujeres, otro con 7 mujeres, otro con 8 y así consecutivamente hasta que el último que baila con todas las mujeres. Si H representa al número de hombres y M el de mujeres, entonces :

A) H = M - 4 D) H = M/5

B) H = M - 5 E) H = M/4

C) H = M - 6

24.- El lunes gasté la mitad de lo que tenía y 2 *soles* más, el martes la mitad de lo que me quedaba más 2 *soles* el miércoles la mitad de lo que me quedaba y 2 *soles* más y me quedé sin nada. ¿Cuánto tenía el lunes antes de hacer gasto alguno?

A) 22 B) 24 C) 26 D) 28 E) 30

25.- El agua contenida en un pozo se agota en 5 *horas*, en cada hora baja el nivel del agua en un *metro* por debajo de su mitad. Hallar la altura inicial del pozo .

A) 6*m* B) 14*m* C) 30*m* D) 62*m* E) 126*m*

26.- Dos mulas se cargan, igualmente, con canastas de duraznos del mismo peso. Una de las mulas se fatiga con la carga y se le aligera del peso, quitándole una canasta, que se carga en la otra mula, resultando entonces ésta con doble carga que la otra. ¿Cuántas canastas transportan las dos mulas?

A) 8 B) 4 C) 6 D) 10 E) 12

NIVEL C

27.- Un padre reparte entre sus hijos una suma de dinero de la siguiente manera : Al 1^{ro} le da 1 000 *soles* y la décima parte del resto, al 2^{do} 2 000 *soles* y la décima parte del resto, al 3^{ro} 3 000 *soles* y la décima parte del resto y así sucesivamente. Al final se da cuenta que cada uno de ellos ha recibido la misma cantidad, que es igual a:

A) 8 100 *soles* D) 100 000 *soles*

B) 10 000 *soles* E) No se puede determinar

C) 9 000 *soles*

28.- Un asunto fue sometido a votación de 600 personas y se perdió; habiendo votado de nuevo las mismas personas sobre el mismo asunto, fue ganado el caso por el doble de votos por el que se había perdido la primera vez y la nueva mayoría fue con respecto a la anterior como 8 es a 7. ¿Cuántas personas cambiaron de opinión?

A) 100 B) 110 C) 120 D) 140 E) 150

29.- Dos obreros reciben uno 160 *soles* y el otro 90 *soles*. El primero ha trabajado 5 días más que el segundo. Si cada uno hubiera trabajado el número de días que ha trabajado el otro, hubieran recibido la misma suma. ¿Cuánto vale esta suma?

A) 80 B) 125 C) 120 D) 240 E) 250

30.- Un padre de familia gastó "y" *soles* en comprar "x" tarjetas de navidad para mandarlas a sus familiares y amigos. Si escogió tarjetas de "x" *soles* para cada uno de sus familiares y de "z" *soles* para sus amigos. ¿A cuántos familiares envió tarjetas?

A) $\frac{y+zx}{z-y}$ B) $\frac{y-zx}{z-y}$ C) $\frac{z-yx}{z-y}$

D) $\frac{z-x}{xy}$ E) N.A

31.- Se tiene 48 fósforos repartidos en 3 grupos diferentes. Si del primer grupo paso al segundo tantos como hay en el segundo, luego del segundo paso al tercero tantos como hay en el tercero y por último si del tercero paso al primero tantos como hay ahora en el primero resulta que habrá el mismo número de fósforos en cada grupo. ¿Cuántos fósforos había al principio en el primer grupo.

A) 26 B) 22 C) 14 D) 16 E) 8

32.- Un profesor adquirió 330 tizas por S/. 808, comprando algunas en S/. 29 la docena y otra en S/. 37 la quincena. ¿Cuántas tizas más compró de una clase que de la otra?

A) 85 B) 90 C) 95 D) 100 E) 105

33.- A 10 parejas de jóvenes le van a entregar 2 canarios por pareja. En el momento de la entrega se escapan algunos canarios y luego se ordenan traer tantos, como la mitad de los que quedan; más dos canarios, para hacer efectiva la entrega. ¿Cuántos canarios se escaparon?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

34.- Un edificio tiene 4 pisos; el número de habitaciones de cada piso son números consecutivos crecientes y cada habitación del edificio tiene tantas ventanas como habitaciones hay en el respectivo piso. Si el número de ventanas del último piso y el número de habitaciones del primer piso suman 69. ¿Cuántas habitaciones hay en el último piso?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

35.- Cuatro amigos tienen S/. 100 en conjunto; si al primero se le aumenta S/. 8 ; al segundo se le quita S/. 8 . al 3ro se le triplica lo que tiene y al cuarto se le quita 5/6 de lo que tiene. entonces todos tendrían la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto tiene el segundo?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

36.- Tú tienes la mitad de lo que tenías. y tendrás el triple de lo que tienes; si tuvieras lo que tienes, tenías y tendrás, tendrías lo que yo tengo que es nueve *soles* más de lo que tu tendrás. ¿Cuánto más tengo que tú?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

37.- Con los alumnos de un salón se formaron cuadrados compactos, colocando en cada lado de los cuadrados alumnos en la relación de 1 y 2. Si en el salón hubieran 20 alumnos más se formaría un sólo cuadrado compacto. Hallar la cantidad de alumnos del salón si es la menor posible.

A) 4 B) 80 C) 50 D) 72 E) 61

38.- Un comerciante vende vino en vasos pequeños y grandes de la siguiente manera: Un vaso grande lleno vale 6 vasos pequeños vacíos, 2 vasos grandes vacíos valen un vaso pequeño lleno y 3 vasos pequeños vacíos valen un vaso pequeño lleno. ¿Cuántos vasos pequeños vacíos puede el comerciante cambiar por la cantidad de vino contenido en 2 vasos grandes.

A) 3 B) 4 C) 7 D) 9 E) 12

39.- Se reparte cierta cantidad de dinero entre cierto número de personas. La primera recibe $ 100 y 1/12 del resto, la segunda $ 200 y 1/12 del resto, y así sucesivamente; de esta manera, todas ellas han recibido la misma cantidad íntegra. Hallar el número de personas.

A) 12 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

40.- Los capitales de dos individuos son "x" e "y" soles; el primero ahorra diariamente "a" soles, y el segundo "b" soles. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que el capital del primero sea "n" veces el del segundo?

A) $\frac{ny-x}{a-nb}$ B) $\frac{ny+x}{a+nb}$ C) $\frac{nx+y}{a+nb}$

D) $\frac{nx+y}{na+b}$ E) $\frac{n(y+x)}{na+b}$

41.- Una persona toma un trabajo en el que le pagan S/. 50 por cada día trabajado, mientras que por cada día que no trabaja le descuentan S/. 25; si al cabo de 30 días recibió S/. 1 050. ¿Cuántos días trabajó?

A) 15 B) 20 C) 24 D) 28 E) N.A.

PLANTEO DE PROBLEMAS

Los problemas son cuestiones donde nos dan unas cantidades conocidas, llamadas datos, y por medio de estos datos encontrar, mediante cálculos apropiados, otras cantidades desconocidas llamadas incógnitas.Los problemas pueden ser: numéricos, gráficos y/o mixtos.

Ejemplo de los primeros :

«Dos números son proporcionales a $\frac{4}{5}$; y dichos números suman 72. Hallarlos»

Ejemplo de los segundos :

«Trazar una tangente a una circunferencias por uno de sus puntos.»

Ejemplo de problema mixto :

«Un trapecio rectángulo tiene por bases 9 *cm* y 6 *cm*, y su lado oblicuo mide 5 *cm*. Hallar su área.»

Para la resolución de los problemas conviene seguir las siguientes indicaciones generales:

Primero, elección de la incógnita.

Segundo, planteo del problema (traducción del problema en ecuación);

Tercero, resolver la ecuación obtenida; y

Cuarto, discusión del resultado (ver si el resultado satisface a las condiciones supuestas por el problema).

De las indicaciones anteriores, la más difícil de conseguir es la segunda (planteo del problema).

Es conveniente cambiar de letra para la incógnita; no siempre debe ser x. Puede ser p (si buscamos un precio); v, si queremos hallar una velocidad; n, si buscamos un número;... etc. Y así el alumno se acostumbrará a ver en las relaciones físicas, químicas, económicas, y en las mismas fórmulas matemáticas (áreas, longitudes, volúmenes, intereses, descuentos, etc.), lo que son simplemente ecuaciones.

Habrá que advertir que en muchos problemas (intereses, mezclas, aleaciones, descuentos, repartos proporcionales, etc.) sería conveniente que el alumno los hiciese aritméticamente, ya que *«cuando descubren la rutinaria comodidad del mecanismo algebraico se entregan a él con entusiasmo, algunas veces contraproducente, y que conviene, por tanto, templar»*

(R. Pastor - Puig Adam)

Muchos problemas, que se plantean por un sistema de ecuaciones, podrían hacerse por ecuaciones de primer grado. Los sistemas tienen la facilidad de utilizar dos o tres incógnitas : son más sencillos de plantear. Por ello sería conveniente resolver problemas con el mínimo uso de incógnitas. Veamos el siguiente ejemplo :

- El número formado por las cifras d (decenas) y u (unidades) es igual a $10d + u$. No podemos poner du, porque es el producto de esas cifras. Por ejemplo, el número formado por las cifras 4 y 5 es $45 = 40 + 5 = 10 \cdot 4 + 5$. Luego si x es la primera cifra (decenas) e y la segunda cifra (unidades), el número se podrá poner así : $10x + y$.

12 Problemas sobre Números

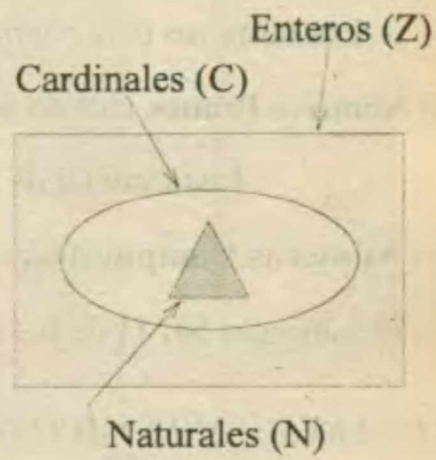
¿Qué es un número entero? ¿Qué es el número cardinal?. EL cero (0) ¿es positivo o negativo? ¿es par o impar?. Conocer las respuestas a estas preguntas básicas es el requisito previo que debemos satisfacer para resolver problemas sobre números.

I) NUMEROS PARA CONTAR

Los números 1; 2; 3; ...... se denominan números naturales o números de conteo. Los números 0; 1; 2; 3; ..... incluyendo al cero y los naturales son los números cardinales que no incluyen fracciones o números negativos.

II) NUMEROS ENTEROS

Se componen de los enteros positivos 1; 2; 3; ...... (números de conteo), enteros negativos; -1; -2; -3; .... y el número cero (0).El diagrama adjunto muestra como se relacionan los números enteros (Z) los números cardinales (C) y los enteros positivos o naturales (N).



El conjunto de los números pares y el de los números impares son dos subconjuntos especiales del conjunto de enteros:

Enteros : Z = {... -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4 ...}

Pares : P = {... -4; -2; 0; 2; 4; 6; ....}

Impares : I = {... -3; -1; 1; 3; 5; ...}

Cardinales : C = {0; 1; 2; 3; 4; ...}

III) OPERACIONES CON ENTEROS

A continuación te presento algunas reglas relativas a los signos cuando se multiplican enteros:

pos × pos = pos

neg × neg = pos

pos × neg = neg

Cuando se suman o multiplican PARES (P) e IMPARES (I):, los resultados finales pueden ser previstos por el siguiente cuadro:

P + P = P	P × P = P
I + I = P	I × I = I
P + I = I	P × I = P

IV) FACTORES

De la expresión ***a.b = c*** ; se puede establecer las siguientes observaciones:

- *a* y *b* son factores de *c*.
- *c* es múltiplo de *a*.
- *c* es un múltiplo de *b*.

Por ejemplo en 2 × 7 , 2 y 7 son factores de 14, 14 es múltiplo de 2, 14 es un múltiplo de 7 y el conjunto de todos los factores de 14 es {1; 2; 7; 14}.

V) NUMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Los números para *contar* (Cardinales) se pueden dividir en tres conjuntos disjuntos:

a) **Números Primos**, cuando tienen unicamente dos factores: La unidad (1) y el mismo número:

Lista inicial de Números primos : {2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; ...}

b) **Números Compuestos,** cuando tienen más de dos factores.

c) El conjunto **{0; 1}** de los cuales *ninguno* es primo ni compuesto.

OBSERVACIONES IMPORTANTES

1)El cero (0) no es primo.

2) El uno (1) tampoco es primo.

3) El uno (1) tiene únicamente un factor.

4) El dos (2) es el único número par que es primo.

5) Cualquier número es un factor de cero.

6) La división por cero no está definida, por tanto no se puede dividir por cero.

VI) DIGITOS

En el sistema decimal hay 10 dígitos : 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. En dicho sistema todos los enteros se escriben con estos dígitos.

El entero 957 tiene 3 dígitos ó cifras, los cuales son 9; 5 y 7. Cada dígito tiene un valor posicional, esto es, el valor que representa depende de la posición que ocupa dentro del número:

957

- 7 — **unidades**
- 5 — **decenas**
- 9 — **centenas**

7 es el dígito de las unidades .... 7×1

5 es el dígito de las decenas .... 5×10

9 es dígito de las centenas .... 9×100

$$957 = 9 \times 100 + 5 \times 10 + 7$$

VII) DIVISIBILIDAD

Un número es divisible por otro si al dividir el primero por el segundo, se obtiene cero de residuo. En el cuadro se presentan las reglas más esenciales.

UN NUMERO ES DIVISIBLE POR	SI
2	el dígito de sus unidades es par.
3	la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.
4	el número formado por sus dos últimos dígitos es divisible por 4.
5	termina en 0 ó en 5.
6	es divisible por 2 y 3 a la vez.
8	el número formado por sus tres últimos dígitos es divisible por 8.
9	la suma de sus dígitos es divisible por 9.

PROBLEMAS RESUELTOS

I) NUMEROS Y OPERACIONES

1.- Si en el producto 48 x 35 se añaden 8 unidades al primer factor; para que el producto no varíe, al otro factor hay que:

A) restarle 5 *B) sumarle 8* *C) restarle 8*

D) dividirlo entre 8 *E) sumarle 5*

Resolución:

Al segundo factor hay que disminuirlo para compensar el aumento del primer factor. Sea x la disminución, luego :

$$48 \times 35 = (48 + 8)(35 - x)$$

$$6 \times 8 \times 7 = 56(35 - x)$$

$$30 = 35 - x$$

$$x = 5$$ RPTA. A

2.- Un número entero al ser dividido por 5; 6 y 7 da por residuos los números 3; 4 y 0 respectivamente. Encuentre dicho número sabiendo que el doble de la suma de sus cocientes es igual al número dismunuído en 2.

A) -77 *B) -22* *C) 24* *D) 22* *E) 28* *UNMSM 94*

Resolución:

En los siguientes esquemas q_1, q_2 y q_3 son los cocientes:

$x \mid \underline{5}$	$x \mid \underline{6}$	$x \mid \underline{7}$
$3 \quad q_1$	$4 \quad q_2$	$0 \quad q_3$
$x = 5q_1 + 3$	$x = 6q_2 + 4$	$x = 7q_3$
$q_1 = \frac{x-3}{5}$	$q_2 = \frac{x-4}{6}$	$q_3 = \frac{x}{7}$

Además se sabe que el doble de la suma de los cocientes es igual al número dismunuído en 2.

$$2(q_1 + q_2 + q_3) = x - 2$$

$$2\left(\frac{x-3}{5} + \frac{x-4}{6} + \frac{x}{7}\right) = x - 2$$

Resolviendo la ecuación : $x = 28$ RPTA. E

3.- Dos números naturales son tales que si se les resta 6 y 3 respectivamente, su producto es igual a 2. ¿Cuál es la suma de dichos números?

A) 14 B) 20 C) 18 D) 12 E) 16 UNMSM 96

Resolución:

Suponiendo que a y b son los números cuya suma buscamos, debe cumplirse que:

$$(a - 6)(b - 3) = 2 = 2 \times 1 = 1 \times 2$$

Como los únicos factores de z son 2 y 1, podemos plantear:

$$a - 6 = 2 \quad ó \quad a - 6 = 1$$
$$b - 3 = 1 \quad ó \quad b - 3 = 2$$

La primera solución es: $a = 8 \quad \wedge \quad b = 4 \quad \Rightarrow \quad a + b = 12$

La segunda solución es: $a = 7 \quad \wedge \quad b = 5 \quad \Rightarrow \quad a + b = 12$

En cualquier caso, la suma de los números será : **12** **RPTA. D**

4.- El producto de dos números enteros es 588 y el cociente de ellos es 4, dando de residuo 1. ¿Cuánto es el menor?

A) 7 B) 21 C) 14 D) 12 E) 28 UNFV 91

Resolución:

Sean a y b los números :

$$a \times b = 588 \qquad \begin{array}{r|l} a & b \\ \hline 1 & 4 \end{array} \Rightarrow \quad a = 4b + 1$$

Reemplazando :

$$(4b + 1).b = 588$$
$$4b^2 + b - 588 = 0$$
$$(b - 12).(4b + 49) = 0$$
$$b = 12 \quad \Rightarrow \quad a = 4(12) + 1 = 49$$

RPTA. D

5.- Con dos números enteros y positivos fueron realizadas las cuatro operaciones siguientes:

1) Los sumaron ***3) Los multiplicaron***

2) Restaron el menor del mayor ***4) Dividieron el mayor por el menor.***

La suma de los resultados obtenidos fue 243. ¿Cuáles son los números?

A) 7 y 22 ó 3 y 62 B) 8 y 24 ó 2 y 54 C) 5 y 20 ó 7 y 45

D) 7 y 30 ó 3 y 50 E) 7 y 29 ó 9 y 25

<u>Resolución</u>:

Si el número mayor es x , y el menor es y :

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 243$$

Si se multiplica esta ecuación por y, efectuando operaciones se tiene :

$$x\,(2y + y^2 + 1) = 243y$$

$$x = \frac{243\,y}{(y+1)^2}$$

Para que el número x sea entero, es preciso que el denominador $(y + 1)^2$ sea uno de los divisores de 243 (y no tiene factores comunes con $y + 1$). Sabiendo que $243 = 3^5$, se deduce que 243 solo es divisible por los siguientes números que son cuadrados : 1, 3^2, 9^2.

Entonces $(y + 1)^2$ debe ser igual a 1, 3^2 ó 9^2. Como y debe ser positivo resulta que y es 8 ó 2.

Luego, x será: $\frac{243\times8}{81} = 24$ ó $\frac{243\times2}{9} = 54$.

Los números buscados serán : **24 y 8 ó 54 y 2** **RPTA. B**

II) NUMEROS CONSECUTIVOS

6.- Si al producto de tres números consecutivos se le agrega el que no es mayor ni el menor de dichos números, se obtiene 8 000. ¿Cuál es la suma de los números?

A) 80 *B) 100* *C) 60* *D) 90* *E) N.A*

<u>Resolución</u>:

Sea x el número mediano, el menor será $x - 1$ y el mayor $x + 1$.

De acuerdo al enunciado:

$$(x - 1)\,x\,(x + 1) + x = 8\,000$$

$$(x^2 - 1)x + x = 8\,000$$

$$x^3 = 20^3 \quad \Rightarrow \quad x = 20$$

Los números son: 19; 20 y 21. La suma es : 60 **RPTA. C**

7.- ¿Cuál es el número impar, tal que agregado a los cuatro impares que le siguen se obtiene 555?

A) 101 *B) 107* *C) 111* *D) 121* *E) 151*

Resolucion:

Sea I el impar buscado. Los cuatro impares que le siguen son:

$$I + 2 ; I + 4 ; I + 6 ; I + 8$$

$$I + (I + 2) + (I + 4) + (I + 6) + (I + 8) = 555$$

$$5I + 20 = 55$$

$$5I = 535 \Rightarrow I = 107$$ RPTA. B

8.- Si se añade a cada uno de dos números consecutivos la unidad, la suma de sus cuadrados crece en 76. La diferencia de sus cuadrados es:

A) 37   B) 36   C) 35   D) 38   E) 39   UNFV 95

Resolución:

Sean x y $x + 1$ los números consecutivos originales.

La suma de sus cuadrados será: $x^2 + (x + 1)^2$.

Cuando se añade la unidad a cada número, la nueva suma de sus cuadrados será:

$$(x + 1)^2 + (x + 2)^2$$

Entonces: $(x + 1) + (x + 2)^2 = x^2 + (x + 1)^2 + 76$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 76$$

$$x = 18$$

Los números son 18 y 19. La diferencia de sus cuadrados será:

$$19^2 - 18^2 = 37$$ RPTA. A

9.-A cierto número par se le suma los dos números pares que le preceden y los números impares que le siguen, obteniéndose en total 968 unidades. El producto de los dígitos del número par de referencia es:

A) 162   B) 63   C) 120   D)150   E) 36   UNMSM 92

Resolución:

Sea x el número par. Los dos que le preceden serán: $x - 2$; $x - 4$.

Los dos impares que le siguen: $x + 1$; $x + 3$.

La suma total es 968 :

$$(x - 4) + (x - 2) + x + (x + 1) + (x + 3) = 968$$

$$5x - 2 = 968$$

$$x = 194$$

El producto de los dígitos : $1 \times 9 \times 4 = 36$ RPTA. E

10.- Hallar el mayor de cinco números enteros consecutivos y positivos tales que en orden creciente, la suma de los cuadrados de los tres primeros sea igual a la suma de los cuadrados de los dos últimos.

A) 15 *B) 14* *C) 13* *D) 12* *E) 11*

Resolución:

Sea x el número central de los cinco, entonces:

$$(x-2)^2 + (x+1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2$$

$$x^2 = 12x$$

$$x = 12$$

Los números son : 10, 11, 12, 13 y **14.** **RPTA. B**

III) NUMEROS RELACIONADOS CON SUS DIGITOS

11.-Se tiene un número de dos dígitos cuya suma de éstos es 14, de tal manera que la diferencia entre el número que se forma al invertir el orden de los dígitos y el número original es 18. El producto de los dígitos del número es:

A) 48 *B) 45* *C) 49* *D) 42* *E) 36* *UNFV 95*

Resolución:

Sea $\overline{ab}$ el número, entonces :

$$a + b = 14 \ ... \ (1)$$

$$\overline{ba} - \overline{ab} = 18 \quad \Rightarrow \quad 10b + a - (10a + b) = 18$$

$$9b - 9a = 18$$

$$b - a = 2 \ ... \ (2)$$

De (1) y (2) :

$$a = 6 \ ; \ b = 8 \quad ; \quad a \times b = 48$$ **RPTA. A**

12.- Si un número entero de dos cifras es 6 veces la suma de sus cifras entonces el número que se obtiene al intercambiar las cifras es la suma de las cifras multiplicada por:

A) 5 *B) 4* *C) 8* *D) 3* *E) 7*

Resolución:

Sea $\overline{ab}$ el número ; $\overline{ba}$ será el número con las cifras intercambiadas:

$$\overline{ab} = 6(a+b) \ .... \ (1)$$

$$\overline{ba} = x.(a+b) \ .... \ (2)$$

Sumando (1) y (2) miembro a miembro:

$$10a + b + 10b + a = 6(a + b) + x \,.\, (a + b)$$

$$11(a + b) = 6(a + b) + x(a + b)$$

Eliminando $(a + b)$:

$$11 = 6 + x \quad \Rightarrow \quad x = 5$$ **RPTA. A**

13.- Hallar la suma de las cifras del número de dos cifras que excede en 27 a 10 veces la cifra de las unidades.

A) 17 B) 19 C) 15 D) 16 E) N.A PUCP 93 - I

Resolución:

Sea $\overline{ab}$ el número, donde b es la cifra de las unidades:

$$\overline{ab} = 10b + 27$$

$$10a + b = 10b + 27$$

$$10a = 9(b + 3)$$

$$a = \frac{9(b+3)}{10} \quad \ldots (\alpha)$$

En (α), como a debe ser entero, $b + 3$ debe ser su múltiplo de 10 por lo tanto $b = 7$, luego $a = 9$

$\therefore \quad a + b = 16$ **RPTA. D**

14.- Si a un número de 3 cifras se le intercambian las cifras de las unidades con la cifra de las decenas, aumenta en 45. Si se le intercambian la cifra de las decenas con la de centenas, disminuye en 27. Si se intercambian las unidades con la de centenas. ¿Cuál es la verdadera?

A) disminuye en 198 B) aumenta en 130 C) disminuye en 130

D) aumenta en 198 E) disminuye en 99 PUCP 94 - I

Resolución:

Sea $\overline{abc}$ el número, a, b, c las cifras de las centenas, decenas y unidades respectivamente:

1ª intercambio : Unidades y decenas

$$\overline{acb} - \overline{abc} = 45 \quad \Rightarrow \quad c - b = 5 \ldots\ldots\ldots (1)$$

2ª intercambio : Decenas y centenas.

$$\overline{abc} - \overline{bac} = 270 \quad \Rightarrow \quad a - b = 3 \ldots\ldots\ldots (2)$$

3ª intercambio : Unidades y centenas

$$\overline{cba} - \overline{abc} = x$$

Operando, $x = 99\,(c - a)$ .... (3)

Si restamos (1) y (2) se tiene $c - a = 2$, luego en (3):

$$x = 99 \times 2 = 198$$

Como x es positivo, $\overline{cba} > \overline{abc}$ esto quiere decir que en el tercer intercambio ocurre un aumento. **RPTA. D**

15.- Se tienen dos factores, uno de ellos posee dos cifras, si a este factor se le disminuye la suma de sus cifras, el producto total se reduce a la mitad ¿Cuál es este factor?

A) 26 *B) 16* *C) 24* *D) 17* *E) 18*

Resolución:

Sea $\overline{ab}$ el factor de dos cifras y c el otro factor.

$$[\,\overline{ab} - (a + b)]\,.\,c = \frac{\overline{ab} \times c}{2}$$

Después de eliminar c, queda:

$$\overline{ab} = 2\,(a + b) \quad \Rightarrow \quad 8a = b$$

Como b es un dígito, $a = 1$; $b = 8$, el factor $\overline{ab}$ es : **18** **RPTA. E**

IV) PROPIEDADES DE LOS NUMEROS

16.- La suma de tres números impares consecutivos es siempre divisible por:

A) 5 *B) 3* *C) 3 y 5* *D 2 y 5* *E) N.A*

Resolución:

Sean $2n + 1$, $2n + 3$ y $2n + 5$ los 3 impares consecutivos.

$$\text{Suma} = 2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 = 6n + 9$$

$$= 3\,(2\,n + 3)$$

El factor 3 indica que la suma es múltiplo de : **3** **RPTA. B**

17.- La diferencia entre un número de 3 cifras y otro número obtenido escribiendo el anterior con las cifras en el orden invertido, siempre es múltiplo de:

A) 19 *B) 17* *C) 5* *D) 11* *E) 13*

Resolución:

Sea D la diferencia indicada :

$$D = \overline{abc} - \overline{cba}$$

$$D = 100a + 10b + c - 100c - 10\,b - a$$

$$D = 99(a - c)$$

D siempre será múltiplo de 99 o de los divisores de 99 : 3, 9, **11**. **RPTA. D**

18.- Se tienen los números enteros m y n ¿Cuál de las expresiones siguientes representan un número par?

I). $m^2 + m + 3$

II). $m^2 + m + 2n$

III). $(2n + 1)(m^2 - m + 1)$

A) I y II *B) Solo I* *C) Solo II* *D) II y III* *E) Solo III* ***UNMSM 92***

Resolución:

I) $m^2 + m + 3 = m\,(m + 1) + 3$ = PAR + IMPAR = IMPAR.

(el producto $m\,(m + 1)$ es par porque si m es par, el producto será par y si m es impar, $m + 1$ será par y el producto también).

II) $m^2 + m + 2n = m\,(m + 1) + 2n$ = PAR + PAR = PAR

III) $(2n + 1)\,(m^2 - m + 1) = (2n + 1)\,[m\,(m - 1) + 1]$

= IMPAR (PAR + 1) = IMPAR.

En conclusión, sólo **II** es PAR. **RPTA. C**

19.- Se tiene un número que llamaremos β y que tienen k cifras tal que la primera es n (diferente de cero) y el resto son ceros ¿Cuál es el residuo que se obtiene al dividir β entre 9?

A) n ó o *B) k* *C) n - k* *D) 1* *E) n + 1* ***UNMSM 94***

Resolución:

$$\beta = \underbrace{\overline{n000...0}}_{k\,\text{cifras}} = n \times 10^{k-1} = n\,(\overset{\circ}{9} + 1) = n \times \overset{\circ}{9} + n$$

En conclusión : $\beta = \overset{\circ}{9} + n$

Si $n = 9$ ⇒ $\beta = \overset{\circ}{9} + 9 = \overset{\circ}{9}$ ⇒ el residuo es CERO (0).

Si $n < 9$ ⇒ $\beta = \overset{\circ}{9} + n$ ⇒ el residuo es n **RPTA. A**

20.- N es un número de tres cifras tal que al dividirlo entre 3; 4; 5; 6 y 9 deja residuo 1. Pero al dividirlo entre 7 deja residuo 0. Hallar la suma de cifras de N.

A) 10 *B) 11* *C) 12* *D) 13* *E) 14*

Resolución:

Si a N le restamos 1, las divisiones ya no dejarán residuo :

$N - 1 = \overset{\circ}{3}$; $N - 1 = \overset{\circ}{4}$; $N - 1 = \overset{\circ}{5}$; etc.

$N - 1 = \overset{\circ}{3}; \overset{\circ}{4}; \overset{\circ}{5}; \overset{\circ}{6}; \overset{\circ}{9}$ = múltiplo de [MCM (3; 4; 5; 6; 9)]

$N - 1$ = múltiplo de $[180] = 180\,k$

Luego : $N = 180k + 1$ .... (1)

Pero N también es múltiplo de 7, luego $N = (\overset{\circ}{7} + 5)k + 1$

$N = \overset{\circ}{7} + 5k + 1$, entonces $5k + 1 = \overset{\circ}{7}$, de donde $k = 4$

En (1): $N = 180 \times 4 + 1 = 721 \Rightarrow 7 + 2 + 1 =$ **10** RPTA. A

MISCELANEA

21.- Un número de tres dígitos es tal que el dígito, de las decenas es el triple del dígito de las unidades y las centenas son el doble de las decenas. La diferencia entre el dígito mayor y el menor de los otros dos es:

A) 5 *B) 4* *C) 6* *D) 2* *E) 3*

Resolución:

$N = \overline{abc}$; donde $b = 3c$ y $a = 2b$, luego :

$N = \overline{(6c)(3c)(c)}$; la única opción es $c = 1$.

$N = 631 \Rightarrow 6 - 1 =$ **5** RPTA. A

22.- Si la diferencia de las cuartas potencias de dos números es 369 y el cuadrado de la suma de sus cuadrados es 1 681, la suma de los números es:

A) 7 *B) 9* *C) 11* *D) 13* *E) N.A*

Resolución:

$$a^4 - b^4 = 369 \Rightarrow (a^2 + b^2)\,(a^2 - b^2) = 41 \times 9$$

$$(a^2 + b^2)^2 = 1\,681 \Rightarrow (a^2 + b^2)\,(a^2 + b^2) = 41 \times 41$$

Se observa que : $a^2 + b^2 = 41$; $a^2 - b^2 = 9$

Entonces: $a^2 = 25$; $b^2 = 16$ $a + b = 5 + 4 =$ **9** RPTA. B

23.- *Un número N de dos dígitos es el triple del producto de sus dígitos. ¿Cuál es la suma de las soluciones o valores que puede tener N?*

A) 49 ***B) 24*** ***C) 39*** ***D) 54*** ***E) 51***

<u>Resolución</u>:

$N = \overline{ab}$; por dato: $\overline{ab} = 3ab$ ó $10a + b = 3ab$

Despejando "a", tenemos: $a = \dfrac{b}{3b-10}$

Como a debe ser entero y positivo, $b > 3$; $b = 4, 5, 6, 7, 8,$ ó 9

Si $b = 4$; $a = 2$ entonces $N = 24$

Si $b = 5$; $a = 1$ entonces $N = 15$

Para los demás valores de b, a resulta menor que 1. (inadmisible)

Solo hay 2 soluciones: $24 + 15 =$ **39** RPTA. C

24.- *La suma de dos números naturales es 1 043, su cociente es 27 y el resto es el mayor posible. La suma de las cifras del dividendo es:*

A) 9 ***B) 10*** ***C) 11*** ***D) 7*** ***E) 8*** ***UNMSM 88***

<u>Resolución</u>:

Con $a > b$; $a + b = 1\,043$ y

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline (b-1) & 27 \end{array}$$

a : dividendo

Resto máximo

La segunda ecuación es:

$$a = 27b + b - 1$$

Resolviendo: $a = 1\,007$ y $b = 36$

Suma de cifras de a : $1 + 0 + 0 + 7 =$ **8** RPTA. E

25.- *Un número excede al cuadrado más próximo en 39 unidades y es excedido por el siguiente cuadrado en 16 unidades. ¿Cuál es el número?*

A) 438 ***B) 768*** ***C) 383*** ***D) 654*** ***E) 735***

Resolución:

$N - 39 = x^2$; $N + 16 = (x + 1)^2$

$x^2 + 39 = x^2 + 2x + 1 - 16 \Rightarrow x = 27$

Entonces : $N = x^2 + 39 = 27^2 + 39 =$ **768** RPTA. B

26.- Se pide a un estudiante que multiplique 78 por un número de dos cifras en el que la cifra de las decenas es el triple de la cifra de las unidades. Por error, intercambia los dígitos en el segundo factor y obtiene un número que es inferior en 2 808 al producto buscado. ¿Cuál era este producto?

A) 2 896 *B) 8 082* *C) 4 512* *D) 2 418* *E) 4 836*

Resolución:

Producto buscado : $78 \,.\, \overline{(3x)x} = 78 \,.\, 31x$

Producto falso : $78 \,.\, \overline{x(3x)} = 78 \,.\, 13x$

La diferencia es 2 808 : $78 \,.\, 18x = 2\,808$

$x = 2$

El producto buscado era: $78 \,.\, 31 \,.\, 2 =$ **4 836** RPTA. E

27.- La diferencia de 2 números consecutivos pares, más 60 unidades es igual al cuádruple del número menor menos 50 unidades; hallar la suma de los números.

A) 55 *B) 57* *C) 60* *D) 58* *E) N.A.*

Resolución:

Sean x y $x + 2$ los números consecutivos pares :

De los datos : $(x + 2) - x + 60 = 4x - 50$

Resolviendo : $112 = 4x$

$x = 28$

$\therefore$ los números son 28 y 30 ; su suma es : **58** RPTA. D

28.- La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en 8; hallar el número menor.

A) 44 *B) 49* *C) 52* *D) 55* *E) N.A.*

Resolución:

Siendo A y B los números, tenemos que : $\begin{cases} A + B = 106 \\ A - B = 8 \end{cases}$

Entonces : $A = 57$; $B = 49$ RPTA. B

29.- La suma de dos números es 130, su cociente es 17 y su residuo 4. Hallar la diferencia de los números.

A) 116 *B) 106* *C) 126* *D) 110* *E) N.A.*

Resolución:

Planteamos : $A + B = 130$

$A = 17B + 4 \leftarrow \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 4 & 17 \end{array}$

Resolviendo : $18B + 4 = 130$

$B = 7$

Luego : $A = 123$ y $A - B = 116$ RPTA. A

30.- La suma de dos números es 63 y el cociente es 6; hallar la diferencia de los números.

A) 50 *B) 48* *C) 40* *D) 52* *E) 45*

Resolución:

Según los datos : $A + B = 63$ .... (1)

$\frac{A}{B} = 6$ .... (2)

(2) en (1) : $6B + B = 63 \Rightarrow B = 9$

Luego se obtiene : $A = 54$ y $A - B = 45$ RPTA. E

31.- Existen dos números consecutivos tal que el menor excede en 81 a la diferencia entre los 3/4 del menor y los 2/5 del mayor. El menor de los números es :

A) 122 *B) 129* *C) 124* *D) 120* *E) 126*

Resolución:

Sea "x" el menor y "$x + 1$" el mayor : $x = \frac{3}{4}x - \frac{2}{5}(x + 1) + 81$

Luego : $\frac{13}{20}x = \frac{403}{5} \Rightarrow x = 124$ RPTA. C

32.- La razón entre la suma de dos números y su diferencia es 5/3; el cociente del mayor entre el menor es :

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución:

Sean "A" y "B" los números; su suma A + B y su diferencia A - B, entonces :

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3A + 3B = 5A - 5B$$

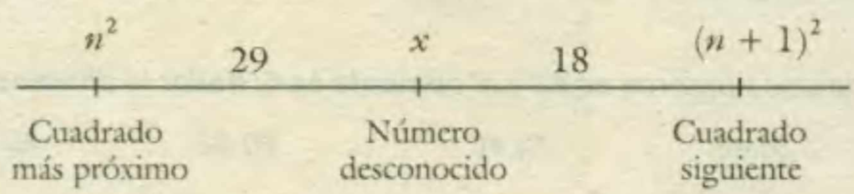
$$8B = 2A$$

De donde : $\frac{A}{B} = 4$ **RPTA. D**

33.- Un número excede al cuadrado más próximo en 29 unidades y es excedido por el siguiente cuadrado en 18 unidades; hallar la suma de cifras del número.

A) 18 *B) 16* *C) 19* *D) 15* *E) 17*

Resolución:



Del diagrama : $(n+1)^2 - n^2 = 29 + 18$

$$2n + 1 = 47$$

$$n = 23$$

$\therefore$ El número es $x = n^2 + 29 = 558$

Y sus cifras suman : $5 + 5 + 8 =$ **18** **RPTA. A**

34.- Si al doble de un número entero positivo disminuido en tres, lo elevamos al cuadrado, para luego multiplicar por 4; y a este resultado le quitamos 3, elevando finalmente lo que resulta al cuadrado, obtenemos como respuesta 1. Hallar el número.

A) 5 *B) 4* *C) 3* *D) 2* *E) 1*

Resolución.-

Al doble de un número disminuido en 3 : $2x - 3$

Lo elevamos al cuadrado : $(2x-3)^2$

Para multiplicar por 4 y quitarle 3 : $4(2x-3)^2 - 3$

Elevando al cuadrado, resulta 1 : $\left[4(2x-3)^2 - 3\right]^2 = 1$

Resolviendo la última ecuación : $4\,(2x-3)^2 - 3 = 1$

$$(2x-3)^2 = 1$$

$$2x - 3 = \pm 1$$

Como x es positivo : $x = 2$ RPTA. 2

35.- El número 108 puede descomponerse en cuatro sumandos de manera que sumando 5 al primero, restando 5 al secundo multiplicando por 5 al tercero y dividiendo por 5 al cuarto, se obtiene siempre el mismo resultado en cada caso. ¿Cuáles son esos cuatro resultados?

A) 11 ; 22 ; 4 ; 75 *B) 13 ; 21 ; 2 ; 70* *C) 10 ; 20 ; 3 ; 75* *D) 15 ; 25 ; 6 ; 72* *E) N.A.*

Resolución:

Sean a, b, c, d los cuatro sumandos : $a + b + c + d = 108$ ..... (α)

$$a + 5 = b - 5 = c\,.\,5 = d \div 5 = x \quad ...... (\beta)$$

De (β) obtenemos : $a = x - 5$; $b = x + 5$

$$c = \frac{x}{5} \; ; \; d = 5x$$

En (α) : $x - 5 + x + 5 + \frac{x}{5} + 5x = 108$

$$x = 15$$

Y los sumandos son : $a = 10$; $b = 20$; $c = 3$; $d = 75$ RPTA. C

36.- La suma de dos números es 65, los cocientes de estos números con un tercero son 3 y 2, teniendo como residuos 6 y 9 respectivamente; hallar la diferencia positiva de éstos números.

A) 8 *B) 9* *C) 4* *D) 6* *E) 7*

Resolución:

Sean A y B los números , x el tercero :

$$\begin{array}{l|l} A & x \\ \hline 6 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} B & x \\ \hline 9 & 2 \end{array}$$

Es decir : $A = 3x + 6$

$$B = 2x + 9$$

Si la suma es 65 : $(3x + 6) + (2x + 9) = 65$

$$5x = 50$$

$$x = 10$$

Entonces los números son : $A = 3 . 10 + 6 = 36$

$B = 2 . 10 + 9 = 29$

Y su diferencia : $A - B =$ **7** RPTA. E

37.- La suma de dos números es 450, y la raíz cuadrada de uno de ellos es igual a la raíz cuadrada del otro, aumentado en 18. ¿Cuál es el mayor?

A) 20 *B) 21* *C) 22* *D) 23* *E) 24*

<u>Resolución</u>:

Las raíces cuadradas se pueden representar por : $x + 9$ y $x - 9$, entonces los números serán: $(x+9)^2$ y $(x-9)^2 = 450$

Entonces : $(x+9)^2 + (x-9)^2 = 450$

Resolviendo : $x = 12$

Y el número mayor es : $x + 9 = 12 + 9 =$ **21** RPTA. B

38.- Un número de 4 cifras termina en 8, el mismo número verifica que si la cifra de las unidades se coloca delante de las otras tres manteniendo el orden de éstas, el número obtenido superará al anterior en 4 464; hallar la suma de sus cifras.

A) 28 *B) 26* *C) 25* *D) 22* *E) N.A.*

<u>Resolución</u>.-

El número original : $\overline{8abc} - \overline{abc8} = 4464$ .... (α)

El nuevo número : $\overline{8abc}$

Si hacemos $x = abc$, (α) se transformará en : $8\,000 + x - (10x + 8) = 4\,464$

Resolviendo : $x = 392$

Y el número original : 3 928

Su suma de cifras : $3 + 9 + 2 + 8 =$ **22** RPTA. D

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- La suma de dos números es 191, si el mayor se divide por el menor, el cociente es 4 y el reciduo es 16. La diferencia de dichos números es:

A) 87 B) 131 C) 121 D) 89 E) 125

2.- El producto de 3 números enteros consecutivos es igual a 24 veces el segundo. ¿Cuál es la suma?

A) 15 B) 18 C) 20 D) 21 E) 22

3.- La diferencia de dos números es 14 560 y el doble del mayor es 60 000. ¿En cuánto excede el número 76 543 al menor de los dos números?

A) 61 103 B) 61 983 C) 31 103
D) 62 104 E) 60 103

4.- Se tiene un número de dos cifras que suman 9. Si al número se le suma 27 las cifras se invierten. Hallar la cifra de las unidades del número original.

A) 3 B) 5 C) 6 D) 4 E) 2

5.- Al dividir un número entre 15 el residuo es 12. ¿Cuál será el residuo si se divide entre 5?

A) 3 B) 1 C) 4 D) 2 E) 0

6.- El cociente de dos números es 12 y su producto es 4 800, la suma de dichos números es:

A) 240 B) 360 C) 480 D) 260 E) 120

7.- Se tiene un número de dos cifras, si se agrega un 2 a la izquierda, el número que se forma es 5 veces el número original. La suma de las cifras del número original es:

A) 5 B) 10 C) 7 D) 6 E) 4

8.- Si n es un entero, ¿Cuál de las siguientes representa a tres enteros consecutivos pares?

A) $n, n+1, n+2$ D) $2n, 2n+1, 2n+2$
B) $n, n+2, n+4$ E) $2n, 2n+2, 2n+4$
C) $2n, 4n, 6n$

9.- Si $\frac{k}{2}$ es un número par y $\frac{k}{4}$ es un número impar, entonces k podría ser igual a:

A) 24 B) 20 C) 16 D) 10 E) 8

10.- "x" es el dígito de las decenas, "y" el de las unidades de un número de dos dígitos. ¿Cuál es el producto de este número y el número 5?

A) $5x+y$ B) $5x+5y$ C) $5x+50y$
D) $50x+50y$ E) $50x+5y$

NIVEL B

11.- Los tres términos de una resta suman 112 y dos de ellos suman 60. Hallar el sustraendo, sabiendo que es de dos cifras.

A) 4 B) 56 C) 52 D) 60 E) N.A

12.- El producto de cuatro enteros consecutivos es 3 024. ¿Cuál es la suma de estos números?

A) 30 B) 45 C) 18 D) 32 E) 25

13.- Hallar el menor número por el que hay que dividir a 108 675 para que el cociente sea un cuadrado perfecto.

A) 25 B) 73 C) 483 D) 117 E) 375

14.- Si un número de 3 cifras que empieza con 9 se le suprime esta misma cifra, el número resultante es 1/31 del original. Al sumar las 3 cifras de dicho número se obtendrá:

A) 13 B) 15 C) 12 D) 10 E) 11

15.- La suma de las dos cifras que componen un número es igual a 5. Si se invierte el orden de las cifras de dicho número y se le suma 9, entonces se obtiene el número original. ¿Cuál es el número original aumentado en 11?

A) 25 B) 34 C) 43 D) 52 E) 45

16.- ¿Cuántos números comprendidos entre 1 y 99 son divisibles a la vez por 2 y 7?

A) 7 B) 8 C) 14 D) 20 E) 19

17.- En cierto número menor que 100, el cociente de la cifra de las decenas entre el de las unidades es 3 y el residuo es 1. Si la suma de las cifras del número es 9. ¿Cuál es la diferencia?

A) 8 B) 1 C) 7 D) 5 E) 3

18.- Si x es un entero impar. ¿Cuál es la suma de los dos enteros impares consecutivos que siguen a $5x + 1$?

A) $10x + 7$ B) $10x + 6$ C) $10x + 5$

D) $10x + 4$ E) $10x + 3$

19.- Un número al dividirse entre 5 da como residuo 1, entre 7 da como residuo 6, al dividir entre 3 no sobra ninguno, este número es:

A) 67 B) 165 C) 25 D) 111 E) 72

20.- La suma de 25 números consecutivos es 500. Hallar la suma de los 25 números siguientes.

A) 975 B) 1 500 C) 1 225

D) 1 125 E) 625

21.- La diferencia entre dos números naturales es "x" si se resta 5 al minuendo y se suma 3 al sustraendo. ¿Cuál será la diferencia?

A) $x + 5$ B) $x - 5$ C) $x + 5$

D) $x + 2$ E) $x - 8$

22.- La diferencia de dos números es 426 y el cociente 72; hallar la suma de los números.

A) 438 B) 458 C) 448

D) 428 E) 528

23.- La diferencia de dos números es 328, el cociente es 12 y el residuo es 20; hallar la suma de los números.

A) 358 B) 384 C) 356

D) 346 E) 406

24.- La diferencia de dos números positivos es 8 y la suma de ambos multiplicado por el menor de ellos es 384. ¿Cuál es el producto de ambos?

A) 160 B) 120 C) 240

D) 364 E) 117

25.- ¿Cuál es el número que aumentado en 8 unidades produce un resultado igual al que se obtiene dividiéndolo entre 3/5?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 18 E) 20

NIVEL C

26.- Un número entero de cuatro cifras es cuadrado perfecto. Hallar ese número sabiendo que las dos primeras cifras son iguales e iguales también las otras dos.

A) 5 556 B) 7 788 C) 7 744

D) 4 488 E) 8 844

27.- ¿Cuál es el menor número de 3 cifras que dividido por 2, 3, 4, 5 y 6 da respectivamente los restos 1, 2, 3, 4 y 5?

A) 101 B) 123 C) 119 D) 187 E) 345

28.- En un conjunto de cuatro enteros consecutivos, la suma de los cubos de los tres primeros es igual al cubo del cuarto número. Uno de los números es:

A) 7 B) 5 C) 2 D) 9 E) 11

29.- Si a un número de dos cifras se le disminuye el doble de la suma de sus cifras se obtiene la suma de los cuadrados de las mismas cifras, pero si al número obtenido al permutar sus cifras se le disminuye en 9, se obtendrá el número original que es:

A) 56 B) 23 C) 34 D) 12 E) 35

30.- Si un número N de dos dígitos excede en 17 al triple de la suma de sus dígitos, entonces diga cuál o cuáles afirmaciones se cumplen:

I. 32 es un valor de N

II. N admite dos valores

III. N admite un único valor

A) Sólo I B) Sólo II C) I y II

D) I y III E) Sólo III

31.- Sea "A" un número de tres cifras cuya suma de cifras es 17. Si A es el múltiplo de 5 y 11 a la vez. ¿Cuánto vale el producto de sus cifras?

A) 30 B) 165 C) 45 D) 135 E) 60

32.- Hallar la suma de tres números sabiendo que el segundo es mayor que el primero en la misma cantidad que el tercero es mayor que el segundo. Además se sabe que el producto de los dos más pequeños es 85 y el producto de los dos mayores vale 115.

A) 36 B) 30 C) 24 D) 51 E) 27

33.- Si al cubo de un número se le suma el triple de su cuadrado y luego el triple del mismo número, el resultado es 63, entonces el cuadrado de dicho número es :

A) 25 B) 15 C) 9 D) 36 E) 6

34.- Si a un número de tres cifras que empieza en 9, se le suprime esta cifra queda 1/21 del número. Dar como respuesta la suma de las decenas y unidades del número.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

35.- Al multiplicar 2 números uno de los cuales es mayor que el otro en 10 unidades, el escolar cometió un error disminuyendo en 4 la cifra de las decenas en el producto. Al dividir, para comprobar el resultado, el producto por el menor factor obtuvo 39 de cociente y por resto 22; hallar la suma de los factores.

A) 80 B) 72 C) 64 D) 81 E) 96

36.- Se toma un número impar, se le suma los tres números pares que le preceden y el cuádruple del número impar que le sigue, obteniendo en total 199 unidades; el menor de los sumandos es :

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

37.- La suma de dos números positivos y diferentes dividido entre su producto es como 2 a 3, a su vez la suma de sus cuadrados es a la suma de los números como 5 a 1. ¿Cuál es la diferencia de los números?

A) 1 B) 7 C) 4 D) 2 E) 9

38.- Los dos factores de una multiplicación, suman 91, si se aumenta 5 unidades al multiplicando y se disminuye 2 al multiplicador, el producto aumenta en 67. ¿Cuál es la diferencia de los factores?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

39.- Aumentando un número en sus tres centésimas partes se obtiene 103 unidades, más la quinta parte de aquella suma. ¿Cuál es el número?

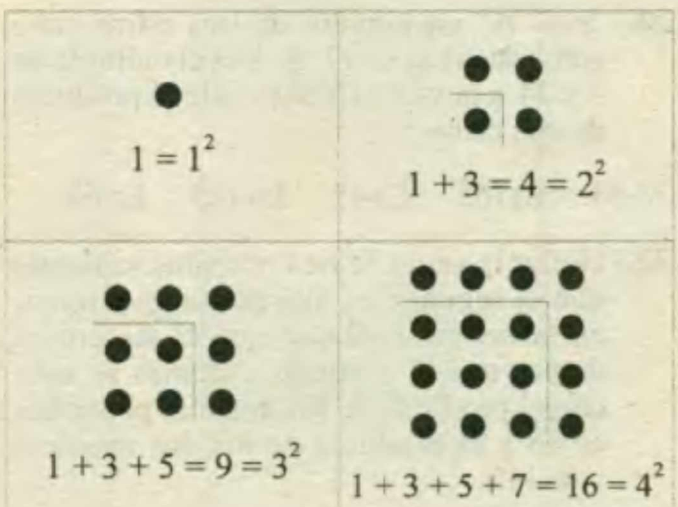
A) 125 B) 130 C) 103 D) 100 E) 128

INDUCCION Y SUMATORIAS

Uno de los métodos más simples, usado sistemáticamente de modo explícito por vez primera por Pascal en el siglo XVII es el de inducción. La idea es la siguiente: Tienes las 28 fichas de dominó, estás seguro de que las has colocado de pie, en fila india, de forma que si cae una cae seguro la siguiente. Un gracioso te tira la primera hacia la segunda. ¿Conclusión? ¡Se caerán todas! Puedes concebir los números naturales: 1; 2; 3; 4;.... como fichas de dominó. Supónte que puedes estar seguro, demostrar, que si uno cualquiera h tiene una cierta propiedad P, entonces también el siguiente $h + 1$ la tiene. A continuación te aseguras que el primero tiene la propiedad P. ¿Conclusión? Está claro : *Todos* los números naturales tienen la propiedad P. Esto tan sencillo es la inducción.

El método de inducción resuelve multitud de problemas y de juegos. Comienzas experimentando con números pequeños; y cuando has manejado bastante la situación empiezas a intuir una pauta, y fácilmente te viene a la cabeza una conjetura. Para 1 sucede esto, para 2 también, para 3 lo mismo..... Equivale a decir que 1 tiene una cierta propiedad, 2 también, 3 también,.... *¿Sucederá que todo n la tiene también*? ¿Cómo demostrarlo?. Entonces supones que h la tiene y a partir de ahí demuestras que también la tiene $h + 1$. Queda claro: *Todo n tiene la propiedad*.

¿Sabrías demostrar que la suma de los n primeros números impares resulta ser un cuadrado perfecto?



Pitágoras lo vio así, colocando piedrecillas en la arena de la playa, tal como lo muestra el esquema adjunto.

Gauss, a sus 5 años, lo hubiera demostrado así : los n primeros impares son :

$1, 3, 5, 7, ..., 2n - 1$

1.°, 2.°, 3.°, 4.°, ..., n-ésimo

Llamemos S_n a la suma de ellos, que la escribiremos de dos maneras :

$S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 3) + (2n - 1)$

$S_n = (2n - 1) + (2n - 3) + (2n - 5) + ... + 3 + 1$

Sumemos : $2S_n = 2n + 2n + 2n + 2n + n$ veces...... $+ 2n + 2n = 2n^2 \quad \Rightarrow \quad S_n = n^2$

Trata ahora de hacerlo por inducción. La cosa va bien para el primer impar $1 = 1^2$. Supongamos que es cierto que, cuando sumamos los h primeros impares, resulta.

$$S_h = 1 + 3 + 5 + ... + (2h - 3) + (2h - 1) = h^2$$

Veamos qué pasa con los $h + 1$ primeros impares. ¿Cuál es su suma?

$$S_{h+1} = 1 + 3 + 5 + ... + (2h - 3) + (2h - 1) + (2h + 1)$$

Usando la hipótesis inductiva resulta : $S_{h+1} = S_h + 2h + 1 = h^2 + 2h + 1 = (h + 1)^2$.

Por tanto, al ser cierto para $S_{h+1} = (h + 1)^2$, es cierto para todo n que $S_n = n^2$.

13 Fracciones

Una fracción es esencialmente una división expresada en la forma a/b, donde se ha querido indicar "a divide a b". El número que está sobre la barra (a) es el numerador y el que esta debajo es el denominador (b).

Algunas propiedades y operaciones que se pueden realizar con fracciones se resumen en este cuadro.

Fracciones equivalentes :	$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}$; $\frac{a}{b}=\frac{a\div c}{b\div c}$	$b\neq 0$; $c\neq 0$	
Adición :	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{b.d}$	**Sustracción** :	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{b.d}$
Multiplicación :	$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$	**División** :	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.c}$
Comprobación :	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc$; $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d} \Rightarrow ad\leq dc$	a, b, c, d positivos	

Los numeradores y denominadores de algunas fracciones pueden ser inclusive también fracciones, por lo que la simplificación en estos casos se debe hacerse con cuidado.

$$\text{Ejemplo: } \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{3}-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\div\frac{2}{3} = \frac{4\times 3}{3\times 2} = 2$$

Las siguientes reglas pueden ser útiles :

$\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$	$\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{bc}$	$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$

La preposición "de" antepuesta a una fracción, usualmente indica una multiplicación.

Ejemplo: $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de 120

Significa: $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times 120$

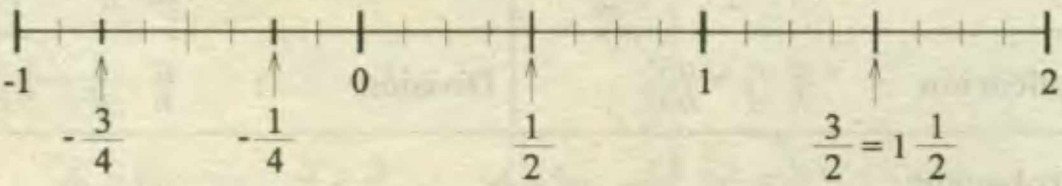
Aquí es preferible cancelar factores que a la vez aparecen como numeradores y denominadores, antes de multiplicar.

$$\frac{1}{\cancel{2}_{1}} \times \frac{\cancel{2}^{1}}{3} \times \frac{4^{1}}{\cancel{5}_{1}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{6}_{1}} \times \cancel{120}^{20} = \frac{80}{3}$$

I) FRACCIONES Y NÚMEROS RACIONALES

Un número que se puede expresar como fracción de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros y $b \neq 0$, se llama número racional. Cada número racional corresponde a un conjunto de fracciones equivalentes y nombra un punto en la recta numérica.

Por ejemplo en el conjunto $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, ...\right\}$ cada fracción representa el mismo número en la recta numérica.



Los números cardinales, los enteros y ciertos decimales, son números racionales porque se pueden expresar como fracciones.

$$4 = \frac{4}{1} \quad ; \quad -5 = \frac{-5}{1} \quad ; \quad 0{,}3 = \frac{3}{10}$$

Hay tres formas de escribir un número racional negativo :

$-\frac{3}{5} = \frac{-3}{5} = \frac{3}{-5}$ El signo menos puede preceder a la fracción, al numerador o al denominador.

II) NÚMEROS RACIONALES Y DECIMALES PERIÓDICOS

Podemos escribir $\frac{3}{8}$ en forma de decimal infinito 0,375 porque cuando dividimos 3 entre 8 el proceso de división termina con residuo 0; es decir es finito. Un decimal periódico es aquel decimal con dígitos que se repiten sin fin, por ejemplo:

$$\frac{15}{33} = 0{,}454545 \ldots = 0{,}3\overset{\frown}{45}$$

El símbolo ($\frown$) indica que el conjunto de dígitos se repite.

Un número racional se puede expresar como decimal finito o periódico. Un decimal que no es finito ni periódico como por ejemplo 3,121121113 ... se llama número irracional.

Algunas equivalencias entre decimales periódicos y fracciones son :

$$0,\widehat{a} = \frac{a}{9}$$

$$0,\widehat{ab} = \frac{\overline{ab}}{99}$$

$$0,\widehat{abc} = \frac{\overline{abc}}{999}$$

$$0,a\widehat{bc} = \frac{\overline{abc} - a}{990}$$

$$a,b\widehat{c} = \frac{\overline{abc} - \overline{ab}}{90}$$

Observación :

La expresión infinita : 0,99999999999 ......

no es un número decimal, por lo tanto es incorrecto afirmar que su periodo es 9. Para demostralo, asumiremos que la expresión dada es un decimal de periodo 9, luego de acuerdo con las reglas arriba indicadas, para obtener su fracción generatriz tendríamos:

$$0,\bar{9} = \frac{9}{9} \Rightarrow 0,\bar{9} = 1$$

Como podemos apreciar esta última igualdad es inobjetablemente falsa, lo cual nos demuestra que nuestra suposición era incorrecta.

PROBLEMAS RESUELTOS

I) OPERACIONES CON FRACCIONES

1.- A la mitad de los $\frac{3}{7}$ de los $\frac{14}{15}$ de los $\frac{2}{3}$ de 60, restarle la quinta parte de los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{5}{9}$ de 45. El resultado será:

A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) 6* *E) N.A.*

Resolución:

Hallamos por separado las cantidades que se van a restar :

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{14}{15}\times\frac{2}{3}\times 60 = 2\times 4 = 8$$

$$\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{9}\times 45 = 2 \quad ; \quad 8-2 = \mathbf{6}$$

RPTA. D

2.- Dadas las expresiones :

$$A = 1 + \frac{5}{1+\frac{1}{5}} \qquad B = 2\frac{1}{8} - \left(\frac{7}{8}+\frac{5}{12}\right)$$

$$C = 1 + \frac{1+\frac{1}{5}}{5} \qquad D = A \div B \div C$$

Hallar el valor de D.

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución:

Efectuando en cada expresión :

$$A = 1 + \frac{5}{6/5} = 1 + \frac{25}{6} = \frac{31}{6}$$

$$B = \frac{17}{8} - \frac{7}{8} - \frac{5}{12} = \frac{5}{4} - \frac{5}{12} = \frac{5}{6}$$

$$C = 1 + \frac{6/5}{5} = 1 + \frac{6}{25} = \frac{31}{25}$$

$$D = \frac{31}{6} \div \frac{5}{6} \div \frac{31}{25} = \frac{31}{5} \div \frac{31}{25} = \frac{31\times 25}{5\times 31} = \mathbf{5}$$

RPTA. E

3.- ¿Qué parte de lo que falta a $\frac{1}{3}$ para ser $\frac{5}{6}$, es lo que le sobra a $\frac{4}{5}$, al quitársele $\frac{3}{10}$?

A) $\frac{1}{2}$ *B)* $\frac{2}{3}$ *C)* $\frac{3}{3}$ *D)* $\frac{4}{5}$ *E)* $\frac{5}{6}$ **UNFV 94**

Resolución:

Lo que falta a $\frac{1}{3}$ para ser $\frac{5}{6}$ es: $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5-2}{6} = \frac{1}{2}$.

Una parte "f" de $\frac{1}{2}$, es lo que le sobra a $\frac{4}{5}$ al quitársele $\frac{3}{10}$:

$$f \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{10} \Rightarrow f = 1 \text{ ó } f = \frac{3}{3}$$

RPTA. C

4.- Hallar el decimal periódico equivalente a: $x = \frac{2,1\hat{3}}{0,3\hat{6}}$

A) $5,\widehat{181}$ *B)* $5,18\hat{1}$ *C)* $5,\widehat{18}$ *D)* $5,81\hat{8}$ *E)* $5,\widehat{81}$ **PUCP 90 - II**

Resolución:

Transformando numerador y denominador por separados :

$$2,1\hat{3} = \frac{213-21}{90} = \frac{192}{90} = \frac{64}{30}$$

$$0,3\hat{6} = \frac{36-3}{90} = \frac{33}{90} = \frac{11}{30}$$

Entonces : $x = \frac{64/30}{11/30} = \frac{64}{11} = 5\frac{9}{11} = 5 + \frac{81}{99}$

$$x = 5,\widehat{81}$$

RPTA. E

5.- ¿Cuál es el numerador de la fracción equivalente a 3/13 tal que la suma de sus términos sea 480?

A) 90 *B) 30* *C) 60* *D) 80* *E) 70* **UNMSM 94**

Resolución:

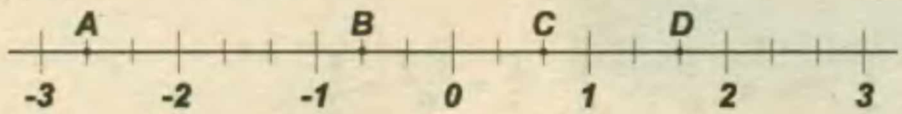
Sea la fracción equivalente : $\frac{3x}{13x}$

La suma de sus términos es 480 : $3x + 13x = 480$

$$x = 30$$

El numerador será : $3\,(30) = \boxed{90}$ RPTA. A

6.- Hallar B.C - A.D; siendo A, B, C, D números racionales correspondientes a cada punto.



A) 1 *B) $\frac{2}{3}$* *C) 3* *D) 4* *E) $\frac{5}{9}$*

Resolución:

Los números son : $A = -\,2\frac{2}{3}$; $B = -\frac{3}{2}$

$C = \frac{2}{3}$; $D = 1\frac{2}{3}$

Luego : $BC - AD = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)$

$= -\frac{4}{9} + \frac{40}{9} = \frac{36}{9} = \boxed{4}$ RPTA. D

7.- Sea "a" un número racional tal que el numerador excede al denominador en una unidad. Si dicho número es aumentado en 2 unidades, el numerador queda aumentado en 8. El valor de "a" es :

A) $\frac{6}{5}$ *B) $\frac{3}{2}$* *C) $\frac{4}{5}$* *D) $\frac{5}{4}$* *E) $\frac{7}{6}$* ***UNMSM 92***

Resolución:

De acuerdo a los datos : $a = \frac{n+1}{n}$, antes del aumento.

Después del aumento : $\frac{n+1}{n} + 2 = \frac{(n+1)+8}{n}$

Resolviendo : $n = 4$

Luego : $\boxed{a = \frac{5}{4}}$ RPTA.D

8.- Se obtiene un decimal periódico $0,\widehat{5}$ que está entre dos números periódicos cuya generatriz tiene como denominador 11 y como numerador a dos números impares consecutivos. Hallar la diferencia entre los periodos.

A) 12 *B) 15* *C) 18* *D) 23* *E) N.A* ***PUCP 93 - II***

Resolución:

El decimal periódico es $0,\bar{5} = \dfrac{5}{9}$

Está entre las fracciones $\dfrac{n}{11}$ y $\dfrac{n+2}{11}$; con n impar.

Los periodos de estas fracciones no son n y $n + 2$, porque los denominadores deben ser 99. Entonces multiplicado por 9; tendremos.

$$\frac{9n}{99} \quad \text{y} \quad \frac{9n+18}{99}$$

Y la diferencia entre los periodos es : $9n + 18 - 9n =$ **18** RPTA. C

9.- Simplificar : $E = \dfrac{\dfrac{25}{36}+\dfrac{2525}{3636}+\dfrac{252525}{363636}}{\dfrac{25}{24}+\dfrac{2525}{2424}}$

A) $\dfrac{2}{3}$ *B)* $\dfrac{1}{2}$ *C)* $\dfrac{3}{2}$ *D)* $\dfrac{5}{6}$ *E)* 1

Resolución:

Antes de operar, simplificamos:

$$\frac{2525}{3636}=\frac{25\times101}{36\times101}=\frac{25}{36} \quad ; \quad \frac{2525}{2424}=\frac{25\times101}{24\times101}=\frac{25}{24} \quad ; \quad \frac{252525}{363636}=\frac{25\times10101}{36\times10101}=\frac{25}{36}$$

Luego : $E = \dfrac{3\times\dfrac{25}{36}}{2\times\dfrac{25}{24}} = \dfrac{\dfrac{25}{12}}{\dfrac{25}{12}} =$ **1** RPTA. E

10.- Calcular la suma de los valores de x é y, sabiendo que:

$$1+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=2 \quad ; \quad y=\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{3}}$$

A) $\dfrac{5}{3}$ *B)* $\dfrac{11}{6}$ *C)* $\dfrac{3}{2}$ *D)* $\dfrac{5}{6}$ *E)* $\dfrac{7}{3}$

Resolución:

Cálculo de x : $\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = x+\dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{1}{3}$

Cálculo de y : $y = \dfrac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$

$$x + y = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6} \qquad \text{RPTA. B}$$

II) PLANTEO DE PROBLEMAS

11.- ¿Cuál es la fracción que aumentada en sus $\frac{3}{4}$ da $\frac{3}{4}$.

A) $\frac{3}{5}$ *B)* $\frac{1}{5}$ *C)* $\frac{3}{7}$ *D)* $\frac{2}{9}$ *E)* $\frac{1}{4}$

Resolución:

Sea f la fracción : $f + \frac{3}{4}$ de $f = \frac{3}{4}$

$$\frac{7f}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow f = \frac{3}{7} \qquad \text{RPTA. C}$$

12.- ¿Cuál es la fracción que resulta triplicada cuando a sus dos términos se les agrega el denominador?

A) $\frac{1}{4}$ *B)* $\frac{1}{5}$ *C)* $\frac{2}{3}$ *D)* $\frac{3}{5}$ *E)* $\frac{3}{4}$

Resolución.-

Sea $\frac{a}{b}$ la fracción original.

Después de los cambios de la fracción es : $\dfrac{a+b}{b+b}$

Que por ser el triple de la original, permite plantear y resolver : $\dfrac{a+b}{2b} = 3 \times \dfrac{a}{b}$

$$a + b = 6a$$

$$b = 5a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{5} \qquad \text{RPTA. B}$$

13.- Disminuyendo una misma cantidad a los dos términos de la fracción x/y ; con x≠ y se obtiene la fracción original invertida. ¿Cuál es aquella cantidad?

A) xy *B) x - y* *C) y - x* *D) -xy* *E) x + y*

Resolución.-

La cantidad a restarse, que sea "a" : $\dfrac{x-a}{y-a} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow x^2 - ax = y^2 - ay$

$$x^2 - y^2 = ax - ay \Rightarrow (x+y)(x-y) = a(x-y)$$

$$\therefore \quad a = x + y \qquad \text{RPTA.E}$$

14.- Dos fracciones irreductibles tienen como denominadores a 30 y 24, siendo su suma $\frac{83}{120}$. Hallar la suma de los numeradores.

A) 18 *B) 20* *C) 19* *D) 16* *E) 17* ***PUCP 89 - I***

Resolución.-

Sean a y b los numeradores : $\dfrac{a}{30} + \dfrac{b}{24} = \dfrac{23}{120} \Rightarrow 4a + 5b = 83$ ...... (1)

En (1) el máximo valor de a es 20, y a no tiene factores comunes con 30, entonces a puede ser: 7, 11, 13, 17 ó 19.

Cada valor de a, da un valor para b, que se indica en el cuadro:

a	7	11	13	17	19
b	11	39/5	31/11	3	7/5

Como b debe ser entero solo podría ser 11 ó 3, pero por ser $\frac{b}{24}$ irreductible, se descarta $b = 3$ y sólo queda $b = 11$.

Entonces $a = 7 \wedge b = 11$; $a + b = 18$ RPTA. A

15.- Si gasté los $\frac{2}{3}$ de lo que no gasté, entonces lo que no gasté representa:

A) 3/5 de mi dinero *B) 3/2 de mi dinero* *C) 1/3 de mi dinero*

D) 2/5 de lo que gasté *E) 4/5 de mi dinero* ***UNMSM 90***

Resolución:

Sea x lo que no gastó , entonces gastó $\frac{2}{3}x$, luego si D es el dinero antes de gastar:

$$\frac{2}{3}x + x = D \Rightarrow \frac{5x}{3} = D \Rightarrow x = \frac{3}{5}D$$

Lo que no gastó (x) es $\frac{3}{5}$ de su dinero. RPTA. A

16.- Un chofer en la primera parada de su recorrido descarga 2/3 de las cajas que lleva en su camión. Después descarga 5 cajas en su segunda parada, quedándole la cuarta parte de su carga original, el número de cajas que llevaba ante de su primera parada es:

A) 12 B) 24 C) 36 D) 48 E) 60 PUCP 95 - II

Resolución:

Sea x el # cajas antes de descargar.

1ª parada : $x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x$

2ª parada : $\frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{4}x$ .... (α)

Resolviendo (α) : $x = 60$ RPTA. E

17.- La tercera y la cuarta parte de una canasta de frutas son de naranjas y manzanas respectivamente. Hallar el número total de frutas que contiene la canasta. Si la suma de naranjas y manzanas es 21.

A) 24 B) 72 C) 39 D) 48 E) 36 UNMSM 93

Resolución:

Sea x el número de frutas.

La tercera parte : $\frac{x}{3}$, son naranjas y la cuarta parte: $\frac{x}{4}$, son manzanas.

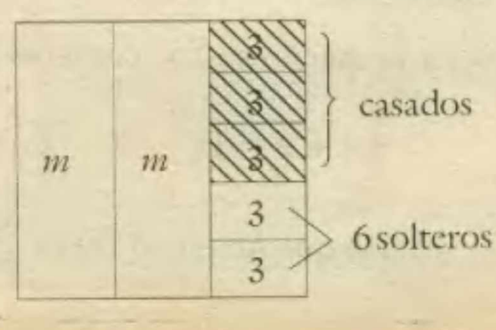
$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 21 \Rightarrow \frac{7x}{12} = 21 \Rightarrow x = 36$$ RPTA. E

18.- En una reunión los $\frac{2}{3}$ de los concurrentes son mujeres, y $\frac{3}{5}$ de los varones son casados en tanto que los otros seis son solteros. El número de personas que asistieron a la reunión es :

A) 45 B) 36 C) 30 D) 25 E) 15 UNFV 88 - I

Resolución:

Podemos hacer un gráfico :



En el sector de varones, cada casillero vale 3, entonces habrá $3 \times 5 = 15$ varones.

En el sector de mujeres, cada m vale 15, por lo tanto son $15 + 15 = 30$ mujeres.

$\therefore$ Total de personas = $15 + 30 = $ **45** RPTA. A

19.- He recibido los $\frac{2}{3}$ de la mitad de la quinta parte de 720 lo cual representa $\frac{1}{2}$ de la tercera parte de lo que tenía inicialmente. ¿Cuánto tenía inicialmente?

A) 644 *B) 460* *C) 288* *D) 522* *E) 366*

Resolución:

Calculamos lo recibido : $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 720 = 48$

Esto representa a $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ de x, donde x es lo que tenía.

$$48 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 288$$ RPTA. C

20.- En un grupo de 20 niños y niñas la mitad de los niños y la séptima parte de las niñas tienen bicicletas ¿Cuántos no tienen bicicletas?

A) 15 *B) 12* *C) 9* *D) 5* *E) 10*

Resolución:

Sea "x" el números de niños; "y" el número de niñas : $x + y = 20$

La mitad de los niños : $\frac{x}{2}$; la séptima parte de las niñas : $\frac{y}{7}$

"x" debe ser # par (para que tenga mitad)

"y" debe ser múltiplo de 7, luego podría ser 7 ó 14.

si $y = 7 \Rightarrow x = 13$ (no es par)

si $y = 14 \Rightarrow x = 6$ (si es par). Estos son los valores.

Tienen bicicletas : $\frac{6}{2} + \frac{14}{7} = 3 + 2 = 5$

No tienen bicicletas : $20 - 5 = 15$ RPTA. A

21.- Una fuente contiene 48 litros de agua. Se retiran $\frac{3}{8}$ del contenido, luego los $\frac{2}{3}$ del resto y por último los $\frac{3}{5}$ del nuevo resto. ¿Cuántos litros quedan?

A) 6 *B) 4* *C) 12* *D) 20* *E) 8*

Resolución:

Inicialmente : 48 litros.

Se retiran	quedan
$\frac{3}{8} \times 48 = 18$ →	$48 - 18 = 30$
$\frac{2}{3} \times 30 = 20$ →	$30 - 20 = 10$
$\frac{3}{5} \times 10 = 6$ →	$10 - 6 = 4$

RPTA. B

22.- Desde la azotea del edificio de 125 metros de altura se suelta una pelota, que al rebotar se eleva a los 3/5 de la altura de caída. ¿Qué altura alcanza después del tercer rebote?

A) 18 B) 21 C) 25 D) 27 E) 42

Resolución:

Después del 1^{er} rebote : $\frac{3}{5}$ de $125 = 75\ m.$

Después del 2^{do} rebote : $\frac{3}{5} \cdot 75 = 45\ m.$

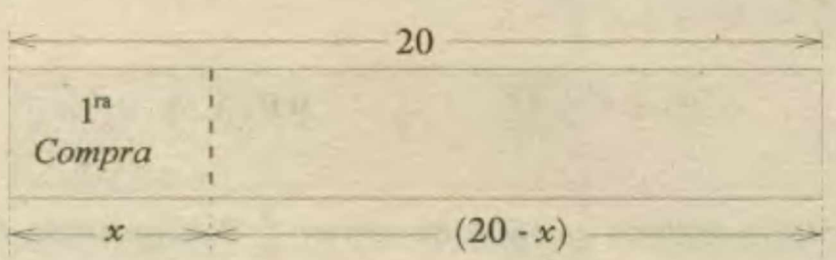
Después del 3^{ro} rebote : $\frac{3}{5} \cdot 45 =$ **$27\ m.$** RPTA. D.

23.- Una señora compró parte de una tela de 20 metros de largo y necesi tando después otra parte igual, compró los 2/3 de lo que quedaba. ¿Cuántos metros ha comprado?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 18 E) N.A

Resolución:

A partir de los datos elaboraremos un gráfico en donde la primera compra será representada por x metros :



La 2^{da} compra fue $\frac{2}{3}$ de lo que quedaba, es decir : $\frac{2}{3}(20 - x)$

Por condición del problema, esta compra fue igual a la 1^{ra} , por ello planteamos :

$$\frac{2}{3}(20 - x) = x$$

Resolviendo, se tiene : $40 - 2x = 3x \Rightarrow x = 8.$

Si en cada compra llevó 8 *metros*, en total llevó : 8 + 8 = **16 *metros*** **RPTA. C**

24.- Una persona recibió viáticos por cuatro días. El primer día gastó la quinta parte, el segundo gastó $\frac{1}{8}$ del resto; el tercer día gastó los $\frac{5}{3}$ del primer día; el cuarto día el doble del segundo día y aún le quedó 30 soles. ¿Cuál fue la cantidad entregada?

A) 100 soles B) 150 soles C) 300 soles D) 90 soles E) 180 soles

<u>Resolución</u>:

Sea la cantidad entregada : x

1er día : gastó $\frac{1}{5}x$, entonces le quedó : $\frac{4}{5}x$

2do día : gastó $\frac{1}{8}$ del 1er día = $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5}x$, entonces le quedó : $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{5}x$

3er día : gastó $\frac{5}{3}$ del 1er día = $\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5}x$

4to día : gastó 2 (2do día) = $2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5}x$

Como le sobró 30, se puede plantear : $x = \frac{1}{5}x + \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5}x + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5}x + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5}x + 30x$

Efectuando, se tiene : $x = \frac{x}{5} + \frac{x}{10} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 30$

Resolviendo encontramos que : $\mathbf{x = 180}$ **RPTA. E**

25.- Dos cilindros contienen un total de 688 galones de aceite. Si se saca $\frac{1}{4}$ del contenido del primero y $\frac{2}{5}$ del segundo, quedan 30 galones más en el primero que en el segundo. ¿Cuántos galones hay en cada cilindro.

A) 288 y 400 B) 328 y 360 C) 368 y 320 D) 210 y 478 E) 250 y 438

<u>Resolución</u>:

Sean x , e , y las capacidades de los cilindros; luego, por condición del problema se tiene:

$$\begin{cases} x + y = 688 \\ \frac{3}{4}x - \frac{3}{5}y = 30 \end{cases}$$

Resolviendo, encontramos : $\mathbf{x = 328 \ , \ y = 360}$ **RPTA. B**

26.- Si gastara los $\frac{2}{5}$ de lo que tengo y diera una limosna de S/. 36 me quedarían $\frac{3}{7}$ de lo que tengo. ¿Cuánto tengo?

A) 1260 *B) 72* *C) 66* *D) 420* *E) 210*

<u>Resolución</u>:

Lo que tengo es : x

Gasto $\frac{2}{5}$ y doy una limosna de 36 :......... $\frac{2}{3}x + 36$

Me quedarían los $\frac{3}{7}$ de lo que tengo : $\frac{3}{7}x$

Todo esto se relaciona así : $x - \left(\frac{2}{5}x + 36\right) = \frac{3}{7}x$

Cuya solución es : $x = 210$ **RPTA. E**

27.- ¿Cuál es la cantidad que debemos sumar a la fracción : $f = \dfrac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)}$;

para que sea equivalente a : $\frac{1414}{3535}$?

A) 1/2 *B) 1/3* *C) 1/4* *D) 1/5* *E) N.A.*

<u>Resolución</u>:

Efectuamos para obtener la forma más simple de f : $f = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{6}{2}} = \frac{1}{15}$

Entonces, si x es lo que le falta a f : $\frac{1}{15} + x = \frac{1414}{3535}$

Hallamos : $x = \frac{1}{3}$ **RPTA. B**

28.- ¿Cuánto le debemos quitar a los 2/3 de los 5/7 de los 6/5 de los 3/4 de 21 para que sea igual a la mitad de 1/3 de 2/5 de 3/4 de 40?.

A) 5 *B) 6* *C) 7* *D) 8* *E) 9*

<u>Resolución</u>:

1^ro^) Los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{5}{7}$ de los $\frac{6}{5}$ de los $\frac{3}{4}$ de 21 : $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot 21 = 9$

2do) La mitad de $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$ de 40 : $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot 40 = 2$

Debemos quitarle : $9 - 2 = 7$ **RPTA. C**

29.- Ordenar las fracciones de mayor a menor : $\frac{2}{5}, \frac{7}{3}, \frac{13}{19}, \frac{1}{2}$

A) $\frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{13}{19}; \frac{7}{3}$ *B)* $\frac{2}{6}; \frac{1}{8}; \frac{12}{17}; \frac{1}{3}$ *C)* $\frac{3}{5}; \frac{2}{1}; \frac{19}{13}; \frac{3}{6}$

D) $\frac{1}{6}; \frac{3}{8}; \frac{10}{15}; \frac{2}{3}$ *E) N.A.*

Resolución:

1ro) Entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{2}$: $\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$, porque : $2 \cdot 2 < 5 \cdot 1$

2do) Entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{13}{19}$: $\frac{1}{2} < \frac{13}{19}$, porque : $1 \cdot 19 < 2 \cdot 13$

3ro) Además es obvio que $\frac{7}{3}$ es la mayor de todas, luego : $\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{13}{19} < \frac{7}{3}$

RPTA. A

30.- ¿En cuántos dieciséis avos es mayor 1/2 que 1/4?

A) $\frac{1}{16}$ *B)* $\frac{2}{16}$ *C)* $\frac{4}{16}$ *D)* $\frac{8}{16}$ *E) N.A.*

Resolución:

Convirtiendo cada fracción en dieciséis avos : $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 8}{2 \cdot 8} = \frac{8}{16}$

$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{4}{16}$

El exceso de una sobre la otra es : $\frac{8}{16} - \frac{4}{16} = \frac{4}{16}$ **RPTA. C**

31.- ¿Qué número debe agregarse a ambos términos de la fracción 3/7 para hacerla equivalente a 7/9?

A) 5 *B) 9* *C) 11* *D) 13* *E) 15*

Resolución:

Sea x el número, entonces : $\frac{3+x}{7+x} = \frac{7}{9}$

Luego : $27 + 9x = 49 + 7x$

$x = 11$ **RPTA. C**

32.- Los 4/6 de lo tuyo es lo de ella y los 9/12 de lo de ella es lo mio. ¿Qué parte de lo tuyo es lo mio?

A) 1/5 ***B) 1/4*** ***C) 1/3*** ***D) 1/2*** ***E) N.A.***

Resolución:

Lo tuyo : t ; lo de ella : e ; lo mio : m

$$\frac{4}{6}\,.\,t = e \quad ; \quad \frac{9}{12}\,.\,e = m$$

La parte de t, que representa m es :

$$\frac{m}{t} = \frac{\frac{9}{12}\,.\,e}{\frac{6}{4}\,.\,e} = \frac{9\cdot 4}{12\cdot 6} = \frac{1}{2}$$

RPTA. D

33.- Los 3/8 de un poste están pintados de rojo , 3/5 del resto de blanco y lo que queda de azul. ¿Cuál es la altura del poste, si dos metros están pintados de azul?

A) 2 ***B) 6*** ***C) 4*** ***D) 5*** ***E) 8***

Resolución:

Si x es la longitud del poste, tenemos estas longitudes :

De rojo : $\frac{3}{8}x$; de blanco : $\frac{3}{5}\,.\left(1-\frac{3}{8}\right)x$; de azul : 2

$$\frac{3}{8}x + \frac{3}{5}\,.\,\frac{5}{8}x + 2 = x$$

Resolviendo : $x = 8$ RPTA. E

34.- Hallar el número que aumentado en $3\frac{1}{4}$ nos da un resultado igual al que se obtiene si lo dividimos por $\frac{4}{11}$. Dar como respuesta los $\frac{14}{13}$ del número.

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución:

Sea x el número : $x + 3\frac{1}{4} = \dfrac{x}{\frac{4}{11}}$

$$x + \frac{13}{4} = \frac{11}{4}x$$

Resolviendo : $x = \frac{13}{7}$

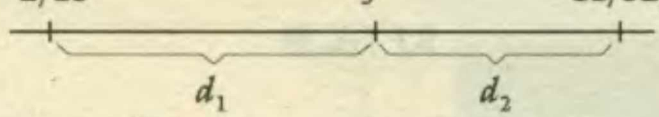
Los $\frac{14}{13}$ del número : $\frac{14}{13}\cdot\frac{13}{7} = 2$ RPTA. B

35.- Hallar la fracción ubicada entre 2/13 y 41/52 cuya distancia a la primera fracción sea el doble de la distancia a la segunda fracción; considerando dicha fracción, encontrar una fracción equivalente a ésta, tal que la suma de sus términos sea 410.

A) 140/250 ***B) 160/262*** ***C) 150/260*** ***D) 152/250*** ***E) N.A.***

<u>Resolución</u>:

Sea f la fracción del diagrama; planteamos :



$$d_1 = 2\ d_2$$

$$f - \frac{2}{13} = 2\,.\left(\frac{41}{52} - f\right)$$

Resolviendo : $f = \frac{15}{26}$ ó su equivalente : $f = \frac{15 \cdot k}{26 \cdot k}$

Se sabe que : $15\,k + 26\,k = 410$, de donde : $k = 10$

$\therefore$ la f equivalente es : $\frac{150}{260}$ **RPTA. C**

36.- Si $\frac{x}{36}$ es menor que $1\frac{2}{3}$, hallar cuántos valores toma "x", si se sabe que $\frac{x}{46}$ es impropia e irreductible.

A) 7 ***B) 5*** ***C) 9*** ***D) 2*** ***E) 8***

<u>Resolución</u>:

$\frac{x}{36} < 1\frac{2}{3}$; entonces $\frac{x}{36} < \frac{5}{3}$; y : $x < 60$ ...... (1)

Además $\frac{x}{46}$ es impropia, es decir : $x > 46$ ...... (2)

De (1) y (2) tenemos que : $x \in \{47 ; 48 ; .... ; 59\}$

Pero como la fracción debe ser irreductible, los valores de x serán :

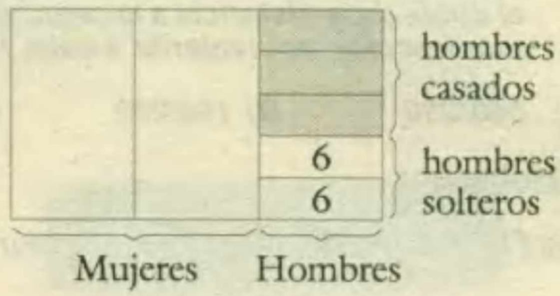
$\{47 ; 49 ; 51 ; 53 ; 55 ; 57 ; 59\}$ = 7 valores **RPTA. A**

37.- Los dos tercios de los profesores de un colegio son mujeres, doce de los varones son solteros, mientras que los 3/5 de los profesores hombres, son casados; el número total de profesores en este colegio es :

A) 60 ***B) 70*** ***C) 80*** ***D) 90*** ***E) N.A.***

Resolución:

Del diagrama, deducimos que el número de hombres es :



$$6 + 6 + 6 + 6 = 30$$

Y el de mujeres : $30 + 30 = 60$

El número total será : $30 + 60 =$ **90**

RPTA. D

38.- Jorge tiene cierto número de gallinas, al ser víctima de un robo pierde 2/9 del total, menos 5 gallinas; por otro lado, compra 37 gallinas y se percata que el número primitivo quedó aumentado en 1/6. ¿Cuántas gallinas le robaron?

A) 110 *B) 108* *C) 105* *D) 102* *E) 112*

Resolución:

Sea x el número de gallinas :

Después del robo tiene : $x - \left(\frac{2}{9}x - 5\right) = \frac{7}{9}x + 5$

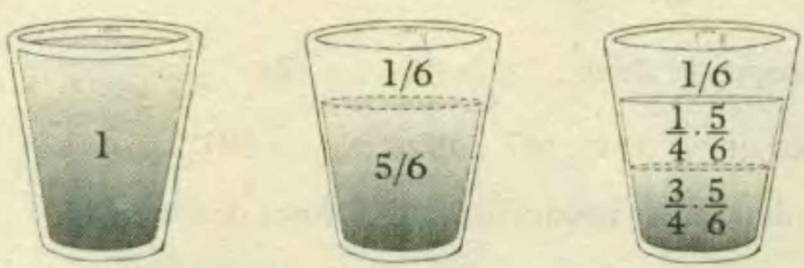
Luego de comprar 37 : $\frac{7}{9}x + 5 + 37 = x + \frac{1}{6}x$

Resolviendo : $x = 108$ **RPTA. B**

39.- Tengo un vaso lleno de vino, bebo la sexta parte, luego bebo 1/4 de lo que queda. ¿Qué fracción de lo que queda debo volver a beber para que aún sobren los 3/8 del vaso?.

A) 3/5 *B) 3/4* *C) 3/2* *D) 3/8* *E) N.A.*

Resolución:



vaso lleno — bebo la sexta parte — bebo 1/4 de lo que queda.

Al final hay $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{8}$ del vaso con agua.

Para que aún sobren $\frac{3}{8}$ debo beber una fracción f

Así : $f \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$; luego : $f = \frac{3}{5}$ RPTA. A

40.- Una persona gasta su dinero de la siguiente manera : Los 2/3 en alimentos; los 3/7 del resto en pasajes; los 8/35 del resto en ropa y lo que queda, que es 54 soles los ahorra; determinar qué cantidad de su dinero destina para los alimentos.

A) 243 *B) 244* *C) 245* *D) 252* *E) 255*

Resolución:

Sea x la cantidad inicial :

1ro) Gasta $\frac{2}{3}x$; queda $\frac{1}{3}x$

2do) Gasta $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3}x$; queda $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}x$

3ro) Gasta $\frac{8}{35} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}x$; queda $\frac{27}{35} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}x$

Por dato : $\frac{27}{35} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}x = 54 \Rightarrow x = 367{,}5$

En alimentos gasta : $\frac{2}{3}(367{,}5) = 245$ RPTA. C

41.- Al lavarse una tela, se observa que se encoge 1/3 de su longitud y asi mismo se estira 1/5 de su ancho. ¿Cuántos metros deben comprarse para que después de lavada se disponga de 240m², sabiendo que el ancho original es de 60cm?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución:

Longitud original : x ; ancho original : y

Después de lavada, el área de la tela es : $\left(1 - \frac{1}{3}\right)x \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right)y = 240$

Como : $y = 60 \Rightarrow \frac{2}{3}x \cdot \frac{6}{5} \cdot 60 = 240$

$x = 5$ RPTA. E

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL 1

1.- Dos tercios de 5/7 es igual a 6/11 de qué número?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{55}{63}$ C) $\frac{20}{77}$

D) $\frac{15}{58}$ E) $\frac{1}{10}$

2.- ¿Cuánto le sobra a 2/3 para ser igual a la diferencia entre 1/2 y 1/6?

A) 1/3 B) 1/4 C) 1/6

D) 1/12 E) 3/4

3.- ¿Cuántos décimos de 2/5 de 20 hay que sumarle a los 3/7 de 40, para obtener los 13/14 de 40?

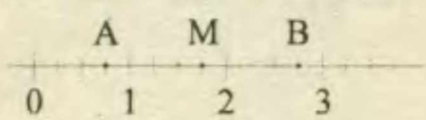
A) 5 B) 10 C) 15 D) 25 E) N.A

4.- ¿Qué número racional está comprendido entre a y b? Si $a = 7/30$ y $b = 0.25$

A) 0,233 B) 6/25 C) 11/50

D) 3/11 E) N.A

5.- Sobre la recta numérica se han marcado los puntos A, M y B. Donde M es el punto medio de $\overline{AB}$. ¿Cuál es la distancia entre los puntos medios de las dos mitades de $\overline{AB}$?



A) 1 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{9}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

6.- Ordenar en forma decreciente:

$$\frac{5}{12},\ \frac{4}{9},\ \frac{7}{13},\ \frac{3}{7}$$

A) $\frac{7}{13}, \frac{4}{9}, \frac{3}{7}, \frac{5}{12}$ B) $\frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{7}{13}, \frac{5}{12}$

C) $\frac{7}{13}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}, \frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{9}, \frac{7}{13}, \frac{7}{3}, \frac{5}{12}$

E) $\frac{7}{13}, \frac{5}{12}, \frac{4}{9}, \frac{3}{7}$

7.- Una fracción $\frac{a}{b}$, disminuida en sus $\frac{3}{5}$ da $\frac{3}{5}$. Si a y b no tienen factores comunes, entonces el valor $a + b$ es :

A) 11 B) 8 C) 5 D) 2 E) 9

8.- Lucho dispara 30 tiros al blanco y sólo acierta 20 tiros. ¿Qué fracción de sus tiros acierta? ¿Qué fracción de los que acierta no acierta?

A) $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2}$

9.- Un alumno tiene un cuaderno de 120 hojas. Si ocupa un $\frac{1}{3}$ de ellas en Química, $\frac{5}{12}$ en Matemática y el resto en Física. ¿Cuántas hojas ocupa para Física?

A) 20 B) 30 C) 60 D) 85 E) 90

10.- En cuatro *días* una persona recorre 120 *km*. Si a partir del segundo día avanza $\frac{1}{3}$ de lo recorrido el día anterior, entonces. ¿Cuántos *kilómetros* recorre el último día?

A) 81 B) 40 C) 27 D) 9 E) 3

11.- $\sqrt{\frac{3}{2}}$ excede a $\sqrt{\frac{3}{8}}$ en :

A) $\sqrt{\frac{3}{4}}$ B) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ C) $\sqrt{\frac{3}{8}}$

D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

12.- Efectuar : $\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}$

A) 2 B) 5 C) 4 D) 3 E) 1

13.- Hallar un número tal que $\frac{6}{7}$ de él exceden en 2 unidades a los $\frac{4}{5}$ del número.

A) 30 B) 28 C) 35 D) 40 E) 56

14.- Asumiendo que : $A = \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$,

$B = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)$;

hallar el valor de : $\sqrt{\frac{A}{B}} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\sqrt{3}$

NIVEL B

15.- Simplificar :

$$\frac{91}{52}+\frac{95}{76}+\frac{1339}{927}+\frac{1}{6}-\frac{148}{333}+\frac{85}{102}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16.- La forma más simple de la expresión :

$$E = 1-\frac{1}{1+\frac{x}{1-x}}+\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} \quad ; \text{ es :}$$

A) x B) $1+x$ C) $1-x$ D) 1 E) N.A

17.- Sumar a $\frac{1}{2}$ los $\frac{2}{3}$ de $4\frac{1}{5}$. Restar de esta suma la mitad de $\frac{3}{5}$. Multiplicar la diferencia por el resultado de sumar a $\frac{1}{4}$ los $\frac{5}{4}$ de $\frac{1}{3}$. El resultado final es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18.- Si a dos términos de una fracción se les suma el denominador y al resultado se le resta la fracción, resulta la misma fracción. ¿Cuál es esa fracción?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

19.- ¿Cuál es la fracción que sumada con su inversa da como resultado 2,1666...?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{5}{6}$

20.- Simplificar :

$$E = \frac{\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}}{\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}+\frac{1}{9\times10}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

21.- Un hombre tiene un vaso lleno de vino, bebe la cuarta parte, llena el vaso con agua y bebe 1/3. Vuelve a llenarlo con agua y bebe la mitad, finalmente, luego de llenarlo con agua toma el vaso compuesto ¿Cuánto vino ha tomado?

A) 1/4 de vaso D) 5/6 de vaso
B) 5/4 de vaso E) 1 vaso
C) 4/3 de vaso

22.- Un tanque tiene 24 *litros* de aceite. Se extraen los $\frac{3}{4}$; luego los $\frac{2}{3}$ del resto y por último 1 *litro*. ¿Cuántos *litros* quedan?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

23.- Perdí $\frac{3}{4}$ de lo que tenía. Si hubiera perdido los $\frac{2}{3}$ de lo que perdí, tendría 60 *soles* más de lo que tengo. ¿Cuánto tengo?

A) 40 B) 180 C) 30 D) 120 E) 60

24.- Para unir dos pueblos se construye un camino. Los 2/5 ya están terminados, el resto lo hacen dos contratistas: uno hace

5/9 de ese resto y el otro los 12 *km* finales. ¿Cuál es la distancia entre los pueblos?

A) 36 *km* B) 27 *km* C) 45 *km*

D) 24 *km* E) 18 *km*

25.- Dadas las fracciones :

$$\frac{87}{122}, \frac{95}{102}, \frac{101}{105}, \frac{95}{127}, \frac{99}{111}, \frac{95}{113};$$

hallar la suma de los denominadores de la mayor y la menor de estas fracciones.

A) 218 B) 224 C) 227 D) 216 E) 231

26.- ¿Cuál es la fracción que disminuida en sus 5/7 da 5/7?

A) 2/5 B) 5/2 C) 5/3 D) 3/5 E) 10/7

27.- ¿Cuánto se obtiene al aumentar 3/4 en los 3/4 de sus 3/4?

A) 75/64 B) 75/16 C) 75/4

D) 25/64 E) 27/64

28.- Si a los dos términos de la fracción 3/2 se les suma una cantidad "x" y a la nueva fracción se le resta "x" resulta la misma fracción. ¿Cuál es el valor de "x"?

A) 1/2 B) 3/2 C) 5/2 D) -5/2 E) -3/2

29.- ¿Cuántos valores puede tomar "n" si $n/24$ es una fracción propia y reductible mayor que 3/7?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

NIVEL C

30.- En un barco iban 300 personas. Ocurre un naufragio y de los sobrevivientes 1/8 y eran peruanos y 1/11 eran chilenos. De los muertos, 1/9 eran peruanos. ¿Cuántos peruanos iban en el barco?

A) 80 B) 45 C) 87 D) 18 E) N.A

31.- Dadas las expresiones :

$$A = \frac{1}{1\times3} + \frac{1}{3\times5} + \frac{1}{5\times7} + \frac{1}{7\times9}$$

$$B = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{4\times5} + \frac{1}{5\times6}$$

$$C = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)$$

$$D = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)(\ldots\ldots)\left(1+\frac{1}{97}\right)}$$

Hallar el valor de $\sqrt{A+B+C+D+\frac{5}{9}}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

32.- Hallar "a" si :

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{435} = 0.a$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

33.- De una pipa de vino se sacan 2/3 del contenido menos 40 *litros*. En una segunda operación se retiran 2/5 del resto y en una tercera operación se repite el vino sobrante de la pipa entre 168 personas, dándole 1/2 de litro a cada una. ¿Cuántos *litros* de vino había en la pipa?

A) 580 B) 300 C) 380 D) 450 E) 640

34.- Una pelota rebota 1/3 de la altura desde la cual es lanzada. Si parte de 18 *metros* de altura entonces la distancia total recorrida hasta detenerse es:

A) 24 B) 38 C) 36 D) 27 E) 30

35.- En una escuela de dos aulas hay 62 alumnos. Los $\frac{3}{4}$ de los alumnos de la primera están en el patio, así como también los $\frac{4}{5}$ de la segunda. Si hay la misma cantidad de alumnos de cada clase en el patio. ¿Cuántos alumnos hay en cada clase?

A) 24 y 38 B) 28 y 34 C) 32 y 30

D) 36 y 26 E) N.A.

36.- Se tiene una fracción irreductible decimal exacta cuyo producto de términos es 550. Hallar el numerador de la menor fracción posible que satisface estas condiciones.

A) 2 B) 5 C) 10 D) 11 E) 25

37.- José tenía cierta cantidad de dinero, luego gastó 1/2 de lo que no gastó; después no regaló 1/3 de lo que regaló; finalmente pagó una deuda de S/. 50 y le quedó S/. 30. ¿Cuánto tenía al inicio?

A) 240 B) 600 C) 960 D) 720 E) 480

38.- De un recipiente que contiene vino, no está lleno 2/5 de lo que esta lleno, se extrae 2/3 de lo que no se extrae; luego, no se elimina 1/2 de lo que se elimina, ¿Qué fracción de lo que había inicialmente quedó con vino?

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{4}{15}$ E) $\frac{2}{7}$

39.- Si de una urna extraemos los 2/5 de bolitas que hay y a las que quedan le aumentamos bolitas, resultaría que en la urna tendríamos los 3/4 de la cantidad inicial. ¿Cuál fue la cantidad inicial?

A) 18 B) 15 C) 12 D) 20 E) 24

40.- Se deja caer una pelota desde una cierta altura; calcular esta altura, sabiendo que en cada rebote alcanza los 3/4 de la altura anterior y que en el tercer rebote alcanza 27*cm*?

A) 32*cm* B) 48*cm* C) 64*cm*

D) 24*cm* E) 60*cm*

41.- Si se quita 4 al denominador de una fracción cuyo numerador es 3, la fracción aumentará en una unidad. ¿Cuál es la fracción?.

A) 3/4 B) 3/7 C) 3/5 D) 3/8 E) 3/6

42.- Edgar va de compras con cierta cantidad de dinero. En su primera compra gastó 1/5 de lo que tenía, más 8 soles; en su segunda compra gastó 1/4 de lo que le quedaba, más 3 soles; en la última compra gastó 1/3 del resto, más 6 soles; luego con 5 soles pagó el taxi y llegó a casa con sólo 7 soles. ¿Cuánto dinero tenía al inicio?.

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

43.- El costo de almacenaje diario en una aduana es 1/10 del valor de la mercadería; un comerciante retira al final de cada día 1/5 de la mercadería almacenada inicialmente. ¿Cuál es el valor total del almacenaje si la mercadería cuesta 200 soles?.

A) 40 B) 60 C) 48 D) 64 E) 80

44.- De un grupo de postulantes, ingresan a la universidad 3/4 de los que no ingresan, ¿Qué parte de los postulantes ingresan?

A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{2}{3}$

45.- Un alambre de x metros de longitud se divide en 3 partes, donde la parte mayor es la suma de las otras dos, siendo una de ellas la tercera parte de la otra. Con la parte mayor se repite la misma operación. ¿Qué parte de la longitud original representa la última parte menor obtenida?.

A) $\frac{x}{4}$ B) $\frac{x}{8}$ C) $\frac{3x}{4}$ D) $\frac{3x}{16}$ E) $\frac{x}{16}$

46.- Un elefante se dirige a beber agua de un estanque que no está totalmente lleno. El primer día consume 1/2 de lo que había, más 4 *litros*, el segundo día consume 1/2 de lo que quedaba, más 5 *litros*, el tercer día 1/2 de lo restante, más 6*litros*; sobrándole 6 litros. ¿Cuál es la capacidad del estanque si 1/5 de ésta excede a lo consumido el segundo día en 2 *litros*?.

A) 200 B) 180 C) 160 D) 120 E) 240

ACERCA DE FRACCIONES

Una fracción es sólo una parte de algo. Para mostrar qué tan grande o pequeña es una fracción se compara ésta con el número de partes necesarias para formar un todo.

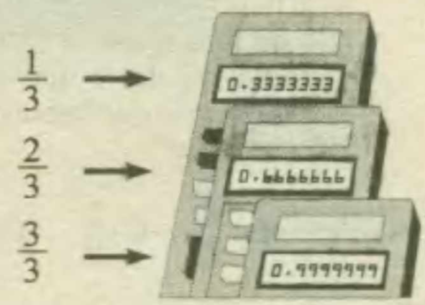
Fracciones Decimales :

El decimal equivalente de $\frac{1}{6}$ es 0,1666666. Este decimal es un sexto de 1, o sea $1 \div 6$; asimismo $\frac{1}{2}$ es 0,5 puesto que es $1 \div 2$.

Para pasar de fracciones comunes a fracciones decimales simplemente se divide lo de arriba entre lo de abajo. Para $\frac{1}{8}$ se divide 1 entre 8 y se obtiene 0,125. *¿Cómo puedes cambiar a decimal? ¿Podrías haber obtenido este resultado de otra forma, sabiendo ya qué forma decimal tenía $\frac{1}{8}$?*

En este punto, tal vez quieras encontrar los equivalentes decimales de algunas otras fracciones. Pero ten cuidado.......

.......¿Es cierto que tres tercios son iguales a 0,9999999.....?



¿Cuál es mayor?

A menudo es difícil saber cuándo una fracción es mayor que otra. Por ejemplo, ¿cuál es mayor : $\frac{2}{7}$ ó $\frac{3}{10}$? Si haces la conversión a decimales, la respuesta es clara... $\frac{2}{7} = 0,285714$; $\frac{3}{10} = 0,3$

Tres décimos es la fracción más grande.

Bueno, pero si no estás familiarizado con los decimales, ¡la respuesta puede no parecerte tan clara! Tendrías que saber porqué el decimal con más dígitos (0,285714) es menor que el decimal con menos dígitos (0,3). La idea del orden alfabético te ayudará a saber porqué : por ejemplo : *¿Por qué la palabra "Delicioso" está antes de "Domingo" en el diccionario?.*

¿Puedes poner las siguientes fracciones por orden de tamaño?

$\frac{7}{20}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{6205}{18264}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{41}{105}$ $\frac{207}{598}$

Suma de 1

Si se le suma 1 a los dígitos de una fracción. ¿Cómo cambia su tamaño?

Compara $\frac{3}{10}$ con $\frac{4}{10}$ · $\frac{3}{10}$ con $\frac{3}{11}$ · $\frac{3}{10}$ con $\frac{4}{11}$

¿Siempre ocurre lo mismo?

En medio

¿Puedes encontrar una fracción que esté entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$?. ¿Entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$? .... ¿Entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$?

***¿Puedes** encontrar siempre una fracción que **esté** entre otras dos fracciones?*

14 Porcentajes

I) TANTO POR CIENTO

El tanto por ciento es una manera de relacionar una parte con el todo. Su símbolo es %. Por ejemplo:

14% indica que por cada 100 unidades (todo) se consideran sólo 14 unidades (parte)

2,5% indica que por cada 100 unidades (todo) se consideran solo 2,5 unidades.

El % se asigna a cantidades numéricas del modo siguiente:

22% de 3 000 → Podemos establecer que por cada 100 se toman 22, luego por 3 000 se tomarán x, es decir se trata de una regla de tres:

$$\left.\begin{array}{rcl} 100 & \rightarrow & 22 \\ 3\,000 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \quad x = \frac{3\,000\ .\ 22}{100} = 660$$

II) FÓRMULA DEL TANTO POR CIENTO

En lugar de usar la regla de tres para calcular % se puede aplicar una fórmula directa, que da los mismos resultados que la regla de tres pero con mayor velocidad.

$$a\ \%\ \textbf{de}\ b = \frac{a}{\mathbf{100}} \times b$$

O sea que para hallar el a % de b, basta con dividir a entre 100 y multiplicar por b. Por ejemplo:

El 15% de $6 = \frac{15}{100} \times 6 = \frac{90}{100} = 0{,}90$

El 12% de $75 = \frac{12}{100} \times 75 = \frac{12}{4} \times 3 = 9$

El 0,3% de $4\,000 = \frac{0{,}3}{100} \times 4\,000 = 0{,}3 \times 40 = 12$

El $\frac{3}{4}$ % de $\frac{4}{3} = \frac{3/4}{100} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

III) FRACCIONES Y PORCENTAJES

La expresión $a\%$ representa una función, cuyo numerador es a y el denominador es 100, esto significa que se pueden expresar los porcentajes como números fraccionarios.

$$a\ \% = \frac{a}{100}$$

a) 25% de $32 = \frac{25}{100}$ de $32 = \frac{1}{4}$ de $32 = 8$

b) $33\frac{1}{3}\%$ de $60 = \frac{1}{3}$ de $60 = 20$

APLICACIONES

25% de $25 = \frac{1}{4}$ de $25 = 6{,}25$

$33\frac{1}{3}\%$ de $60 = \frac{1}{3}$ de $60 = 20$

25% de $33\frac{1}{3}\%$ de $180 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\ .180 = 15$

* Vemos que para hallar algunos % es preferible usar los equivalentes fraccionarios.

IV) DECIMALES Y PORCENTAJES

Sabemos que los decimales son números que pueden expresar como fracciones, luego si hemos visto que los porcentajes son fracciones, entonces los decimales se pueden usar para representar porcentajes.

Ejemplos:

$25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25$

$132\% = \frac{132}{100} = 1{,}32$

$2\% = \frac{2}{100} = 0{,}02$

En el siguiente cuadro se resumen las equivalencias entre porcentajes, fracciones y decimales que más se usan.

%	FRACCION	DECIMAL
50%	1/2	0,50
25%	1/4	0,25
75%	3/4	0,75
10%	1/10	0,10
20%	1/5	0,20
30%	3/10	0,30
40%	2/5	0,40
120%	6/5	1,20
150%	3/2	1,50

%	FRACCION	DECIMAL
60%	3/5	0,60
70%	7/10	0,70
80%	4/5	0,80
90%	9/10	0,90
5%	1/20	0,05
2%	1/50	0,02
$33\frac{1}{3}$ %	1/3	0,333...
$16\frac{2}{3}$ %	1/6	0,166...
1%	1/100	0,01

V) TANTO POR CUANTO

El *a* por *b* de una cantidad N, es otra cantidad X de la misma especie, tal que sea a la primera como *a* es *b*. Traducido esto a una proporción, nos da:

$$\frac{X}{N} = \frac{a}{b} \Rightarrow X = \frac{a}{b}(N)$$

Ejemplos :

1 por 10 significa 1 por cada 10 el cual es : $\frac{1}{10}$

3 por 7 significa 3 por cada 7 el cual es: $\frac{3}{7}$

Luego si aplicamos el tanto por cuanto a una cantidad sería.

$$a \text{ por } b \text{ de } N = \frac{a}{b}(N)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Los problemas sobre % se pueden clasificar en grupos diversos cuya solución se adapta a esquemas clásicos ó fórmulas preconcebidas, solo hay que reconocer la característica especial del problema que permite clasificarlo en el grupo pertinente.

I) CALCULO DE UN NUMERO CONOCIENDO PORCENTAJES RELACIONADOS CON DICHO NUMERO.

1.- El 9% de 45 es igual al 27% ¿de qué número?

A) 24 *B) 18* *C) 15* *D) 12* *E) 30*

Resolución:

Planteamos : El 9% de 45 es igual al 27% de x : $\frac{9}{100} \cdot 45 = \frac{27}{100} \cdot x$

$\therefore$ $x = 15$ RPTA.C

2.- ¿Cuál es la diferencia entre el 5% del 20% de 400 y el 0.5% del 10% de 2 000?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución:

Primero calculamos el 5% del 20% de 400 = $\frac{5}{100} \cdot \frac{20}{100} \cdot 400 = 4$

Luego el 0,5% del 10% de 2 000 = $\frac{0,5}{100} \times \frac{10}{100} \times 2\,000 = 2 \times 0,5 = 1$

La diferencia es : $4 - 1 =$ 3 RPTA.C

3.- Si A es el 10% de la suma de C y D; además C representa el 20% de la suma de A y D. El valor de $\frac{A}{C}$ es :

A) $\frac{12}{11}$ *B)* $\frac{6}{11}$ *C)* $\frac{6}{7}$ *D)* $\frac{11}{12}$ *E)* $\frac{11}{6}$ ***UNMSM 94***

Resolución:

$$A = \frac{10}{100}(C+D) \Rightarrow 10A = C + D \ldots (1)$$

$$C = \frac{20}{100}(A+D) \Rightarrow 5C = A + D \ldots (2)$$

De (1) y (2) : $10A - 5C = C - A$

$$11A = 6C \Rightarrow \frac{A}{C} = \frac{6}{11}$$ RPTA.B

4.- ¿Qué número disminuido en su $33\frac{1}{3}$ % da $33\frac{1}{3}$?

A) 100 B) 80 C) 60 D) 50 E) 33

Resolución:

Sea x el número : $x - 33\frac{1}{3}\%$ de $x = 33\frac{1}{3}$ .... (*)

Aquí conviene recordar que : $33\frac{1}{3}\% = 1/3$ y $33\frac{1}{3} = \frac{100}{3}$

Luego (*) quedaría así : $x - \frac{1}{3}.x = \frac{100}{3}$

$$\frac{2}{3}.x = \frac{100}{3}$$

$$x = 50$$ RPTA.D

II) CALCULO DE UN PORCENTAJE ASOCIADO A LA COMPARACION DE DOS O MAS CANTIDADES

5.- ¿ Qué % de 12 es 9 ?

A) 75% B) 60% C) 30% D) $66\frac{2}{3}$ % E) N.A

Resolución:

Podemos decir que : x% de 12 es 9.

O sea : $\frac{x}{100} . 12 = 9$

Y resolvemos : $x = 75$ RPTA.A

6.- Si S es el 150% de T. ¿Qué % de T es (S + T)?

A) 100% B) 150% C) 200% D) 250% E) 300% ***PUCP 95-I***

Resolución:

$S = 150\%$ de T ; x% de $T = S + T$

Combinando las dos igualdades tenemos : x % de T = 150% de T + T

$$\frac{x}{100} \cdot T = \frac{250}{100} \cdot T$$

$$x = 250$$ **RPTA.D**

7.- Si el 16% de A es igual al 25% de B ¿Qué % de A es B?

A) 32% ***B) 75%*** ***C) 50%*** ***D) 125%*** ***E) 64%***

Resolución:

16% de A = 25% de B

$$\frac{16}{100} \cdot A = \frac{25}{100} \cdot B$$

Dejamos B : $$B = \frac{16 \times \overset{4}{\cancel{100}}}{100 \times \underset{1}{\cancel{25}}} \cdot A = \frac{64}{100} A$$

Es decir, B es el 64% de A **RPTA.E**

8.- Si a "P" se le aumenta el 20% se obtiene "Q". ¿Qué % de "Q" es lo que se le aumentó a "P"?

A) $\frac{100}{14}$ % ***B)*** $\frac{100}{12}$ % ***C)*** $\frac{100}{6}$ % ***D)*** $\frac{100}{11}$ % ***E)*** $\frac{200}{9}$ %

Resolución:

P + 20% P = Q $\Rightarrow$ Q = 120% P .... (1)

A P se le aumentó 20% P ó $\frac{P}{5}$. Esto representa un x% de Q y podemos plantear :

$$x\% \text{ de } Q = \frac{P}{5} \quad .... (2)$$

(1) en (2) : $$x\% \text{ de } 120\% \text{ de } P = \frac{P}{5}$$

$$\frac{x}{100} \cdot \frac{120}{100} \cdot P = \frac{P}{5}$$

$$x = \frac{100}{6}$$ **RPTA.C**

III) SUMA DE PARTES QUE FORMAN UN TOTAL

9.- En una granja el 30% de gallinas es el 20% del número de conejos. Si sólo hay gallinas y conejos ¿Qué % del 80% del total es el número de gallinas?

A) 30%   *B) 50%*   *C) 40%*   *D) 60%*   *E) 25%*

Resolución:

Sea : g = # de gallinas ; c = # de conejos

El total : $g + c$

Dato : 30% de g = 20% de c $\Rightarrow$ $g = \frac{2}{3}c$ .... (α)

Luego : x% del 80% del total = # de gallinas .

$$\frac{x}{100} \cdot \frac{80}{100} \cdot (g + c) = g \text{ .... } (\beta)$$

Reemplazamos (α) en (β) para luego poder despejar x :

$$\frac{x}{100} \cdot \frac{80}{100} \cdot \left(\frac{5c}{3}\right) = \frac{2c}{3}$$

$x = 50$ RPTA.B

10.- Tenia 40 cuadernos. A mi amigo Julio le dí el 20% , a mi amigo Pedro el 30% y a mi hermana Julia el 40%. ¿ Cuantos cuadernos me quedan?

A) 6   *B) 4*   *C) 10*   *D) 8*   *E) 12*   ***UNMSM 96***

Resolución:

La suma de porcentajes debe ser 100%

$20\% + 30\% + 40\% + x\% = 100\% \Rightarrow x = 10\%$

Le queda el 10% de 40 o sea $\frac{10}{100} \cdot 40 = 4$ RPTA. B

11.- El costo de la mano de obra y las indemnizaciones suman el 40% del valor de una obra. Si las indemnizaciones representan el 60% del importe de la mano de obra. ¿Qué tanto % del valor de la obra importa solamente la mano de obra?

A) 20%   *B) 24%*   *C) 30%*   *D) 25%*   *E) 33,3%*   ***UNFV 88-I***

Resolución:

Mano de obra : m ; indemnizaciones : I ; obra : O

$m + I = 40\%$ de O ; $\qquad I = 60\%$ de m

Reemplazando la segunda relación en la primera obtenemos :

$m + 60\%$ de $m = 40\%$ de O

$$\frac{160}{100}m = \frac{40}{100} \text{ de O}$$

$$m = \frac{25}{100} \text{ de O} \Rightarrow \boxed{25\ \%} \qquad \text{RPTA.D}$$

12.- En un salón de clases el 70% de los alumnos son hombres. Si el 25% de las mujeres faltan, solo se cuentan 18 mujeres ¿Cuántos alumnos tiene el salón?

A) 80 B) 90 C) 96 D) 120 E) 60

Resolución:

\# de alumnos del salón : x

x → hombres : $\frac{70}{100}x$

x → mujeres : $\frac{30}{100}x$ → faltantes : 25% de $\left(\frac{30x}{100}\right)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ → asistentes : 18%

Del diagrama, planteamos : $\frac{30x}{100} = \frac{1}{4} \cdot \frac{30x}{100} + 18$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{40}x = 18 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 80} \qquad \text{RPTA. A}$$

13.- Una bolsa contiene bolas rojas, negras y blancas. El 20% son rojas, el 35% son negras y hay 36% bolas blancas. El número de bolas que contiene la bolsa es:

A) 70 B) 65 C) 80 D) 75 E) 90 UNMSM 93

Resolución:

Entre rojas y negras hay : $20\% + 35\% = 55\%$

Esto significa que el 45% restante deben ser blancas, que son 36 :

45% del total = 36

$$\frac{45}{100} \cdot x = 36 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 80} \qquad \text{RPTA. C}$$

IV) COMPRAS Y VENTAS

Cuando hay ganancia g : PV = PC + g

Cuando hay pérdida p : PV = PC - p

PV: precio de Venta; PC : precio de Costo

14.- ¿A cómo se debe vender lo que costó 60 soles para ganar el 60% del precio de costo?

A) 150 *B) 80* *C) 90* *D) 96* *E) 120*

Resolución:

Calculamos la ganancia : g = 60% de PC = 60% de 60 = 36

Luego : PV = PC + g = 60 + 36

PV = 96 RPTA. D

15.- ¿A cómo se debe vender lo que costó 60 soles para ganar el 60% del precio de Venta?

A) 150 *B) 80* *C) 90* *D) 96* *E) 120*

Resolución:

En la relación : PV = PC + g , sabemos que PC = 60 ; g = 60% de PV, entonces reemplazando:

PV = 60 + 60% PV

⇒ 40% PV = 60 ⇒ PV = 150 RPTA. A

16.- Un sastre vende dos camisas a 60 soles cada una. En una camisa gana 25% de lo que costó hacerla y en la otra pierde el 25% de su costo. ¿Ganó o perdió en la venta? ¿Cuánto?

A) ganó S/. 4 *B) ganó S/. 8* *C) perdió S/. 8*

D) perdió S/. 4 *E) no ganó ni perdió* *UNMSM 94*

Resolución:

Conviene interpretar 25% como la fracción equivalente a 1/4

1ª camisa: PV = PC + g

$$60 = x + \frac{1}{4}x \quad \Rightarrow \quad x = 48 \text{ ...... (costo de la 1ª)}$$

2^{a} camisa: PV = PC - P

$$60 = y - \frac{1}{4}y \quad \Rightarrow \quad y = 80 \text{ ...... (costo de la } 2^{a}\text{)}$$

El costo de las camisas : $x + y = 48 + 80 = 128$ *soles*

La Venta : $60 + 60 = 120$ *soles* no compensa los costos.

Hay una pérdida de : $128 - 120 =$ **8 *soles*** RPTA. C

17.- Un objeto fue vendido en 2 340 soles dejando una utilidad del 30%. ¿En cuánto debería venderse para ganar solamente el 20% sobre el costo?

A) 2 120 B) 2 160 C) 2 000 D) 1 980 E) 1 990

Resolución:

En ambos casos lo que no cambia es el costo (C)

$2\,340 = C + 0{,}30\,C$ ... (1)

$x = C + 0{,}20\,C$ ... (2)

De (1) hallamos C : $1{,}3\ C = 2\,340 \Rightarrow C = 1\,800$

Y reemplazando en (2) : $x = 1\,800 + 0{,}2\,(1\,800)$

$x = 2\,160$ RPTA. B

V) DESCUENTOS

18.- Por la compra de un televisor, una persona obtuvo un descuento del 20% sobre el precio del artefacto. Si hubiera comprado en la tienda vecina, habría obtenido un descuento del 30 % y habría ahorrado 10 dólares. ¿Cuál era el precio del televisor?

A) 200 B) 300 C) 400 D) 50 E) 100 UNFV 93

Resolución:

Sea x el precio del Televisor.

En la 1^{a} tienda el televisor fue vendido en 80% de x.

En la 2^{a} tienda se hubiera vendido en 70% de x y esto significaba un ahorro de 10 *dólares*, entonces :

$80\%\,x - 70\%\,x = 10$

$10\%\,x = 10 \Rightarrow x = 100$ RPTA. E

19.- Al precio de una tela se le hace un descuento del 20%, luego se hace otro descuento del 30% pagando por la tela 336 soles. ¿Cuál era el precio original de la tela?

A) 840 soles B) 650 soles C) 600 soles D) 800 soles E) N.A. PUCP 94 - II

Resolución:

Sea x el precio original.

1er descuento : 20% de $x = 0{,}2\,x$ $\Rightarrow$ precio rebajado $= 0{,}8\,x$

2do descuento : 30% de $(0{,}8\,x) = 0{,}24\,x$

El precio final : $0{,}8\,x - 0{,}24\,x = 336$

$$0{,}56\,x = 336$$

$$x = 600$$ RPTA. C

Otro Método

Los dos descuentos se pueden reducir a uno solo con la siguiente fórmula :

$$D = d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{100}$$

Como $d_1 = 20$; $d_2 = 30$ $\Rightarrow$ $D = 20 + 30 - \dfrac{20\times 30}{100} = 44$

Entonces $336 = (100 - 44)\%$ de x

$$336 = \frac{56}{100}\cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 600$$

20.- Hallar el descuento equivalente a dos descuentos sucesivos de 20% y 25%

A) 42% B) 36% C)55% D) 40% E) 45%

Resolución:

Con la fórmula : $D = 20 + 25 - \dfrac{20\times 25}{100}$

$$D = 45 - 5 = 40$$

El descuento equivalente es : 40 % RPTA. D

21.- A un trabajador le descontaron el 20% de su salario. ¿En qué % deben elevarle el nuevo salario para que vuelva a ganar como antes?

A) 20% B) 25% C) 40% D) 50% E) 22%

Resolución:

Si ganaba 100, luego del descuento ganará : 100 - 20 = 80

Para que recupere sus ingresos deben aumentarle 20

Pero en %, 20 qué porcentaje es de 80 ?

$$20 = x\,\%\text{ de }80 \quad \Rightarrow \quad 20 = \frac{x}{100}\cdot 80 \quad \Rightarrow \quad x = 25$$

Deben aumentarle el : **25 %** RPTA. B

V) VARIACIONES PORCENTUALES

Si cierta magnitud cambia de Valor, el cambio puede expresarse en % de la siguiente manera :

$$\%\,\Delta = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100\ \%$$

$\%\,\Delta$: Porcentaje de variación

V_i = valor inicial

V_f = valor final

22.- El precio de un artículo aumentó de 24 a 30 soles. ¿Cuál fue el % de aumento?

A) 10% *B) 60%* *C) 6%* *D) 25%* *E) 20%*

Resolución:

De los datos reconocemos que : $V_i = 24$; $V_f = 30$

$$\therefore\ \%\,\Delta = \frac{30-24}{24}\times 100 = 25\%$$ RPTA. D

23.- La población de una ciudad en 1980 era de 60 000 habitantes y en 1990 era de 72 000 habitantes. ¿Cuál fue el % de aumento en la población?

A) 10% *B) 30%* *C) 25%* *D) 40%* *E) 20%*

Resolución:

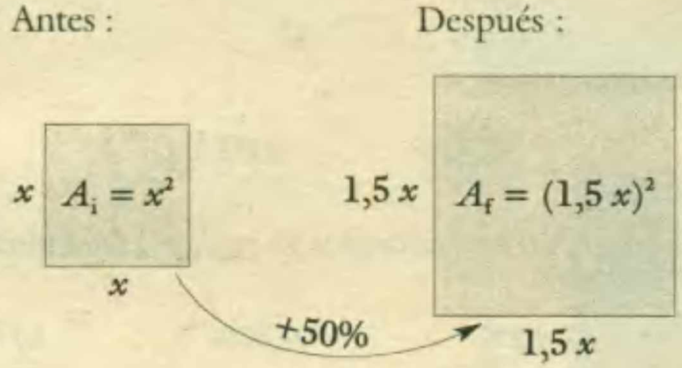
$V_i = 60\,000$; $V_f = 72\,000$

$$\%\,\Delta = \frac{72\,000-60\,000}{60\,000}\times 100 = \frac{12\,000}{60\,000}\times 100 = 20\ \%$$ RPTA. E

24.- En qué % se incrementará el área de un cuadrado si su lado aumenta en un 50%?

A) 50% *B) 150%* *C) 25%* *D) 125%* *E) N.A.* ***PUCP 92 - I***

Resolución:



Area inicial $= x^2$

Area final $= (1{,}5\,x)^2 = 2{,}25\,x^2$

Por fórmula : $\%\,\Delta = \dfrac{2{,}25x^2 - x^2}{x^2} \,.\, 100$

$\%\,\Delta = 125\%$ RPTA. D

25.- Un depósito de forma cilíndrica se desea cambiar por otro de la misma forma pero aumentado en 50% la longitud de la circunferencia de la base. ¿En qué % se incrementará el volumen del nuevo cilindro, respecto al primero?

A) 125% *B) 175%* *C)150%* *D) 225%* *E) 50%* ***UNMSM 91***

Resolución:

Si la circunferencia aumenta 50%, el radio también aumenta en 50%

Volumen inicial $= \pi\,(r)^2 \,.\, h$
Volumen final $= \pi\,(1{,}5r)^2 h$
} h no cambia

$$\%\,\Delta = \frac{\pi\,(1{,}5r)^2 h - \pi r^2 h}{\pi r^2 h} \times 100 = \frac{2{,}25-1}{1} \times 100$$

$\%\,\Delta = 125\,\%$ RPTA. A

26.- Se vende un lapicero en 680 soles perdiendo el 15% del costo. ¿A cómo debe venderse para ganar el 9%?

A) 827 *B) 782* *C)`872* *D) 724* *E) 836*

Resolución:

680 *soles* representa el : 100 - 15 = 85% del $\underbrace{\text{costo del lapicero}}_{x}$, luego se puede establecer que:

$$680 = \frac{85}{100} \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 800$$

Para ganar el 9% hay que venderlo en :

800 + 9% de 800 = 800 + 72 = **872** RPTA.C

27.- En una bolsa se tiene 20 lapiceros, 28 borradores y 32 reglas. ¿Qué tanto por ciento del total de artículos son borradores?

A) 35% *B) 30%* *C) 32%* *D) 36%* *E) N.A.*

Resolución:

El total de artículos es : 20 + 28 + 32 = 80

Los borradores son 28, que en porcentaje representan : $\frac{28}{80} \times 100\% =$ **35%**

RPTA. A

28.- El 25% del 60% del 70% de 200 es :

A) 20 *B) 21* *C) 22* *D) 23* *E) 24*

Resolución:

$$25\% \text{ del } 60\% \text{ del } 70\% \text{ de } 200 = \frac{25}{100} \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{70}{100} \cdot 200$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10} \cdot 200$$

$$= 21$$

RPTA. B

29.- Calcular el 7 por 10 del 5 por 13 del 2 por 5 de 260.

A) 25 *B) 26* *C) 27* *D) 28* *E) 29*

Resolución:

$$\text{El 7 por 10 del 5 por 13 del 2 por 5 de } 260 = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{2}{5} \cdot 260$$

$$= 7 \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 28$$

RPTA. D

30.- El 40% de los $\frac{3}{4}$ del 6% de 48 es los 0,012 de los $\frac{2}{3}$ de una cantidad; hallar el 25% de dicha cantidad.

A) 25 ***B) 26*** ***C) 27*** ***D) 28*** ***E) 29***

Resolución:

Sea x la cantidad, entonces : $\frac{40}{100} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{100} \cdot 48 = \frac{12}{1000} \cdot \frac{2}{3} \cdot x$

$$\therefore \quad x = 108$$

El 25% de 108 : $\frac{25}{100} \cdot 108 = \boxed{27}$ **RPTA. C**

31.- ¿Qué porcentaje representa la cantidad de números primos entre 1 y 50 respecto de los números compuestos, comprendidos en dicho intervalo?

A) $42,\widehat{42}$ ***B) $45,\widehat{45}$*** ***C) $45,\widehat{44}$*** ***D) $43,\widehat{45}$*** ***E) N.A.***

Resolución:

Son 48 números entre 1 y 50 : {2 ; 3 ; 4 ; 5 ; .... ; 49 }

De éstos, 15 son primos : {2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47}

Y el resto : 48 - 15 = 33 , son compuestos.

Parte →	15	primos
Base →	33	compuestos

En % : $\frac{15}{33} \cdot 100 = \boxed{45,\widehat{45}\ \%}$

RPTA. B

32.- En una jaula se encuentran 80 perros y 120 gatos. ¿Cuántos gatos escaparon si el porcentaje de perros aumentó en 40%?

A) 100 ***B) 200*** ***C) 300*** ***D) 400*** ***E) N.A.***

Resolución:

Antes :

80 perros	→ 40%
120 gatos	→ 60%
200 animales	→ 100%

Después :

80 perros	→ 40 + 40 = 80%
x gatos	→ 20%
Total	→ 100%

Del 2do diagrama : 80 .... 80%
x 20%

Obtenemos : $x = \dfrac{80 \cdot 20}{80} = 20$ gatos.

Entonces, se escaparon : 120 - 20 = **100** RPTA. A

33.- En un recipiente hay una cantidad desconocida de esferitas, de las cuales el 75% son de color rojo y las demás son blancas. Si se triplica las blancas y se disminuye en 20% a las rojas, ¿Cuál es el porcentaje de las blancas respecto al total?

A) $53,\bar{5}$ % ***B) $50,\bar{5}$ %*** ***C) $58,\bar{5}$ %*** ***D) $55,\bar{5}$ %*** ***E) N.A.***

Resolución:

Asumiendo 100 bolitas inicialmente, la información queda anotada en el siguiente diagrama, donde :

75 - 20% = 80% de 75 = 60

Ahora, finalmente el % de blancas es :

$\dfrac{75}{135} \cdot 100\% =$ **$55,\bar{5}$ %**

	Antes :	Después :
Rojas	75 $\xrightarrow{-20\%}$	60
Blancas	25 $\xrightarrow{\times 3}$	75
	100	135

RPTA. D

34.- Si el radio y la altura de un cilindro aumentan en 20% respectivamente, ¿Qué porcentaje aumentará el volumen del cilindro?

A) 72,3% ***B) 35,2%*** ***C) 55,8%*** ***D) 24,5%*** ***E) 72,8%***

Resolución:

Partimos de estos dos valores iniciales : radio = 10 ; altura = 10

Volumen inicial = $\pi \cdot 10^2 \cdot 10 = 1\,000\,\pi$

Luego de los aumentos las nuevas medidas serán : radio = 12 ; altura = 12

Volumen final = $\pi \cdot 12^2 \cdot 12 = 1\,728\,\pi$

El aumento es de : $1\,728 - 1\,000 \div 1\,000 = 0,728 =$ **72,8%** RPTA. E

35.- Se vende un objeto de 10 dólares, ganando el 5% del precio del costo. ¿Qué tanto por ciento se hubiese ganado si se hubiese vendido en 12 dólares?

A) 25% ***B) 30%*** ***C) 26%*** ***D) 28%*** ***E) N.A.***

Resolución:

De los datos : $(100+5)\%\ PC = 10$

$(100+x)\%\ PC = 12$

Donde x es el tanto por ciento de ganancia cuando se vende a 12.

Resolviendo : $\dfrac{105}{100+x} = \dfrac{10}{12} \Rightarrow x = 26\%$ RPTA. C

36.- ¿Cuál es el descuento equivalente a 3 descuentos sucesivos de 20% ; 25% y 30%?

A) 55% B) 52% C) 60% D) 58% E) 59%

Resolución:

Suponiendo 100 inicialmente :

1ro) 20% menos : 80% de 100 = 0.8 (100) = 80

2do) 25% menos : 75% de 80 = (0,75) (80) = 60

3ro) 30% menos : 70% de 60 = (0,7) (60) = 42

El valor final es 42, y el descuento equivalente :

100 - 42 = 58 ; es decir : 58% RPTA. D

37.- Se vende los 2/5 de un lote de cemento ganando el 25% de su precio de costo. El resto se vende con una perdida del 10% de su precio de costo. ¿Qué tanto por ciento del costo total se ganó o se perdió al final?

A) 5% B) 4% C) 3% D) 2% E) 1%

Resolución:

1ro) Se vende $\frac{2}{5}$, ganando el 25% : $\frac{2}{5}(1{,}25) = 0{,}5$

2do) Se vende el resto $\left(\frac{3}{5}\right)$ perdiendo 10% : $\frac{3}{5}(0{,}90) = 0{,}54$

Suma de ingresos : 0,5 + 0,54 = 1,04 = 104%

Se ganó el : 4 % RPTA. B

38.- En una tienda se vende bolsas de caramelos; el 20% se vendió perdiendo el 50%, la tercera parte ganando el 20% y en lo que resta no ganó ni perdió. Al final resultó perdiendo 50 soles. ¿Cuánto le costó todas las bolsas de caramelos?

A) 1 350 B) 1 550 C) 1 500 D) 1 560 E) 1 552

Resolución:

1) Se vendió el 20% perdiendo 50% : $(0,20)\ (0,5) = 0,10$

2) Se vendió $\frac{1}{3}$ ganando el 20% : $\left(\frac{1}{3}\right) . (1,2) = 0,40$

3) Se vende el resto $\left(\frac{7}{15}\right)$ sin pérdida : $\left(\frac{7}{15}\right) . (1) = 0,4666.......$

Ingreso total $= 0,10 + 0,40 + 0,4\hat{6} = 0,9\hat{6}$

Se perdió : $1 - 0,9\hat{6} = 0,0\hat{3} = 3,\hat{3}\%$

$\left.\begin{array}{r}\text{Si el } 3,\hat{3}\% \text{ son 50 soles}\\ \text{el 100\% será } x\end{array}\right\}$ $x = 1\ 500$ **RPTA. C**

39.- Si la arista de un cubo aumenta en 10% ¿En qué % aumenta el volumen del cubo?

A) 33,3% *B) 33,1%* *C) 33,5%* *D) 33,8%* *E) 33,2%*

Resolución:

Sabemos que : Volumen del cubo $= (\text{arista})^3$

Si la arista mide 1, el volumen inicial es 1.

Si la arista mide 1,1; el volumen será : $(1,1)^3 = 1,331$

Es decir aumenta en $0,331 =$ **33,1 %** **RPTA. B**

40.- El radio de un círculo aumenta en un 20%, mientras que el lado de un triángulo equilátero aumenta en 10%; respecto al área de cada uno, ¿Cuál de ellos aumenta más y cuánto más que el otro en porcentaje?

A) 20% *B) 21%* *C) 22%* *D) 23%* *E) 24%*

Resolución:

1) Area del círculo $= \pi R^2$;

$A_i = \pi (1)^2$; $A_f = \pi (1,2)^2 = \pi (1,44)$

El aumento es de $0,44 = 44\%$

2) Area del Δ equilátero $= \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}$

$A_i = \dfrac{1^2\sqrt{3}}{4}$; $A_f = \dfrac{(1,1)^2\sqrt{3}}{4} = 1,21 . \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

El aumento es de 0,21 = 21%

3) En %, el círculo aumenta más que el Δ en : 44 - 21 = **23 %** RPTA. D

41.- Si se incrementa en un 60% la profundidad de una piscina circular, ¿Cuál sería el porcentaje en que hay que aumentar el radio de la piscina para que su volumen aumente en un 150%?

A) 25% *B) 26%* *C) 27%* *D) 28%* *E) 29%*

Resolución.-

Sabemos que : $V = (\pi R^2) \cdot (P)$

Donde : R = radio ; P = profundidad

Inicialmente : $V = \pi \cdot 1^2 \cdot 1$

Finalmente : $V + 150\% V = \pi (R^1)^2 \cdot (1,6)$

De donde : $R^1 = 1,25$

Siendo R = 1 , el aumento es de 0,25 = **25 %** RPTA. A

42.- Una persona compró un artefacto, cuyo valor es de 2 000 nuevos soles. Le hicieron un descuento del 20% y luego otro descuento de 10% sobre lo ya descontado. ¿Cuánto pago?

A) 1500 *B) 1 560* *C) 1 440* *D) 1 400* *E) N.A.*

Resolución.-

Obtenemos el descuento equivalente :

$$D.E. = 20 + 10 - \frac{20 \times 10}{2} = 28\%$$

Quiere decir que pagó 100 - 28 = 72% del precio original

Pagó : 72% de 2 000 : **1 440** RPTA. C

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- ¿8% de 36 es 72% de qué número?

A) 2,06 B) 2,88 C) 3,24 D) 4 E) 40

2.- ¿Cuál es el valor de n después de ser disminuido en $16\frac{2}{3}\%$?

A) $\frac{1}{6}n$ B) $\frac{1}{3}n$ C) $\frac{5}{6}n$ D) $\frac{6}{7}n$ E) $\frac{7}{6}n$

3.- En una clase de 80, el 25% son niñas. Si el 10% de los niños y el 20% de las niñas salen de paseo. ¿Qué % de la clase salió de paseo?

A) 10% B) 12% C) $12\frac{1}{2}\%$

D) 20% E) 30%

4.- 60 es el $83\frac{1}{3}\%$ de qué número?

A) 96 B) 81 C) 72 D) 84 E) 48

5.- $\frac{1}{4}$ de 8 qué % es de $\frac{1}{2}$ de 32?

A) 400% B) $12\frac{1}{2}\%$ C) 250%

D) $2\frac{1}{2}\%$ E) 40%

6.- ¿Cuál de estas cantidades es mayor?

$$12\frac{1}{2}\% \ ; \ 0,33 \ ; \ \frac{3}{10} \ ; \ \frac{51}{4}\%$$

A) $12\frac{1}{2}\%$ B) 0,33 C) $\frac{3}{10}$

D) $\frac{51}{4}\%$ E) N.A.

7.- Un comerciante vendió un lote de tela por 9 600 *soles* ganando el 20% del costo. Si por cada metro ganó 20 *soles*. ¿Cuántos metros negoció?

A) 64 B) 80 C) 120 D) 72 E) 96

8.- ¿Cuál es el porcentaje único de descuento que equivale a 2 descuentos sucesivos de 10% y 20%?

A) $33\frac{1}{3}\%$ B) 28% C) 32%

D) 36% E) 30%

9.- Una persona compró un artículo con el 10% de descuento. Si luego le hacen el 5% de descuento sobre el resto y al final sólo pagó 171 *soles* ¿Cuál fue el precio original del artículo?

A) 300 B) 250 C) 200 D) 450 E) 400

10.- Si "x" aumenta en el 20% de su valor y "z" disminuye en el 40% de su valor, entonces el producto $x.z$:

A) aumenta en 20%

B) disminuye en 20%

C) disminuye en 28%

D) disminuye en 60%

E) N.A.

11.- Si el 20% del 30% de un número es 40 ¿Cuál es el 60% del número?

A) 420 B) 400 C) 480 D) 500 E) 600

12.- De un granero, el 40% es arroz; si se ha vendido el 15% del arroz ¿En qué porcentaje disminuye el granero?

A) 55% B) 15% C) 25%

D) 6% E) 5%

13.- Tengo 2 000 *soles*; si gastara el 20% de lo que tengo y ganara el 20% de lo que me quedaría ¿Cuánto tendría?

A) 2 00 B) 2 100 C) 1 980

D) 1 900 E) 1 920

14.- Hallar el descuento equivalente a dos descuentos sucesivos de 5% y 20%.

A) 24% B) 22% C) 25%

D) 22,5% E) 30%

15.- Al vender un reloj en 60 *soles* estoy perdiendo el $33\frac{1}{3}$ % de lo que me costó ¿Cuánto me costó?

A) $66\frac{2}{3}$ B) 100 C) 90

D) 120 E) $93\frac{1}{3}$

16.- Una señora paga 192 *soles* por 3 *metros* de tela cuyo precio por metro es de 80 *soles*. ¿Qué descuento ha recibido?

A) 80% B) 20% C) 25%

D) 5% E) 49%

NIVEL B

17.- Si el a% de 300 es b, y el b% de 30 es 27. ¿Cuál es el valor de a?

A) 90 B) 70 C) 50 D) 25 E) 30

18.- El $(a + b)$% de a es 35 y el a% de 40 es b. Hallar $a - b$

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

19.- Un almacén tiene 20% de telas, 40% de ropa y el resto de víveres. Si se consume la mitad de los víveres y el 10% de la ropa, el almacén disminuye en:

A) 34% B) 30% C) 26%

D) 24% E) 18%

20.- ¿Qué número aumentado en su $5\frac{3}{4}$ % da como resultado 264?

A) 250 B) 240 C) 180 D) 300 E) 270

21.- ¿Qué % del triple del 30% de un número equivale al 18% de la mitad de dicho número?

A) 90% B) 10% C) 30%

D) $33\frac{1}{3}$% E) N.A.

22.- En una jaula hay 12 gallos que representan el 40% del total; el resto son gallinas. ¿Cuántas gallinas se deben sacrificar para que el % de gallinas resultante sea el que antes correspondía a los gallos?

A) 20 B) 10 C) 80 D) 40 E) 16

23.- ¿Qué precio se debe fijar a un artículo cuyo costo es 75 *soles* sabiendo que se va a hacer una rebaja del 20% y aún así se ganará el 60% del costo?

A) 150 B) 90 C) 120 D) 160 E) 180

24.- Después de aplicar dos descuentos sucesivos de 20% cada uno. ¿En qué % debe aumentarse el valor rebajado para obtener el valor original?

A) 66,4% B) 44,25% C) 56,25%

D) 12,5% E) 62,5%

25.- Si x aumenta en 20%. ¿En qué % aumenta x^2?

A) 36% B) 40% C) 44%

D) 21% E) Ninguna.

26.- Un comerciante compra 2 750 lápices por 1 000 *soles*, pero salen 350 fallados y vende el resto a 7 *soles* la docena. ¿Cuál es el % de ganancia?

A) 10% B) 20% C) 30%
D) 40% E) 50%

27.- ¿A cuántos sextos equivale : $66\frac{2}{3}$ %?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

28.- Si $x = 4y$; $y = 2z$, ¿Qué porcentaje es "z" de "x"?

A) 12,5% B) 25% C) 50%
D) 75% E) 30%

29.- De un tonel de vino se extraen, primero el 20% y luego el 25% de lo que queda. ¿Qué porcentaje del total se extrajo?

A) 45% B) 40% C) 38%
D) 35% E) 30%

30.- Si : I) A es el 21 por mil de 800
II) B es el 7 por seis de 132
III) C es el 5/7% de 3 500

Luego, es falso que :

A) A < B D) 2A + 5C > B
B) B > A > C E) B > C > A
C) A + C < B

31.- ¿Qué porcentaje del tres por siete del cinco por veinte del inverso de 7/2, es el dos por 49 del cuatro por cinco del triple de la mitad de $\frac{1}{4}$?

A) 10% B) 5% C) 40% D) 25% E) 20%

NIVEL C

32.- ¿Qué % habrá que disminuir a un número para que sea igual al 60% del 80% del 75% del 90% del $83\frac{1}{3}$ % del doble del número?

A) 46% B) 64% C) 34%
D) 12% E) 28%

33.- A aumenta en 20% y se obtiene B, luego B disminuye en 20% y se obtiene C. Si la diferencia positivia entre A y C es 8, ¿Cuánto vale B?

A) 200 B) 240 C) 250 D) 270 E) 300

34.- Dos objetos A y B se vendieron al mismo precio cada uno. En la venta de A se ganó el 20% del Costo y en B se perdió el 20% del Costo. La transacción total dió como resultado 100 *soles* de pérdida. Hallar el precio de venta.

A) 1 800 B) 1 500 C) 2 000
D) 1 200 E) N.A.

35.- En qué % debe disminuirse el lado de un cuadrado para que el área disminuya en 51%?

A) 20% B) 10% C) 30%
D) 25% E) 50%

36.- Se aplicó una evaluación a 70 alumnos (entre hombres y mujeres) y el 70% aprobaron. De las mujeres aprobaron el 80% y únicamente el 10% de los hombre. ¿Cuántas mujeres rindieron la evaluación?

A) 25 B) 15 C) 30 D) 60 E) 35

37.- Las pasas obtenidas al sacar una cierta cantidad de uvas pesan el 32% del peso total de las uvas. ¿Qué cantidad de uvas en *kg* tenemos que tomar para obtener 8 *kg* de pasas?

A) 32 B) 25 C) 16 D) 40 E) N.A.

38.- La cantidad de estudiantes en un centro de enseñanza, aumentando el mismo por ciento anualmente, creció en 3 años de 5 000 a 6 655 estudiantes. ¿En qué tanto por ciento aumentó anualmente el número de estudiantes?

A) 12,5% B) 25% C) 20%
D) 10% E) 15%

39.- En una reunión, el 40% son hombres y el resto son mujeres; después ingresan 70 hombres y salen 20 mujeres, entonces el número de hombres es el 60% del nuevo total. ¿Qué porcentàje del nuevo total de damas son las personas que ingresaron después?

A) 35% B) 25% C) 40%

D) 70% E) 50%

40.- En un corral hay pavos y gallinas; si el 30% de gallinas es el 20% del número de pavos. ¿Qué porcentaje del 80% del total es el número de pavos?

A) 80% B) 60% C) 75%

D) 54% E) 45%

41.- Tengo cierta cantidad de dinero, si el primer día gastó el 43% ; ¿Qué porcentaje de lo que me queda debo gastar el segundo día para que me quede el 28,5% del dinero original?

A) 20% B) 40% C) 25%

D) 30% E) 50%

42.- Si admitimos que un camión de carga sufre una depreciación del 7 por 70 cada año, de uso, respecto al precio que tuvo al comenzar cada año, y al cabo de 3 años su precio es 72 900 *soles*; entonces el costo original del camión fue :

A) 100*mil* B) 80*mil* C) 40*mil*

D) 120*mil* E) 200*mil*

43.- ¿A qué descuento único equivalen dos descuentos sucesivos del 20% y 40%, seguido de un aumento del 20% ?

A) 40% B) 20% C) 42%

D) 42,4% E) 36%

44.- El radio de un circulo aumenta en un 20%, luego decrece en un 50% ¿En qué porcentaje varía el área inicial?

A) 64% B) 44% C) 72%

D) 36% E) 75%

45.- ¿Qué tanto por ciento respecto al costo se ha ganado cuando se vende en 120 *soles* lo que ha costado 96 *soles*?

A) 15% B) 18% C) 20%

D) 24% E) 25%

46.- Una persona demora en llegar de un pueblo hacia su casa 4 días. El primer día recorre el 20% más 100*m* , el segundo día recorre la cuarta parte del resto, más 125*m*, el último día recorre el 25% del día anterior; hallar el recorrido total si el tercer día avanzó 800*m*.

A) 1000 B) 800 C) 1500

D) 1800 E) 2000

47.- Una tela al lavarse, se encoge el 10% en el ancho y el 20% en el largo; Si se sabe que la tela tiene 2*m* de ancho. ¿Qué longitud debe comprarse si se necesitan $36m^2$ de tela después de la lavada?.

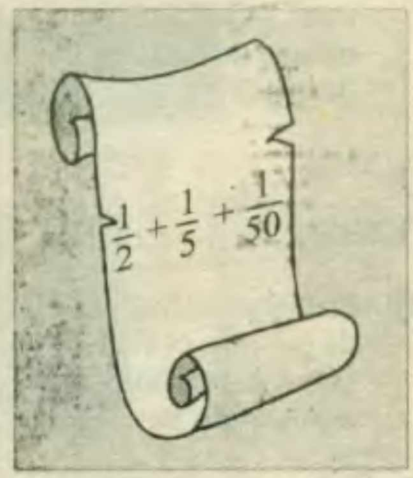
A) 20 B) 25 C) 30 D) 36 E) 40

48.- Una secretaria quiere comprar un equipo de sonido valorizado en S/.950; el vendedor le comunica que se le hará un descuento sucesivo del 10% , 20% y 25%; como su sueldo no le alcanzaba en ese momento, solicitó un aumento a su jefe, el cual le fue otorgado; se le hizo un aumento sucesivo a su sueldo del 10%, 20% y 25%, pero aún así le faltó S/.18 para comprar el equipo de sonido. ¿Cuál era el sueldo de la secretaria antes del aumento?

A) 100 B) 200 C) 300

D) 400 E) 500

EL PAPIRO DE RHIND



Nuestro conocimiento de cómo se usaron las fracciones en el antiguo Egipto proviene principalmente de un rollo de papiro llamado el "papiro de Rhind". Fue descubierto en Luxor en 1858 por Henry Rhind y ahora se encuentra en el Museo Británico de Londres. Al descifrar este papiro no sólo se tuvo una idea de cómo se usaron las fracciones en el antiguo Egipto, sino también los métodos que entonces se emplearon. El papiro de Rhind fue escrito por un escriba llamado Ahmes, aproximadamente en 1650 a.C. Parece que el papiro de Rhind es un escrito sobre matemáticas de un maestro para uso de sus alumnos. Quizás éstos fueran futuros escribas reales. Junto a problemas y ejercicios hay también algunos juegos.

Una cantidad y una cuarta parte de ella juntas son 15. ¿Cuánto es?

Ahmes, parece haber sido un buen maestro pues explica muy claramente cómo resolver problemas y era muy hábil para dar soluciones simples a problemas difíciles. Los jeroglíficos y escritos egipcios tenían una notación especial para las fracciones. Ahmes simplemente ponía un punto sobre el número. Por ejemplo, él habría escrito 20 como $\overline{\Delta}$ y $\frac{1}{20}$ como $\dot{\Delta}$. Con la excepción de $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ todas las fracciones egipcias se escribían como fracciones unitarias usando el punto.

Puesto que los egipcios sólo usaron fracciones unitarias no tenían forma de escribir una fracción tal como $\frac{3}{5}$. En vez de esto la expresaban como una suma de fracciones unitarias :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$$

¿Cómo traducirías la fracción que Ahmes escribiría como $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ *?*

En un cálculo sobre pirámides, Ahmes encontró que la respuesta es "7 veces $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$ "

¿Cómo escribirías esto?

Producto con las cifras en el mismo orden

Es bien sabido que muchas veces al ordenar los elementos de una colección, se supone que después el último vuelve a estar el primero, como en un corro. Estas ordenaciones circulares aparecen, por ejemplo, en la siguiente curiosidad numérica : Los seis primeros múltiplos de 142 857. Tomando este número como multiplicando, y por multiplicador cualquiera de los seis primeros dígitos, todos los productos tienen las mismas cifras que el multiplicando, y en el mismo orden. De modo que para hallar rápidamente uno cualquiera de esos múltiplos o productos, basta multiplicar sólo la cifras de las unidades (7), y luego, a partir de la que indique dicho producto, ir copiando las demás, en orden correlativo.

Ejemplo : 142 857 × 4 : Como el producto de las unidades termina en 8, será 571 428; 142 857 × 6 : Terminando en 2 el producto, será 857 142. Los resultados por 7, 8 y 9 no siguen la regla, pues el multiplicando carece de la cifra de las unidades que origina dicho producto.

15 Proporcionalidad

D) DEFINICIONES PRELIMINARES

Una RAZON es la comparación por cociente entre dos cantidades. La razón entre dos números a y b se escribe $a : b$ y es el cociente o fracción $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$.

$$a \div b = \frac{a}{b} = a : b$$

Ejemplos: 1) la razón de 6 a $9 = 6 : 9 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

2) la razón de $\frac{2}{3}$ a $\frac{4}{5} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2/3}{4/5} = \frac{5}{6}$

Una PROPORCION es la igualdad entre dos razones. Puede ser expresada de varias formas :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad ; \quad a : b = c : d \quad ; \quad a : b :: c : d$$

Los *cuatro elementos* de una proporción son llamados los *términos de la proporción*. Los términos a y d reciben el nombre de *extremos*; los términos b y c son los *medios*. En toda proporción se cumplen que el producto de los extremos es igual al producto de los medios. También se cumplen otras relaciones resumidas en este cuadro:

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **; se verifica que :**

1) $a.d = b.c$ 2) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ 3) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

4) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ 5) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ 6) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

Si dos variables x e y están relacionadas en la forma $y = kx$, se dice que y es DIRECTAMENTE PROPORCIONAL a x; siendo k la *constante de proporcionalidad*.

Si dos variables x e y se relacionan en la forma $y = \frac{k}{x}$, se dice que y es INVERSAMENTE PROPORCIONAL a x.

La proporcionalidad directa y la inversa son las principales pero existen otros tipos de proporcionalidad, por ejemplo:

1) Si y varía directamente con x^2, se tiene : $y = k \cdot x^2$

2) Si y varía conjuntamente con x y z, se tiene : $y = k \cdot x \cdot z$

3) Si y varía directamente con x^2 e inversamente con z : $y = k \cdot \frac{x^2}{z}$

En todos los casos la constante k está determinada si se conoce un conjunto de valores de las variables.

II) REGLA DE TRES SIMPLE

La regla de tres simple tiene por objeto la resolución del siguiente problema general.

Conocidos dos valores de dos magnitudes directa o inversamente proporcionales, determinar el valor de una de ellas, correspondiente a un nuevo valor dado a la otra.

La regla de tres se llama **directa** cuando las cantidades que se comparan son directamente proporcionales. Esto suele representarse en forma ordenada, del siguiente modo.

MAGNITUDES :	A	B
1ros Valores	a_1	b_1
2dos Valores	a_2	x_1

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{x} \quad ó \quad x = a_2 \cdot \frac{b_1}{a_1}$$

La regla de tres se llama **inversa** cuando las cantidades que se comparan son inversamente proporcionales.

$$\left.\begin{matrix} a_1 \;......\; b_1 \\ a_2 \;......\; x \end{matrix}\right\} a_1 . b_1 = a_2 . x \;\; ; \;\; ó \;\; ; \;\; x = \frac{a_1 . b_1}{a_2}$$

III) REGLA DE TRES COMPUESTA

Es una ampliación de la regla de tres simple al caso de más de dos magnitudes. Sean A, B, C, D las magnitudes consideradas de las que conocemos los valores correspondientes a_1, b_1, c_1, d_1 ; se trata de determinar el valor x de A correlativo a la nueva serie de valores b_2 , c_2 y d_2 de las demás. Supongamos que por un reconocimiento previo sabemos que A es directamente proporcional a B y C e inversamente proporcional a D, entonces dispondremos los datos del siguiente modo :

MAGNITUDES	A	B	C	D
1ª serie de Valores	a_1	b_1	c_1	d_1
2ª serie de Valores	x	b_2	c_2	d_2

El valor de la incógnita se obtendrá multiplicando el valor conocido de la especie de la incógnita por las razones directas de los nuevos valores a los primitivos, si las cantidades son directamente proporcionales con la incógnita y por las razones inversas de dichos nuevos valores a los primitivos si la proporcionalidad es inversa.

$$x = a_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{d_1}{d_2}$$

- $\frac{d_1}{d_2}$: D inversamente proporcional con A
- $\frac{c_2}{c_1}$: C directamente proporcional con A
- $\frac{b_2}{b_1}$: B directamente proporcional con A
- a_1: Valor conocido de A

Ejemplos:

20 obreros construyen 3 zanjas de 18 *metros* en 27 días.

15 obreros construyen 4 zanjas de 36 *metros* en x días.

Reconocida la proporcionalidad inversa de obreros a días y directa entre zanjas y días, lo mismo que entre metros y días, tenemos:

$$x = 27 \cdot \frac{20}{15} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{36}{18} = 96$$

PROBLEMAS RESUELTOS

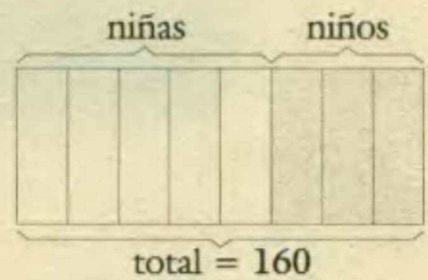
I. SOBRE RAZONES

1.- En un campamento para niños y niñas, la razón de niñas a niños es 5:3. Si el total es 160 entre niños y niñas. ¿Cuántos son niños?

A) 20 *B) 36* *C) 45* *D) 60* *E) 100*

Resolución:

Si una unidad se particiona en una razón de 5 : 3 significa que ella se ha dividido en 8 partes. Dividimos el total 160 en 8 partes, obtenemos que cada parte es :



$$\frac{160}{8} = 20$$

Como el número de niños está formado por 3 partes, será :

$3 \times 20 =$ **60** RPTA. D

2.- La razón entre 6 kilogramos y 30 gramos se puede escribir:

A) 2 : 1 *B) 6 : 30* *C) 1 : 5* *D) 20 : 1* *E) 200 : 1*

Resolución:

Se deben expresar las cantidades en las mismas unidades :

6 000 gramos : 30 gramos $= \frac{6\,000}{30} = \frac{200}{1} =$ **200 : 1** RPTA. E

3.- En una urna hay 160 bolas; por cada 3 bolas blancas hay 20 negras y 17 rojas. El número de bolas negras es:

A) 12 *B) 80* *C) 68* *D) 48* *E) 64* *UNMSM 90*

Resolución:

La relación entre blancas, negras y rojas es 3 : 20 : 17.

Podemos asumir que hay $3 + 20 + 17 = 40$ partes, de las cuales 20 corresponden a las negras, es decir la mitad del total, por lo tanto el número de negras es la mitad de 160, o sea :

80 RPTA. B

4.- La razón entre la suma de dos números y su diferencia es 5 : 3. El cociente del mayor entre el menor es :

A) 4 *B) 5* *C) 2* *D)* $\frac{1}{4}$ *E)* $\frac{1}{2}$ *UNMSM 84*

Resolución:

La suma más la diferencia dan $5 + 3 = 8$ partes.

Se sabe que la suma más la diferencia siempre es el doble del mayor, entonces si el doble del mayor es 8 partes, el mayor es 4 partes, luego el menor debe ser 1 parte (porque la suma es 5).

El cociente entre el mayor y el menor será $4 : 1 =$ **4** **RPTA. A**

II. SOBRE PROPORCIONES

5.- Un segmento de 30 centímetros se divide en dos partes cuyas longitudes están en la relación 2 : 3. Hallar la longitud de la parte mayor.

A) 12 *B) 18* *C) 16* *D) 21* *E) 15*

Resolución:

Sean x e y las longitudes, entonces : $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$

De la proporción anterior podemos escribir : $\frac{x+y}{y} = \frac{2+3}{3}$

Sabemos que $x + y$ es la longitud del segmento (30 *cm*), luego :

$$\frac{30}{y} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{30 \times 3}{5} = 18$$

"Puesto que y es la parte proporcional a 3, es la parte mayor " **RPTA. B**

6.- Un inspector de control de calidad examinó 200 focos y encontró 18 defectuosos. A esta razón ¿Cuántos focos defectuosos se espera encontrar en un lote de 5 000 focos?

A) 500 *B) 360* *C) 900* *D) 450* *E) 1 000*

Resolución:

La razón entre focos defectuosos y focos examinados es la misma, luego se puede plantear la proporción :

$$\frac{defectuosos}{total} = \frac{18}{200}$$

$$\frac{x}{5\,000} = \frac{18}{200} \quad \Rightarrow \quad x = 540$$

RPTA. D

7.- Lo que cobra y gasta un profesor suman 600. Lo que gasta y lo que cobra están en relación de 2 a 3. ¿En cuántos tienen que disminuir el gasto para que dicha relación sea de 3 a 5?

A) 16 B) 24 C) 32 D) 15 E) 20 UNMSM 95

Resolución:

Sea "x" lo que cobra ; e ; "y" lo que gasta.

Cuando el gasto disminuye en "z", lo que cobra y lo que gasta serán respectivamente "x" é "$y - z$".

Podemos plantear : $x + y = 600$; $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$; $\frac{y - z}{x} = \frac{3}{5}$

De las dos primeras se obtiene : $y = 240$; $x = 360$

En la 3ª ecuación : $\frac{240 - z}{360} = \frac{3}{5}$

resolvemos y hallamos : $z = 24$ RPTA. B

8.- En una escuela la razón de niños y de niñas es $\frac{7}{6}$. Si hay 2 600 alumnos en la escuela, el número de niños que excede al número de niñas es:

A) 150 B) 200 C) 400 D) 100 E) N.A. UNFV 90

Resolución:

x : número de niños ; y : número de niñas

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{x + y}{x - y} = \frac{13}{1}$$

Sabemos que $x + y = 2\,600$, luego : $\frac{2\,600}{x - y} = \frac{13}{1}$

De donde : $x - y = 200$ RPTA. B

9.- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{1}{k}$ y además $\frac{a + 1}{b + 2} = \frac{c + 3}{d + 6}$ el valor de k es :

A) 4 B) 6 C) 2 D) 3 E) 5 UNFV 88

Resolución:

De la 2ª igualdad : $ad + 6a + d + \cancel{6} = bc + 3b + 2c + \cancel{6}$

ad y bc se eliminan (son iguales): $6a + d = 3b + 2c$

Para continuar reemplazamos : $d = kc$; $b = ka$

Luego : $6a + kc = 3\,ka + 2c$

$$2\,(3a - c) = k\,(3a - c) \Rightarrow k = 2$$ RPTA. C

10.- A un obrero le ofrecen pagar anualmente 1 400 soles y una sortija. Al cabo de 8 meses es despedido y le pagan 900 soles más la sortija ¿Cuál es el valor de la sortija?

A) 500 *B) 200* *C) 300* *D) 400* *E) 100* *PUCP 94 - I*

Resolución:

Sea "x" el valor de la sortija : $\dfrac{1400 + x}{900 + x} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

$$2\,800 + 2x = 2\,700 + 3x$$

$$x = 100$$ RPTA. E

III. SOBRE PROPORCIONALIDAD

11.- Si y es directamente proporcional a x y vale 24 para x = 3; hallar el valor de y para x = 10.

A) 40 *B) 60* *C) 75* *D) 64* *E) 80*

Resolución:

La ecuación de proporcionalidad es : $y = kx$

Con los primeros datos hallamos k : $24 = k\,(3) \Rightarrow k = 8$

La ecuación es : $y = 8\,x$; luego cuando $x = 10$; $y = 80$ RPTA. E

12.- El precio de una casa es directamente proporcional al área e inversamente proporcional a la distancia de Lima. Si una casa ubicada a 75 km de Lima cuesta 45 000 soles ¿Cuánto costará una casa del mismo material si su área es el doble y se encuentra a 150 km de Lima?

A) 45 000 *B) 22 500* *C) 11 250* *D) 90 000* *E) 180 000* *PUCP 94 - I*

Resolución:

Precio : P ; área : A ; distancia : d

P es directamente proporcional a A e inversamente proporcional a d : $P = k.\,\dfrac{A}{d}$

Planteamos las dos relaciones que conocemos :

$$45\,000 = k\,.\,\frac{A}{75} \quad ; \quad P' = k\,.\,\frac{2A}{150} = k\,.\,\frac{A}{75}$$

Se deduce que : **P' = 45 000** RPTA. A

13.- Suponer que w varía conjuntamente con x, y^2, x^3. Si x se duplica, y se triplica, z se reduce a la mitad. ¿Qué le sucede a w?

A) Se hace 1,5 veces mayor ***D) Se mantiene constante***

B) Se hace 2,25 veces mayor ***D) No se puede precisar***

C) Se hace 0,5 veces mayor

Resolución:

La ecuación es : $w = k\,x\,y^2\,z^3$

Luego de los cambios : $w' = k\,(2x)\,(3y)^2\left(\frac{z}{2}\right)^3 = \frac{9}{4}\,k\,x\,y^2\,z^3$

Entonces : $w' = \frac{9}{4}\,w = \mathbf{2{,}25\,w}$ RPTA. B

14.- El número a es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número b. Si a = 5/7 cuando b = 49; ¿Cuál es el valor de b, si a = 1/4?

A) 250 ***B) 300*** ***C) 500*** ***D) 360*** ***E) 400*** ***UNMSM 93***

Resolución:

La ecuación es : $a = \frac{k}{\sqrt{b}}$ ó $a\sqrt{b}$ = cte.

Entonces : $\frac{5}{7}\cdot\sqrt{49} = \frac{1}{4}\sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{b} = 20$

$b = 400$ RPTA. E

15.- Un corredor pierde 920 gramos de su peso en agua por cada 8 km que corre. ¿Cuánto peso en agua perderá en una carrera de Maratón (42 km)?

A) 4,5 kg ***B) 4,83 kg*** ***C) 5,20 kg*** ***D) 5 600 g*** ***E) 4 160 g***

Resolución:

Asumiendo que el ritmo de pérdida de agua es constante, se puede plantear una regla de tres simple (directa).

Pierde 920 *g* .... 8 *km* de recorrido.

Perderá *x* .... 42 *km* de recorrido.

$x = \frac{920\,.\,42}{8} = 4\,830\,g = \mathbf{4{,}83\,kg}$ RPTA. B

16.- Un auto asciende 600 m por cada 3 km de recorrido. ¿Cuánto debe recorrer para ascender 75 m?

A) 375 m *B) 80 m* *C) 200 m* *D) 325 m* *E) 350 m* *UNMSM 91*

Resolución:

Planteamos la regla de tres simple :

Asciende 600 m .... recorre 3 000 m.

Asciende 75 m .... recorre x

$$x = \frac{75\ .\ 3\ 000}{600} = 375\ m$$ RPTA. A

17.- Un taxista compra 6 galones de gasolina al precio de 4,50 soles el galón. ¿Cuántos galones podrá comprar con la misma cantidad de dinero si la gasolina sube a 5,40 soles el galón?

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

Resolución:

Debemos plantear una regla de tres simple inversa porque al aumentar el precio por galón, disminuye la capacidad de compra.

Puede comprar 6 galones .... si c/ galón cuesta 4,50

Puede comprar x .... si c/ galón cuesta 5,40

Resolviendo: $x = \frac{6\ .\ 4,50}{5,40} = 5$ galones RPTA. D

18.- Un caballo atado con una soga de 3 metros de largo demora 5 días en comer el pasto que está a su alcance. Si la soga es de 6 metros. ¿En cuántos días comerá todo el pasto a su alcance?

A) 20 *B) 30* *C) 25* *D) 10* *E) 9* *UNMSM 90*

Resolución:

Cuando el enunciado se refiere al pasto que está a su alcance, debemos interpretar que se trata del área del círculo que se puede abarcar con un radio igual a la longitud de la soga. El número de días será entonces directamente proporcional a dicha área.

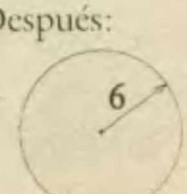
Días	Area
5	9π
x	36π

Antes:



Area = $\pi\ (3)^2$

Después:



Area = $\pi\ (6)^2$

$$x = \frac{5 \times 36\pi}{9\pi} = 20 \qquad \text{RPTA. A}$$

19.- Una guarnición de 400 soldados situados en un fuerte tienen víveres para 180 días. Si consumen 900 gramos por hombre y por día. Si recibe un refuerzo de 100 soldados, pero no recibirá víveres antes de los 240 días. ¿Cuál deberá ser la ración de un hombre por día para que los víveres puedan alcanzarles?

A) 540 g B) 720 g C) 420 g D) 450 g E) 675 g

Resolución:

Ordenandos los datos en un cuadro, tendremos:

Soldados	días	gramos
400	180	900
500	240	x

Entre soldados y víveres (*gramos*) la relación es inversa. Entre días y víveres (*gramos*) también, luego:

$$x = 900 \times \frac{400}{500} \times \frac{180}{240} = 540 \qquad \text{RPTA. A}$$

20.- La cantidad necesaria para vivir en una ciudad A es los $\frac{7}{8}$ de lo que se necesita para vivir en otro pueblo B. Según esto, si ocho personas gastan en A durante nueve meses 227 934. ¿Cuánto gastarán en B, 6 personas durante 8 meses?

A) 173 664 B) 151 956 C) 132 961 D) 231 552 E) 202 608 UNFV 92

Resolución:

	Personas	Tiempo	Costo
Ciudad A →	8	9	227 934
Ciudad B →	6	8	x

$$x = 227\,934 \times \frac{6}{8} \times \frac{8}{9} = 151\,956$$

Obsérvese que se ha estimado el costo para la ciudad A, pero debemos convertirlos para la ciudad B, donde se gasta $\frac{8}{7}$ de lo que se gasta en A.

$$\text{Gasto en} \quad B = 151\,956 \times \frac{8}{7} = 173\,664 \qquad \text{RPTA. A}$$

IV. MISCELANEA

21.- Una persona puede comprar 24 manzanas y 20 naranjas o 36 manzanas y 15 naranjas. Si comprara sólo naranjas. ¿Cuál es el máximo número que podría comprar?

A) 30 *B) 35* *C) 25* *D) 40* *E) 45* *PUCP 89-I*

Resolución:

Definimos : m = precio de 1 manzana ; n = precio de 1 naranja

D = dinero disponible para comprar.

Según los datos : $D = 24m + 20n$ ...... (1)

$D = 36m + 15n$ ...... (2)

Igualando : $24m + 20n = 36m + 15n$

$5n = 12m$

Esto significa que el precio de 5 naranjas equivale al de 12 manzanas, luego en (1):

$$D = 2\,(12m) + 20n = 2(5n) + 20n$$

$$D = 30n$$

O sea que se pueden comprar 30 naranjas. RPTA. A

22.- En un pueblo africano, por cada 3 espejos dan 5 diamantes y por cada 2 diamantes dan 9 monedas de oro. ¿Cuántas monedas de oro darán por dos espejos?

A) 15 *B) 25* *C) 10* *D) 20* *E) 50* *UNFV 95*

Resolución:

Escribimos las equivalencias y luego multiplicamos todas entre sí (esto se conoce como regla de Conjunta):

3 espejos = 5 diamantes
2 diamantes = 9 monedas
x monedas = 2 espejos

} Al multiplicar, se anulan las unidades

$(3)\,(2)\,(x) = (5)\,(9)\,(2)$

$x = 15$ RPTA. A

23.- Al expresar mediante una ecuación en la que interviene una constante de proporcionalidad k el siguiente enunciado:

"La energía radiante E emitida por un radiador perfecto es directamente proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta T" se obtiene:

A) $E = k.\sqrt[4]{T}$ *B) $E^4 = k.T^2$* *C) $E = kT^4$* *D) $E = kT^2$* *E) N. A.*

Resolución:

La cuarta potencia de la temperatura T es : T^4

Basta con expresar la relación E es proporcional a T^4 : $E = kT^4$ **RPTA. C**

24.- Descomponer el número 1 134 en cuatro sumandos cuyos cuadrados sean proporcionales a 12, 27, 48 y 75.

A) 162, 243, 324 y 405 *B) 161, 244, 324 y 405* *C) 162, 242, 325 y 405*

D) 162, 243, 325 y 406 *E) 160, 245, 322 y 407* ***UNMSM 93***

Resolución:

Sean x, y, z, w los sumandos : $x + y + x + w = 1\ 134$ .... (1)

Los sumandos son proporcionales a 12, 27, 48, y 75 : $\frac{x^2}{12} = \frac{y^2}{27} = \frac{z^2}{48} = \frac{w^2}{75}$ .... (2)

De (2) se obtiene: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{w}{5} = k$

Luego, en (1): $2k + 3k + 4k + 5k = 1\ 134 \Rightarrow k = 81$

Entonces: $x = 162$; $y = 243$; $z = 324$; $w = 405$ **RPTA. A**

25.- El tono (frecuencia) de una cuerda de violín es directamente proporcional a la tensión de la cuerda e inversamente proporcional a su longitud. Si la longitud aumenta 10% y la tensión en 20%. ¿En qué % aumenta el tono?

A) 5% *B) 9%* *C) 12%* *D) 15%* *E) 30%*

Resolución:

El tono (p) es D.P. a la tensión T e I.P. a la longitud L .... $p = k.\ \frac{T}{L}$

Después de los cambios : $p' = k.\ \frac{1{,}2T}{1{,}1L} = 1\ .\ 09\ \frac{kT}{L}$

Es decir : $p' = 1{,}09p$

Aumenta en : 9% **RPTA. B**

26.- Se sabe que "x" varía en razón directa a "y" e inversa a "z^2" ; si x = 10 cuando y = 4 y z = 14; cuando y = 16 y z = 7 ; x es igual a :

A) 150 **B) 155** **C) 160** **D) 160** **E) 165**

Resolución:

La fórmula es : $x = k \cdot \frac{y}{z^2}$ ó $\frac{xz^2}{y} = k$

Y la tabla de valores :

x	y	z
10	4	14
?	16	7

Entonces : $\frac{10 \cdot 14^2}{4} = \frac{x \cdot 7^2}{16}$; luego : $x = 160$ RPTA. C

27.- Si la gasolina cuesta "x" soles el galón y un carro rinde "y" kilómetros por galón ¿Cuántos kilómetros puedo viajar con "T" soles de gasolina?

A) $\frac{T.y}{x}$ **B)** $\frac{T.x}{y}$ **C)** $\frac{y.x}{T}$ **D)** $\frac{y.T}{x}$ **E) N.A.**

Resolución:

Podemos plantear una regla de tres simple :

Con "x" soles se puede viajar "y" *km*

Con "T" soles se podrán viajar ...*n*...

$\therefore \quad n = \frac{T \cdot y}{x}$ RPTA. A

28.- Una rueda de 13 dientes está engranada con otra de 39 dientes ¿Cuántas vueltas dará en 3 minutos la pequeña si la mayor da 8 vueltas en 1 minuto?

A) 75 **B) 77** **C) 73** **D) 72** **E) N.A.**

Resolución:

Cuando el movimiento es simultáneo (tiempos iguales) la proporción entre dientes y vueltas es inversa; así :

$$\frac{\text{\# de vueltas de la menor en } 3min}{\text{\# de vueltas de la mayor en } 3min} = \frac{\text{\# de dientes de la mayor}}{\text{\# de dientes de la menor}}$$

Entonces : $\frac{n}{8 \times 3} = \frac{39}{13} \Rightarrow n = 72$ RPTA. D

29.- En un avión viajan 170 personas, se sabe que por cada 2 peruanos hay 20 brasileños y 12 uruguayos. ¿En cuánto excede el número de brasileños al número de peruanos?

A) 70 ***B) 80*** ***C) 90*** ***D) 95*** ***E) 75***

Resolución:

Sean : x = # de peruanos ; y = # de brasileños ; z = # de uruguayos

$$\therefore \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{20} = \frac{z}{12} = k$$

Además : $x + y + z = 170$

Entonces : $2k + 20k + 12k = 170 \Rightarrow k = 5$

El exceso de y sobre x es : $20k - 2k = 18k =$ **90** RPTA. C

30.- Si el 50% del 20% de X, el 5% de Y más el 25% de Y y el cuatro por veinte del cinco por siete de la mitad de A, son proporcionales a 8, 6 y 2 ¿Qué porcentaje de X + Y es Z?

A) 25% ***B) 28%*** ***C) 30%*** ***D) 26%*** ***E) 32%***

Resolución:

De los datos : $\dfrac{50\% \cdot 20\% \cdot X}{8} = \dfrac{5\%Y + 25\%Y}{6} = \dfrac{\frac{4}{20} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{Z}{2}}{2}$

Simplificando : $\dfrac{0{,}1X}{8} = \dfrac{0.30Y}{6} = \dfrac{Z}{28} = k$

Luego : $X = 80k$; $Y = 20k$; $Z = 28k$

El % de X + Y que es Z, está dado por : $\dfrac{Z}{X+Y} = \dfrac{28k}{100k} = 0{,}28 =$ **28%** RPTA. B

31.- Un comerciante ofrece a un empleado un sueldo anual de S/. 6 000, un televisor y un juego de comedor; a los diez meses el empleado es despedido y recibe S/. 4 400 más las dos cosas que le prometieron. Si se hubiera retirado a los siete meses, hubiera obtenido S/. 3 600 y el juego de comedor. ¿Cuál es el precio del juego de comedor?

A) 1 500 ***B) 1 800*** ***C) 2 000*** ***D) 2 200*** ***E) 2 500***

Resolución:

Sea "x" el valor del Tv., "y" el del juego de comedor.

Los pagos correspondientes son : $6\,000 + x + y$ .... por 12 meses
$4\,400 + x + y$ .... por 10 meses
$3\,600 + y$ .... por 7 meses

Es decir son proporcionales a 12; 10 y 7 , entonces :

$$\frac{6\,000 + x + y}{12} = \frac{4\,400 + x + y}{10} = \frac{3\,600 + y}{7}$$

Resolviendo : $x + y = 3\,600$; $y = 2\,000$ RPTA. C

32.- Para abrir una zanja de 200m de largo se emplearon cierto número de obreros; si la zanja fuese 150m más larga se necesitarían 9 obreros más. ¿Cuántos obreros se emplearon?

A) 10 *B) 15* *C) 11* *D) 13* *E) 12*

Resolución:

Por regla de tres simple :

$$\left.\begin{array}{l} 200\,\textit{metros} \;\ldots\ldots\ldots\; x \text{ obreros} \\ 200+150\,\textit{metros} \;\ldots\ldots\ldots\; x+9 \text{ obreros} \end{array}\right\} \text{directa}$$

Como es directa, multiplicamos en aspa : $200\,(x + 9) = 350 \cdot x$

Resolviendo : $x = 12$ RPTA. E

33.- Un grupo de caballos tienen alimentos para 15 días, pero si hubiesen 2 caballos más, los alimentos sólo durarían 12 días. ¿Cuántos caballos se tiene?

A) 5 *B) 6* *C) 7* *D) 8* *E) 9*

Resolución:

La relación entre el número de caballos que se van a alimentar y el tiempo que duran los alimentos es inversa. Planteamos una regla de 3 inversa :

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ caballos} \;\ldots\ldots\ldots\; 15 \;\textit{días} \\ x+2 \text{ caballos} \;\ldots\ldots\ldots\; 12 \;\textit{días} \end{array}\right\}$$

$\therefore \quad x \cdot 15 = (x + 2) \cdot 12$

De donde : $x = 8$ RPTA. D

34.- Con 8 obreros se puede hacer una obra en 20 días; con 10 obreros 4 veces más rápido que los anteriores. ¿En cuántos días harán una obra cuya dificultad es 10 veces la anterior?

A) 40 *B) 45* *C) 50* *D) 55* *E) 60*

Resolución:

Planteamos una regla de tres compuesta :

obreros	rapidez	días	dificultad
*	*	*	
8	1	20	1
10	4	x	10
			*

(obreros–días: *i*; rapidez–días: *i*; días–dificultad: *d*)

$$x = \frac{8 \cdot 1 \cdot 20 \cdot 10}{10 \cdot 4 \cdot 1} = 40\,\textit{días}$$

RPTA. A

35.- "m" obreros pueden hacer una obra en "a" días ¿Cuántos obreros más serían necesarios para poder hacer dicha obra en "b" días menos?

A) $\frac{mb}{a+b}$ *B)* $\frac{mb}{(a+b)}$ *C)* $\frac{mb}{(a-b)}$ *D)* $\frac{mb}{(b-a)}$ *E) N.A.*

Resolución:

Por una regla de 3 simple (inversa), tendremos :

$$\begin{cases} m \text{ obreros } \ldots\ldots\ldots \ a \text{ días} \\ m+x \text{ obreros } \ldots\ldots\ldots \ a-b \text{ días} \end{cases} \Rightarrow \quad m \,.\, a = (m+x)\,.\,(a-b)$$

Resolviendo : $x = \frac{mb}{(a-b)}$ RPTA. C

36.- Cinco orfebres hacen 12 anillos en 15 días. Si se desean hacer 60 anillos en 25 días. ¿Cuántos orfebres doblemente rápidos se deben contratar además de los que se tienen?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución:

Orfebres	Anillos	Días
5	12	15
x	60	25

$$x = \frac{5 \cdot 60 \cdot 15}{12 \cdot 25} = 15$$

Luego de resolver la proporcionalidad establecida entre las distintas magnitudes, podemos reconocer que se necesitan 15 - 5 = 10 orfebres más, siempre que sean de rapidez normal, pero si son doblemente rápidos, sólo se necesitarán:

$10 \div 2 =$ **5 orfebres**

RPTA. E

37.- Un pozo de 8m de diámetro y 18m de profundidad fue hecho por 30 obreros en 28 días. Se requiere aumentar en 2m el radio del pozo y el trabajo será hecho por 14 hombres. ¿Cuánto tiempo demorarán?

A) 136 *B) 135* *C) 133* *D)* *E)*

Resolución:

Se debe relacionar el número de obreros, el número de días y el volumen mediante una regla de tres compuesta : $(V = \pi R^2 . h)$

Obreros	Días	Volumen
30	28	$\pi \,.\, 4^2 \,.\, 18$
14	x	$\pi \,.\, 6^2 \,.\, 18$

$$\therefore \quad x = \frac{30 \cdot 28 \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 18}{14 \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 18} = 135 \text{ días}$$

RPTA. B

38.- El peso W de un cilíndro varía proporcionalmente a su altura h y al cuadrado del diámetro d de su base. ¿Cuál es la suma de los números con que se llenará los espacios en blanco de la siguiente tabla?

W	25		7,2
h	2,5	4	2
d	2	0,6	

A) 4,8 *B) 3,6* *C) 8,4* *D) 6,3* *E) N.A.*

Resolución:

De los datos : $\left.\begin{array}{l} W \alpha h \\ W \alpha d^2 \end{array}\right\} \quad W \alpha h \, . \, d^2$

Es decir : $\dfrac{W}{hd^2} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{W_1}{h_1 d_1^2} = \dfrac{W_2}{h_2 d_2^2}$

Reemplazando : $\dfrac{25}{2{,}5.2^2} = \dfrac{W_2}{4.(0{,}6)^2} \quad \Rightarrow \quad W_2 = 3{,}6$

Igualmente : $\dfrac{W_2}{h_2 d_2^2} = \dfrac{W_3}{h_3 d_3^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3{,}6}{4(0{,}6)^2} = \dfrac{7{,}2}{2.d_3^2}$

Despejando : $d_3 = 1{,}2$

Entonces sumamos : $W_2 + d_3 = 3{,}6 + 1{,}2 =$ **4,8** RPTA. A

39.- Se divide el número 747 en tres partes tales que sus raíces cuadradas sean proporcionales a los números 3; 5 y 7. La suma de los dígitos de la parte menor es :

A) 5 *B) 6* *C) 7* *D) 8* *E) 9*

Resolución:

Sean x , y , z las partes, luego :

$$\frac{\sqrt{x}}{3} = \frac{\sqrt{y}}{5} = \frac{\sqrt{z}}{7} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{9} = \frac{y}{25} = \frac{z}{49} = k^2$$

Luego, por propiedad : $\dfrac{x+y+z}{9+25+49} = \dfrac{x}{9}$, ya que x es la parte menor.

Reemplazando : $\dfrac{747}{83} = \dfrac{x}{9} \quad \Rightarrow \quad x = 81$

Y la suma de cifras de x es : $8 + 1 =$ **9** RPTA. E

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Si $a : b = 1 : 2$ entonces ¿Cuál de las expresiones siguientes es igual a 0?

A) $2a - b$ B) $-2a - b$ C) $2a + b$

D) $a - 2b$ E) $a + 2b$

2.- ¿Cuánto cuestan "a" lápices, si "b" cuestan S/. c?

A) S/. $\frac{ca}{b}$ B) S/. $\frac{cb}{a}$ C) S/. $\frac{ab}{c}$

D) S/. abc E) N.A.

3.- Si por cada 6 caramelos que compra Pedro, Luis compra 10, entonces cuántos caramelos compra Luis si Pedro compra 15?

A) 15 B) 25 C) 18 D) 30 E) 24

4.- Señale la ecuación en la que "x" es directamente proporcional a "y" e inversamente proporcional a "z".

A) $y = xz$ B) $x = yz$ C) $z = xy$

D) $x = y$ E) $y = \frac{x}{z}$

5.- El número que completa la proporción $1 : 7 = ? : 0.35$ es?

A) $\frac{1}{200}$ B) $\frac{1}{20}$ C) 0.5 D) 5 E) 50

6.- Si 36 es el mayor de dos números cuya relación es de dos a tres, el menor es:

A) 12 B) 16 C) 18 D) 24 E) 26

7.- Si 72 se divide en partes proporcionales a $1 : 3 : 5$, la mayor parte es:

A) 14 B) 24 C) 40 D) 48 E) 64

8.- La suma de 3 números es 86. La razón del primero al segundo es $4 : 7$ y la del segundo con el tercero es $2 : 3$. El segundo número es:

A) 32 B) 16 C) 24 D) 28 E) 42

9.- Una fábrica tiene petróleo suficiente para 20 *días* consumiendo 2 barriles diarios ¿Cuántos barriles menos diarios se deben consumir para que el petróleo alcance para 30 *días*?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 1 E) $1\frac{1}{3}$

10.- Un hombre dejó S/.5 000 a sus tres hijos. Por cada *sol* que recibió Pedro, Juan recibió S/.1,50 y Carlos recibió S/.2,50 ¿Cuánto dinero le dejó a Juan?

A) 750 B) 1 000 C) 1 100

D) 1 500 E) 3 000

NIVEL B

11.- $2a = \frac{b}{2} = \frac{c}{2,5}\sqrt{2}$

Arreglar a, b y c en orden descendiente de valor.

A) a, b, c B) b, c, a C) a, c, b

D) c, b, a E) c, a, b

12.- Una moción fue adoptada por una votación de 5 a 3. ¿Qué parte del voto está en contra del movimiento?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{8}{5}$

13.- La razón entre $3x - 4$ y $y + 15$ es constante; si $y = 3$ cuando $x = 2$; entonces cuando $y = 12$, x es igual a:

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{7}{2}$ E) 8

14.- Si "m" es a "n" como 108 es a "x" y "x" es a "n" como "c" es a 3, hallar el valor de $\sqrt{m.c}$

A) 15 B) 18 C) 21 D) 27 E) 6

15.- Un individuo recorre 33 *km* en una hora y media dando 37 500 pasos. Si sus pasos son de igual longitud. ¿Cuántos pasos dará en dos *horas* para recorrer 44 *km*?

A) 60 000 B) 58 320 C) 56 000

D) 80 000 E) 50 000

16.- El aceite que contiene un tanque vale 560 *soles*. Si se sacan 40 *litros* vale sola mente 240 *soles*. ¿Cuántos *litros* contenía el tanque?

A) 60 B) 70 C) 100 D) 140 E) 200

17.- Si 6 gatos cazan 6 ratones en 6 *minutos*. 3 gatos, ¿en cuánto *tiempo* cazarán 3 ratones?

A) 6 *min* B) 3 *min* C) 18 *min*

D) 12 *min* E) No se puede precisar

18.- Tres alumnos resuelven una tarea de 27 preguntas empleando 9 *horas* ¿Cuántos alumnos resolverán una tarea de 36 preguntas en 4 *horas* y *media*?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

19.- En un trueque por un cuadrado se reciben 4 círculos y por 6 círculos se reciben 3 triángulos. ¿Cuántos cuadrados pueden recibirse por 24 triángulos?

A) 30 B) 24 C) 36 D) 48 E) 12

20.- De un grupo de niños y niñas se retiran 15 niñas quedando dos niños por cada niña. Después se retiran 45 niños y quedan entonces cinco niñas por cada niño. El número de niñas al comienzo era de:

A) 40 B) 45 C) 29 D) 50 E) N. A.

21.- Según la ley de Boyle, la presión es I.P. al volumen que contiene determinada cantidad de gas. ¿A qué presión está sometido un gas, si al aumentar esta presión en 2 *atm*. El volumen varía en 2/5 de su valor?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

22.- Si yo tuviera 25% más de lo que tengo, lo que tendría y lo que tú tienes estarían en la relación de 5 a 2. ¿Qué tanto por ciento más de lo que tienes es lo que yo tengo?

A) 60% B) 120% C) 80%

D) 100% E) 50%

23.- La suma de dos números es 270 y cuando se le agrega 65 a cada uno de ellos su razón es 3/5. Determinar la diferencia positiva de dichos números.

A) 10 B) 65 C) 80 D) 95 E) 100

24.- Una rueda "A" de 50 dientes engrana con otra "B" de 40 dientes; fija al eje de "B" hay una rueda "C" de 15 dientes que engrana con una rueda "D" de 25 dientes. Si la rueda "A" da 120 *rpm*. ¿Cuánto tiempo demora la rueda "D" en dar 9900 revoluciones?

A) 90 B) 110 C) 120 D) 130 E) 150

25.- Raúl recibe por cada 9 botellas vacías de gaseosa una llena. ¿Cuántas botellas podrá consumir si tiene 162 botellas vacías?

A) 11 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

NIVEL C

26.- Si la cuarta parte de la suma de dos números es a los dos quintos de su diferencia como 25 es a 32, hallar en qué relación se encuentra la suma de los cubos con la diferencia de sus cubos respectivos?

A) 425/419 B) 27/19 C) 741/740

D) 365/364 E) 301/299

27.- En una aldea los granjeros intercambian 20 sacos de papas por 1 carnero; por 3

carneros dan 10 cerdos; por 5 cerdos dan dos caballos y por 3 caballos dan 1 vaca lechera. ¿Cuántos sacos de papas se intercambiarán por 1 vaca lechera?

A) 40 B) 50 C) 36 D) 125 E) N.A.

28.- Si $yz : zx : xy = 1 : 2 : 3$

entonces $\frac{x}{yz} : \frac{y}{zx}$ es igual a :

A) 3 : 2 B) 1 : 2 C) 1 : 4

D) 2 : 1 E) 4 : 1

29.- Dos pastores que llevaban 6 y 3 panes se encuentran con un cazador hambriento y comparten con éste los panes. Si el cazador pagó 9 *soles* por la ayuda que recibió. ¿Cuánto deben repartirse los pastores?

A) *S/.*5 y *S/.*4 D) *S/.*8 y *S/.*1

B) *S/.*6 y *S/.*3 E) *S/.*9 y *S/.*0

C) *S/.*7 y *S/.*2

30.- Un profesor quiere repartir 57 lapiceros entre 3 alumnos por una exposición de escritura al dictado. El primero ha tenido una falta de ortografía, el segundo tres y el tercero cuatro. ¿Cuántos lapiceros le corresponde a cada uno proporcionalmente al mérito repectivo?

A) 9, 12, 36 D) 36, 12, 9

B) 10, 11, 36 E) N.A.

C) 35, 12, 10

31.- En una universidad la relación de hombres a mujeres es de 5 a 7; la relación de hombres en Ciencias y hombres en Letras es de 8 a 3. ¿Cuál es la relación entre el número de hombres en Ciencias y el total de alumnos?

A) $\frac{24}{25}$ B) $\frac{12}{29}$ C) $\frac{12}{35}$

D) $\frac{10}{33}$ E) $\frac{11}{32}$

32.- La razón de las cantidades de dinero de Pedro y Juan es 8/17. Si Juan le diera 63 soles a Pedro, ambos tendrían la misma suma de dinero. ¿Cuánto tiene Juan?

A) 238 B) 248 C) 112 D) 122 E) 138

33.- Se contrataron 5 artesanos que hacen 12 chompas en 15 días; se pretende tener 60 chompas en 25 días. ¿Cuántos artesanos doblemente rápidos se deben contratar además de los ya contratados?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 6 E) 4

34.- El transporte en mototaxi a 40 *km* de 12 canastas de pescado, pesando cada una 44 *kg* ha costado 130 *soles* ¿A qué distancia se habrán transportado 15 canastas de 50 *kg* cada una, costando el transporte 162,5 *soles*?

A) 22,5 B) 16,4 C) 35,2

D) 31,4 E) 25,6

35.- Cuatro soldados tienen víveres para 20 días, pero aumentaron dos soldados más, y los víveres se terminaron 6 días antes. ¿Cuánto tiempo permanecieron los 2 soldados?

A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 16

36.- Veinte hombres se comprometen en hacer una obra de 800 m^2 en 10 *días*, al cabo del cuarto día se les comunica que en realidad la obra era de 1000 m^2 y que deben acabar un día antes de lo establecido. ¿Cuántos obreros de la misma capacidad deben ser contratados?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 14

37.- Un ganadero tiene 420 ovejas que puede alimentar durante 80 *días*, después de "x" días vende 70 ovejas y los alimentos duran 12 *días* más de lo que iban a durar. Hallar "x".

A) 12 B) 16 C) 14 D) 20 E) 16

UN PROBLEMA DE REPARTO
(DE "EL HOMBRE QUE CALCULABA")

«De nuestro encuentro con un rico jeque, malherido y hambriento. La propuesta que nos hizo sobre los ocho panes que llevábamos, y cómo se resolvió, de manera imprevista, el reparto equitativo de las ocho monedas que recibimos en pago. Las tres divisiones de Beremiz : La división simple, la división cierta y la división perfecta. Elogio que un ilustre visir dirigió al Hombre que Calculaba».

Tres días después, nos acercábamos a las ruinas de una pequeña aldea denominada Sippar cuando encontramos caído en el camino a un pobre viajero, con las ropas desgarradas y al parecer gravemente herido. Su estado era lamentable. Acudimos en socorro del infeliz y él nos narró luego sus desventuras.

Se llamaba Salem Nasair, y era uno de los más ricos mercaderes de Bagdad. Al regresar de Basora, pocos días antes, con una gran caravana, por el camino de el-Hilleh, fue atacado por una banda de nómadas persas del desierto. La caravana fue saqueada y casi todos sus componentes perecieron a manos de los beduinos. Él *-el jefe-* consiguió escapar milagrosamente, oculto en la arena, entre los cadáveres de sus esclavos. Al concluir la narración de su desgracia, nos preguntó cón voz ansiosa :

- ¿Traéis quizás algo de comer? Me estoy muriendo de hambre ...

- Me quedan tres panes -respondí.

- Yo llevo cinco, dijo a mi lado el Hombre que Calculaba -Beremiz.

- Pues bien sugirió el jeque, yo os ruego que juntemos esos panes y hagamos un reparto equitativo. Cuando llegue a Bagdad prometo pagar con ocho monedas de oro el pan que coma.

Así lo hicimos. Al día siguiente al caer la tarde, entramos en la célebre ciudad de Bagdad, Perla de Oriente. Al atravesar la vistosa plaza tropezamos con un aparatoso cortejo a cuyo frente iba, en brioso alazán, el poderoso Ibrahim Maluf, uno de los visires.

El visir al ver al jeque Salem Nasair en nuestra compañía le llamó, haciendo detener a su brillante comitiva, y le preguntó :

- ¿Qué te pasó, amigo mío? ¿Cómo es que llegas a Bagdad con las ropas destrozadas y en compañía de estos dos desconocidos?

El desventurado jeque relató minuciosamente al poderoso ministro todo lo que le había ocurrido en el camino, haciendo los mayores elogios de nosotros.

- Paga inmediatamente a esos dos forasteros, le ordenó el gran visir.

Y sacando de su bolsa 8 monedas de oro se las dio a Salem Nasair, diciendo :

- Te llevaré ahora mismo al palacio, pues el Defensor de los Creyentes deseará sin duda ser informado de la nueva afrenta que los bandidos y beduinos le han infligido al atacar a nuestros amigos y saquear una de nuestras caravanas en territorio del Califa.

- El rico Salem Nasair nos dijo entonces : «Os dejo, amigos míos. Quiero, sin embargo, repetiros mi agradecimiento por el gran auxilio que me habéis prestado. Y para cumplir la palabra dada, os pagaré lo que tan generosamente disteis».

Y dirigiéndose al Hombre que Calculaba le dijo : «Recibirás cinco monedas por los cinco panes».

Y volviéndose a mí añadió : « Y tú, ¡ Oh, bagdalí !, recibirás tres monedas por los tres panes».

Más con gran sorpresa mía, el calculador objetó respetuoso: «¡Perdón, oh, jeque! La división, hecha de ese modo, puede ser muy sencilla, pero no es matemáticamente cierta. Si yo entregué 5 panes he de recibir 7 monedas; mi compañero bagdalí, que dio 3 panes, debe recibir una sola moneda».

-¡Por el nombre de Mahoma!, intervino el visir Ibrahim, interesado vivamente por el caso. ¿Cómo va a justificar este extranjero tan disparatado reparto? Si contribuiste con 5 panes ¿por qué exiges 7 monedas?, y si tu amigo contribuyó con 3 panes, ¿por qué afirmas que él debe recibir sólo una moneda?

El Hombre que Calculaba se acercó al prestigioso ministro y habló así :

- Voy a demostraros ¡Oh, visir!, que la división de las 8 monedas por mí propuesta es matemáticamente cierta. Cuando, durante el viaje, teníamos hambre, yo sacaba un pan de la caja en que estaban guardados, lo dividía en tres pedazos, y cada uno de nosotros comía uno. Si yo aporté 5 panes, aporté, por consiguiente, 15 pedazos ¿no es verdad?. Si mi compañero aportó 3 panes, contribuyó con 9 pedazos. Hubo así un total de 24 pedazos, correspondiendo por tanto 8 pedazos a cada uno. De los 15 pedazos que aporté comí 8; luego di en realidad 7. Mi compañero aportó, como dije, 9 pedazos, y comió también 8; luego sólo dió 1. Los 7 que yo dí y el restante con el que contribuyó el bagdalí formaron los 8 que correspondieron al jeque Salem Nasair. Luego, es justo que yo reciba siete monedas y mi compañero sólo una.

El gran visir, después de hacer los mayores elogios del Hombre que Calculaba, ordenó que le fueran entregadas las siete monedas, pues a mí, por derecho, sólo me correspondía una. La demostración presentada por el matemático era lógica, perfecta e incontestable.

Sin embargo, si bien el reparto resultó equitativo, no debió satisfacer plenamente a Beremiz, pues éste dirigiéndose nuevamente al sorprendido ministro, añadió :

- Esta división, que yo he propuesto de siete monedas para mí y una para mi amigo es, como demostré ya, matemáticamente clara, pero no perfecta a los ojos de Dios. Y juntando las monedas nuevamente las dividió en dos partes iguales. Una me la dio a mí - *cuatro monedas*- y se quedó con la otra.

- Este hombre es extraordinario, declaró el visir. No aceptó la división propuesta de ocho dinares en dos partes de cinco y tres respectivamente, y demostró que tenía derecho a percibir siete y que su compañero tenía que recibir sólo un dinar. Pero luego divide las ocho monedas en dos partes iguales y le da una de ellas a su amigo. Y añadió con entusiasmo :

- *¡Mac Allah!* Este joven, aparte de parecerme un sabio y habilísimo en los cálculos de Aritmética, es bueno para el amigo y generoso para el compañero. Hoy mismo será mi secretario.

- Poderoso Visir, dijo el Hombre que Calculaba, veo que acabáis de realizar con 29 palabras, y con un total de 135 letras, la mayor alabanza que oí en mi vida, y yo, para agradecéroslo tendré que emplear exactamente 58 palabras en las que figuran nada menos que 270 letras. ¡Exactamente el doble! *!Qué Allah os bendiga eternamente y os proteja! ¡Seáis por siempre alabado!.*

La habilidad de mi amigo Beremiz llegaba hasta el extremo de contar las palabras y las letras del que hablaba, y calcular las que iba utilizando en su respuesta para que fueran exactamente el doble. Todos quedamos maravillados ante aquella demostración de envidiable talento.

16 Problemas sobre Edades

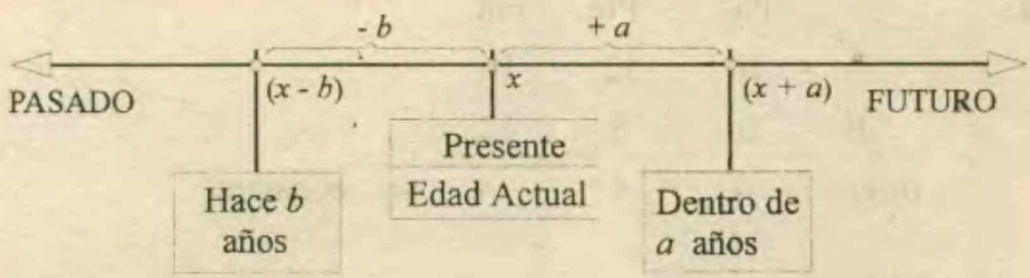
En estos problemas intervienen personas, cuyas edades se relacionan a través del tiempo bajo una serie de condiciones que deben cumplirse.Estas relaciones se traducen en una o más ecuaciones, según el problema, por lo cual su estudio se pudo incluir en el capítulo de planteo de ecuaciones, pero dada la diversidad de situaciones que se presentan, se imponía una dedicación más amplia del tema.

En el proceso de solución se asigna una variable a la edad que se desea hallar, luego, si hubieran otras edades desconocidas se tratará de representarlas en función de la variable ya asignada, en caso contrario con nuevas variables.

La información que contiene el problema se debe organizar con ayuda de diagramas que faciliten el planteo de las ecuaciones.

I) DIAGRAMAS LINEALES

Se emplean cuando la información no es tan abundante o cuando se trate de un sólo personaje cuya edad a través del tiempo debe marcarse sobre una línea que representará el transcurso del tiempo.



II) DIAGRAMAS CON FILAS Y COLUMNAS

Son necesarios cuando se trata de dos ó más personas con edades relacionadas en diferentes tiempos. En las filas (horizontales) se anota la información para cada personaje y en las columnas (verticales) se distribuyen los datos sobre el pasado, presente ó futuro.

TIEMPOS

Personas	PAS.	PTE.	FUT.
A			
B			

RECOMENDACIONES

1) Para avanzar en el tiempo, se suman los años por transcurrir a la edad que se toma como punto de partida.

Ejemplo : Si Pedro tiene $(x - 2)$ *años*; dentro de 4 *años* tendrá :

$(x - 2) + 4$ ó $x + 2$ *años*.

2) Si se intenta retroceder en el tiempo se restarán los años deseados a la edad de referencia.

Ejemplo : Si ahora una persona tiene x *años*, hace $(n + 3)$ *años* tenía $x - (n + 3)$ ó $x - n - 3$.

3) La diferencia entre las edades de dos personas se mantiene constante a través del tiempo, no ocurre lo mismo con la razón o cociente de las edades.

Ejemplo:

	Pas.	Pte.	Fut.	
A	10	12	16	
B	6	8	12	
difer :	4	4	4	⇐ constante

Ejemplo :

	Pas.	Pte.	Fut.	
A	10	12	16	
B	6	8	12	
razón	5:3	3:2	4:3	⇐ variable

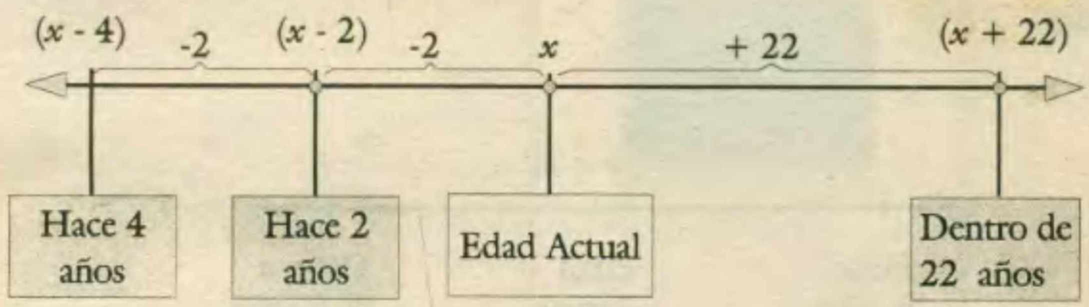
PROBLEMAS RESUELTOS

1.- *Hace dos años tenía la cuarta parte de la edad que tendré dentro de 22 años. Dentro de cuántos años tendré el doble de la edad que tenía hace 4 años.*

A) 4 *B) 2* *C) 6* *D) 5* *E) 7*

Resolución:

Utilizando un diagrama lineal ; tendremos :



Según los datos $(x - 2)$ debe ser igual a la cuarta parte de $(x + 22)$

$$x - 2 = \frac{x + 22}{4} \Rightarrow 4x - 8 = x + 22$$

$$x = 10 \text{ ... Edad actual}$$

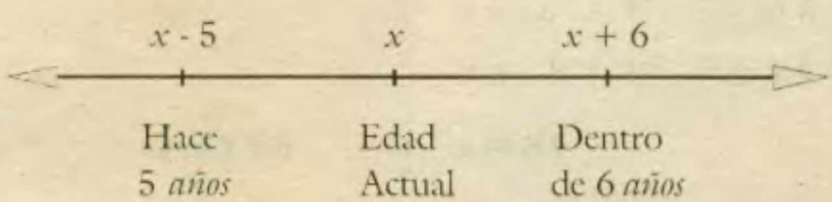
Hace 4 *años* tenía $10 - 4 = 6$ *años*, y el doble de esta edad $2 \times 6 = 12$ *años* la cumplirá dentro de:

2 ***años.*** RPTA. B

2.- *¿Cuántos años tiene una persona, sabiendo que la raíz cuadrada de la edad que tenía hace 5 años más la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años suman 11?*

A) 14 *B) 20* *C) 24* *D) 30* *E) 34* ***PUCP 92 - II***

Resolución:



Según los datos se plantea : $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+6} = 11$

$$\sqrt{x-5} = 11 - \sqrt{x+6}$$

Elevando al cuadrado : $x - 5 = 121 - 22\sqrt{x+6} + x + 6$

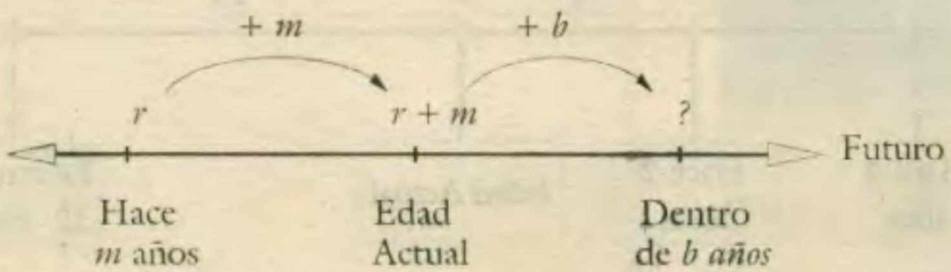
$$\Rightarrow \quad \sqrt{x+6} = 6$$

$$\therefore \quad x = 30 \qquad \text{RPTA. D}$$

3.- Una persona tenía "r" años de edad hace "m" años. Su edad "b" años después de hoy será expresada por:

A) r + m + b   B) r - m - b   C) m + r - b   D) b + m - r   E) m - r - b   UNALM 91 - II

Resolución:

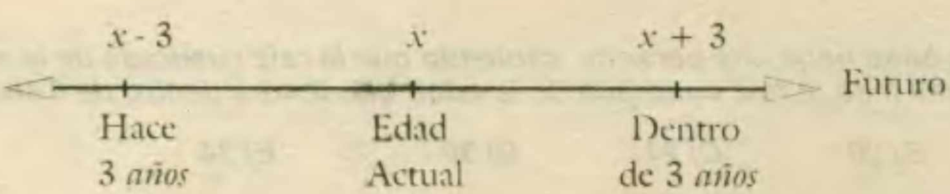


La edad dentro de b años será : $r + m + b$ RPTA. A

4.- Cuando a un estudiante le preguntaron por su edad, respondió: "Si al triple de la edad que tendré dentro de tres años le restan el triple de la edad que tenía hace tres años resultará mi edad actual" ¿Cuántos años tiene?

A) 12   B) 9   C) 18   D) 36   E) 27

Resolución:



Según los datos : $3(x + 3) - 3(x - 3) = x$

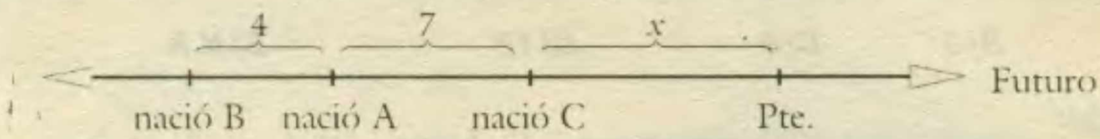
$$3x + 9 - 3x + 9 = x$$

$$18 = x \qquad \text{RPTA. C}$$

5.- Cuando A nació, B tenía 4 años y cuando C nació, A tenía 7 años. Ahora las tres edades suman 48 años. ¿Cuántos años tiene el mayor?

A) 19   B) 20   C) 21   D) 22   E) 23

Resolución:



Del diagrama tenemos : edad de B $= 4 + 7 + x = 11 + x$

Edad de A $= 7 + x$; edad de C $= x$

Las 3 edades suman 48 : $(11 + x) + (7 + x) + x = 48$

$$x = 10$$

El mayor es B y su edad es : $11 + 10 =$ **21** **RPTA. C**

6.- Las edades de 3 personas están en progresión aritmética creciente cuya suma es 63; si la suma de sus cuadrados es 1 395, la edad del mayor es:

A) 27 *B) 26* *C) 21* *D) 35* *E) N.A.* ***UNFV 91***

Resolución:

La representación de las edades en P.A. es : $x - r$; x ; $x + r$

Su suma es 63 : $(x - r) + x + (x + r) = 63 \Rightarrow x = 21$

La suma de sus cuadrados es 1 395 :

$$(21 - r)^2 + 21^2 + (21 + r)^2 = 1\,395$$

$$1\,323 + 2r^2 = 1\,395 \Rightarrow r = 6$$

Las edades son : **15; 21 y 27** **RPTA. A**

7.- Un niño nació en Noviembre y el 10 de Diciembre del mismo año tiene una edad igual al número de días transcurridos del 1° de Noviembre al día de su nacimiento. Hállar la fecha del nacimiento.

A) 16 de Nov. *B) 18 de Nov.* *C) 20 de Nov.*

D) 22 de Nov. *E) N.A.*

Resolución:

Sea x el día de Noviembre en que nació; como dicho mes tiene 30 días, quedan $(30 - x)$ días y hasta el 10 de Diciembre, su edad en días será : $30 - x + 10$.

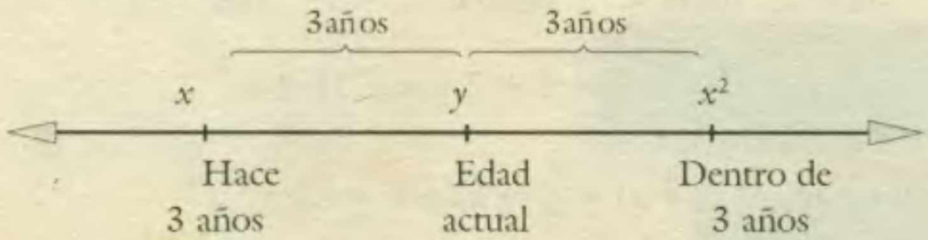
Esta edad se expresa también por el número de la fecha de su nacimiento entonces:

$30 - x + 10 = x$; luego $x = 20$ **RPTA. C**

8.- La edad de un niño será dentro de 3 años un cuadrado perfecto y hace 3 años su edad era precisamente la raíz de ese cuadrado. ¿Qué edad tiene?

A) 6 *B) 3* *C) 9* *D) 12* *E) N.A.*

Resolución:



Podemos plantear : $x^2 - x = 6$; de donde $x = 3$

Además, del diagrama : $y = x + 3 =$ **6** RPTA. A

9.- La relación de dos edades A y B es de 5 a 4, la relación de B a otra C es de 3 a 7. Si la suma de las 3 edades es 165. Hallar la diferencia entre el mayor y el menor.

A) 48 *B) 39* *C) 24* *D) 23* *E) 46* ***PUCP 93 - II***

Resolución:

$$\frac{A}{B} = \frac{5}{4}\ ;\ \frac{B}{C} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{A}{15} = \frac{B}{12} = \frac{C}{28} = k$$

Suma de edades es 165 : $15k + 12k + 28k = 165$

$$k = 3$$

Diferencia entre el mayor y menor : $28k - 12k =$ **48** RPTA. A

10.- La edad en años de una tortuga es mayor en 20 que el cuadrado de un número "n" y menor en 5 que el cuadrado del número siguiente a "n". ¿Cuántos años tiene la tortuga?

A) 180 *B) 164* *C) 84* *D) 150* *E) N.A.*

Resolución:

Edad de la tortuga $= n^2 + 20$

Edad de la tortuga $= (n + 1)^2 - 5$

Igualando y resolviendo : $n^2 + 20 = n^2 + 2n + 1 - 5 \Rightarrow n = 12$

Entonces : $12^2 + 20 =$ **164** RPTA. B

11.- Si la edad de Luis es tres veces la edad de Pedro y juntos suman 52 años. Dentro de cuántos años, la edad de Pedro será la mitad de la edad de Luis?

A) 1 *B) 5* *C) 9* *D) 11* *E) 13* ***UNFV 96***

Resolución:

$+n$ (de Pte. a Fut.)

	Pte.	Fut.
L	$3x$	$3x + n$
P	x	$x + n$

Las edades actuales suman 52:

$3x + x = 52$

$x = 13$

Dentro de n años la edad de Pedro será la mitad de la de Luis:

$$13 + n = \frac{39 + n}{2} \Rightarrow n = 13$$ RPTA. E

12.- Un padre tiene cuatro veces la edad de su hijo. Dentro de 20 años el padre tendrá el doble de la edad del hijo. ¿Cuántos años tiene el hijo actualmente?

A) 10 *B) 15* *C) 20* *D) 25* *E) N.A.*

Resolución:

	Pte.	Fut.
Padre	$4x$	$4x + 20$
Hijo	x	$x + 20$

$4x + 20 = 2\,(x + 20)$

$4x + 20 = 2x + 40$

$\therefore\ x = 10$ RPTA. A

13.- En 1 963 la edad de Ignacio era 9 veces la edad de su hijo. En 1968 era solamente el quíntuplo de la de éste. En 1 993, el número de años que cumplió el padre fue:

A) 75 *B)65* *C) 85* *D) 70* *E) 80* *UNFV 93*

Resolución:

	1 963	1 968
Padre	$9x$	$9x + 5$
Hijo	x	$x + 5$

Según los datos : $9x + 5 = 5\,(x + 5) \Rightarrow x = 5$

En 1963 el padre tenía 45 años; en 1993 tuvo $45 + 30 = 75$ RPTA. A

14.- La edad de Pedro es a la de Luis como x es a 1. Siendo p la edad del menor y x > 1, dentro de cuántos años la relación será como y es a 1?

A) $\dfrac{p(x-y)}{y-1}$ *B)* $\dfrac{(xy-1)p}{y-1}$ *C)* $\dfrac{p(x+y)}{y-1}$ *D)* $\dfrac{p(x-y)}{y+1}$ *E)* $\dfrac{(y-x)\,p}{x(y-1)}$ *PUCP 89 - I*

Resolución:

Las edades actuales cumplen : $\dfrac{\text{edad de Pedro}}{\text{edad de Luis}} = \dfrac{x}{1}$

Como $x > 1$, el menor es Luis y por dato su edad es p ; luego la edad de Pedro es xp.

	Pte.	Fut.
Pedro	xp	$xp + n$
Luis	p	$p + n$

n es el tiempo que debe transcurrir para que se cumpla la 2ª condición: $\dfrac{xp+n}{p+n} = \dfrac{y}{1}$

Despejando n ; se obtiene : $n = \dfrac{p\,(x-y)}{y-1}$ RPTA. A

15.- La edad de Luis es la tercera parte de la edad de Juan, pero hace 12 años la edad de Juan era nueve veces la edad de Luis. ¿Qué edad tendrá Luis dentro de 4 años?

A) 12 *B) 16* *C) 20* *D) 24* *E) N.A.* ***UNALM 90 - II***

Resolución:

	Hace 12 años	Pte.
J	$3x - 12$	$3x$
L	$x - 12$	x

Luis dentro de 4 años tendrá : 20 RPTA. C

16.- La edad de A es el triple de la de B, que tiene x años. ¿Al cabo de cuántos años la edad de B será la mitad de la edad de A?

A) 2x *B) 10* *C) x* *D) 15* *E) 3x*

Resolución:

	Pte.	Fut.
A	$3x$	$3x + n$
B	x	$x + n$

$$x + n = \frac{3x+n}{2}$$

$$2x + 2n = 3x + n$$

$$\therefore x = n$$

Dentro de : x años RPTA. C

17.- Pedro tiene 40 años y José 15 años. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que las edades se encuentren en la razón 4 : 9?

A) 4 *B) 6* *C) 5* *D) 10* *E) 8*

Resolución:

Sea x el tiempo : $\dfrac{15+x}{40+x} = \dfrac{4}{9}$

Resolviendo : $135 + 9x = 160 + 4x$

$x = 5$ RPTA. C

18.- Hace 8 años las edades de A y B estaban en la relación 10 : 1. Actualmente la relación es 4 : 1. ¿Dentro de cuánto tiempo la relación será 3 : 1?

A) 2 años *B) 4 años* *C) 8 años* *D) 6 años* *E) 9 años*

Resolución:

	Hace 8 años	Ahora	Dentro de n años
A	$10x$	$10x + 8$	$10x + 8 + n$
B	x	$x + 8$	$x + 8 + n$

La relación en el presente es 4 : 1 ; $\dfrac{10x+8}{x+8} = \dfrac{4}{1} \Rightarrow x = 4$

Reemplazando para la última condición: $\dfrac{48+n}{12+n} = \dfrac{3}{1} \Rightarrow n = 6$ RPTA. D

19.- Un niño tiene 2b años y su padre tiene m veces dicha edad. ¿Cuántas veces la edad del niño era la edad de su padre hace b años?

A) 2 (m - 1) *B) m + 2* *C) m* *D) 2m - 1* *E) m^2*

Resolución:

Edades actuales: $2b$ y $2bm$

Hace b años: $2b - b$; $2bm - b$

Según la condición: $2bm - b = x\,(2b - b)$

$x = 2m - 1$ RPTA. D

20.- Las edades de un padre y su hijo son las mismas, pero con los dígitos al revés. Si hace un año la edad del padre era el doble de la de su hijo, la diferencia de edades es:

A) 45 *B) 72* *C)27* *D) 63* *E) 36*

<u>Resolución:</u>

Sean $\overline{ab}$ y $\overline{ba}$ las edades actuales, con $a > b$; luego :

$$\overline{ab} - 1 = 2\left(\overline{ba} - 1\right)$$
$$10a + b - 1 = 20b + 2a - 2$$
$$19b = 8a + 1$$

La última ecuación solo se cumple para $a = 7$ y $b = 3$

$\therefore$ Padre e hijo tienen 73 y 37 ; 73 - 37 = **36** **RPTA. E**

21.- En 1 984 la edad de una persona era igual a la suma de las cifras del año en que nació. ¿Cuál era el valor de esa suma?

A) 22 B) 20 C) 24 D) 18 E) 28

<u>Resolución:</u>

Nació en $\overline{19\,ab}$; luego, en 1984 tenía $1 + 9 + a + b$.

Se puede plantear: $\overline{19\,ab} + (1 + 9 + a + b) = 1984$

Efectuando operaciones: $11a + 2b = 74$

La igualdad anterior se cumple para $a = 6$; $b = 4$

La suma era $1 + 9 + 6 + 4 =$ **20** **RPTA. B**

22.- La edad de A es el doble de la edad que tenía B cuando A tenía la edad que actualmente tiene B. Si la suma de las edades actuales de A y B es 42 años; ¿Cuáles es la edad de A?

A) 24 B) 36 C)18 D) 12 E) N.A.

<u>Resolución:</u>

	tenía	tiene
A	y	$2x$
B	x	y

Por propiedad : $2x - y = y - x \Rightarrow 3x = 2y$

Por dato : $2x + y = 42$

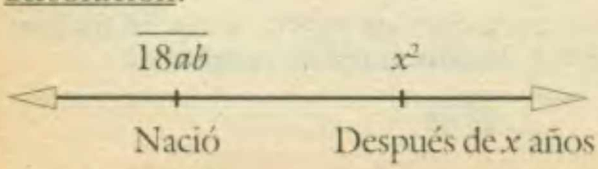
Resolviendo : $x = 12$; $y = 18$

RPTA. A

23.- Una persona que nació en la primera mitad del siglo XIX tenía x años en el año x^2. ¿En qué año nació?

A) 1814 B) 1849 C) 1821 D) 1806 E) 1812

<u>Resolución:</u>



$0 < \overline{ab} < 50$

Se debe cumplir : $x^2 - x = \overline{18ab}$

ó $x(x-1) = \overline{18ab}$

El único entero que cumple es $x = 43 \Rightarrow 43(42) =$ **1 806** RPTA.D

(se puede probar que $44 \times 43 = 1892$ (no cumple) y tampoco $42\ (41) = 1722$.)

24.- Pedro le dice a Juan: "Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes, pero cuando tú tengas la edad que yo tengo, la suma de nuestras edades será 63". Determinar las edades de Pedro y Juan.

A) 14 y 21 ***B) 28 y 14*** ***C) 14 y 17*** ***D) 28 y 21*** ***E) Ninguna***

Resolución:

Según el diagrama la diferencia de edades en cada época es:

	tenía	tengo	tendré
Pedro	y	$2x$	$63 - 2x$
Juan	x	y	$2x$
	tenías	tienes	tendrás

Pasado: $y - x$

Presente: $2x - y$

Futuro: $63 - 4x$

Como todas valen lo mismo, igualamos :

$y - x = 2x - y$; $2x - y = 63 - 4x$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene : $x = 14$; $y = 21$

Entonces Pedro tiene : **$2x$ = 28 años y Juan 21** RPTA. D

25.- La edad de Alberto es el doble de la edad que tendrá Bernardo cuando Carlos tenga la edad que actualmente tiene Alberto. ¿Cuál es el orden de mayor a menor de estas tres edades?

A) A, B, C ***B) B, C, A*** ***C) C, B, A*** ***D) B, A, C*** ***E) A, C, B***

Resolución:

De acuerdo al diagrama :

	Pte.	Fut.
A	$2x$	
B		x
C		$2x$

A es mayor que C

C es mayor que B

Luego de mayor a menor.

Las edades son : **A, C, B** RPTA. E

26.- Dentro de 5 años tendré el quíntuplo de la edad que tenía hace 5 años, menos 50 años. ¿Qué edad tendré dentro de 2 años?

A) 20 *B) 21* *C) 22* *D) 23* *E) 24*

Resolución:

Según el diagrama :

$x - 5$	x	$x + 5$
Hace 5 años	Edad actual	Dentro de 5 años

Planteamos la siguiente ecuación : $x + 5 = 5\,(x - 5) - 50$

$$x + 5 = 5x - 75$$

$$x = 20$$

La edad dentro de 2 años será : $20 + 2 =$ **22** RPTA. C

27.- Pamela al ser interrogada por su edad responde : "La suma de mi edad actual y la edad que tendré dentro de 4 años es igual al triple de mi edad hace 3 años, ¿Qué edad tiene Pamela?

A) 10 *B) 11* *C) 12* *D) 13* *E) 14*

Resolución:

Su edad actual : x

Dentro de 4 años : $x + 4$

Hace 3 años : $x - 3$

$$\therefore \quad x + x + 4 = 3\,(x - 3)$$

$$x = 13$$ RPTA. D

28.- Hace 5 años Pedro tenía el doble de la edad que tenía Juan. ¿Cuál es la edad actual de Juan, sabiendo que dentro de 5 años se cumplirá que la edad de Juan será los $\frac{2}{3}$ de la que tenga Pedro?

A) 15 *B) 12* *C) 16* *D) 18* *E) 14*

Resolución:

Pedro y Juan tenían $2x$ y x años, hace 5 años. Sus edades actuales serán $2x + 5$; $x + 5$ respectivamente. Además de los otros datos; dentro de 5 años se cumplirá :

$$(x + 5) + 5 = \frac{2}{3}\,(2x + 5 + 5)$$

De donde : $x = 10$

Y la edad actual de Juan : $x + 5 =$ **15** RPTA. A

29.- Un padre a quien se le preguntó por la edad de su hijo responde : "Mi edad es tres veces la suya, pero hace 10 años era el quíntuple". ¿Cuáles son las edades?. Dar como respuesta la menor de ellas.

A) 15 *B) 18* *C) 25* *D) 23* *E) 20*

Resolución:

Hace 10 años el padre tenía el quíntuple de la edad del hijo :

	Hace 10	Ahora
Padre	$3x - 10$	$3x$
Hijo	$x - 10$	x

$$3x - 10 = 5\,(x - 10)$$

$$\therefore \quad x = 20$$

RPTA. E

30.- La edad de un hombre es "m" veces la edad "b" de un niño ¿Dentro de cuántos años su edad será solamente "n" veces la edad del niño?

A) $\dfrac{b(m+n)}{n-1}$ *B)* $\dfrac{b(m-n)}{n+1}$ *C)* $\dfrac{b(m-n)}{n-1}$ *D)* $\dfrac{b(m+n)}{n+1}$ *E) N.A.*

Resolución:

Actualmente las edades son "mb" y "b".

Dentro de x años : $mb + x = n\,(b + x)$

$$mb + x = nb + nx$$

$$x = \frac{b\,(m-n)}{n-1}$$ RPTA. C

31.- Hace 8 años las edades de "A" y "B" estaban en la relación de 4 a 5; si actualmente sus edades suman 52 años. ¿Hace cuántos años "B" tenía el doble de la edad de "A"?

A) 23 *B) 19* *C) 23* *D) 20* *E) 17*

Resolución:

Del diagrama :

	Pasado	Presente
A	$4x$	$4x + 8$
B	$5x$	$5x + 8$

$$4x + 8 + 5x + 8 = 52$$

$$x = 4$$

Edades actuales : 24 y 28

B tenía el doble de A, hace : 20 años RPTA. D

32.- Tú tienes 16 años; cuando tengas el triple de lo que yo tengo, entonces mi edad será el doble de lo que actualmente tienes. ¿Dentro de cuántos años cumpliré 40 años?

A) 25 *B) 28* *C) 29* *D) 30* *E) N.A.*

Resolución:

Anotamos los datos en un diagrama :

	Presente	Futuro
Yo	x	32
Tú	16	$3x$

Luego planteamos : $x - 16 = 32 - 3x$

$x = 12$

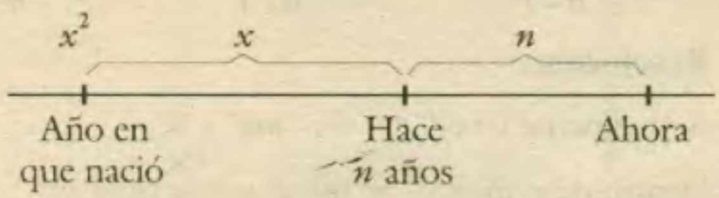
Para cumplir 40, faltan : 40 - 12 = **28 años** RPTA. B

33.- Una persona tuvo hace "n" años una edad igual a la raíz cuadrada del año en que nació ¿Qué edad tiene actualmente, si nació en este siglo? (Año actual : 1998)

A) 58 *B) 60* *C) 61* *D) 62* *E) N.A.*

Resolución:

Si x^2 es el año en que nació y es de este siglo (1900 - 1999), la única opción es $x^2 = 1936$ donde: $x = 44$



Actualmente (1998) tiene :

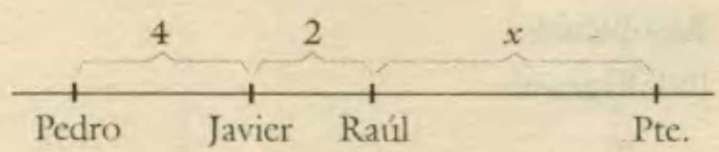
1998 - 1936 = **62** RPTA. D

34.- La suma de las edades de Pedro y Raúl es 48 años, al acercarse Javier, Pedro le dice: "Cuándo tú naciste, yo tenía 4 años, pero cuando Raúl nació tu tenías 2 años. ¿Cuál es la edad de Javier?

A) 23 *B) 25* *C) 22* *D) 26* *E) 28*

Resolución:

Según el diagrama y los datos :



Edad de Pedro + Edad de Raúl = 48

$(6 + x) + (x) = 48$

Obtenemos : $x = 21$

$\therefore$ La edad de Javier es : $2 + x =$ **23** RPTA. C

35.- Jaime tiene la edad que Sandy tenía, cuando Jaime tenía la tercera parte de la edad que Sandy tiene. Si Sandy tiene 18 años más de lo que Jaime tiene. ¿Cuántos años tiene Sandy?

A) 58 *B) 54* *C) 50* *D) 56* *E) 55*

Resolución:

De los datos : $y = x + 18$

$3x = y + 18$

Resolviendo, obtenemos : $x = 18$; $y = 36$

	Tenía	Tiene
Jaime	x	y
Sandy	y	$3x$

$\therefore$ Sandy tiene : $3x =$ **54 años** RPTA. B

36.- Luis le dijo a Manuel : "Tengo el doble de la edad que tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes, pero cuando tengas la edad que yo tengo, la suma de nuestras edades será 63 años; hallar la suma de las edades actuales.

A) 52 *B) 46* *C) 49* *D) 50* *E) 48*

Resolución:

Con los datos se prepara el cuadro adjunto y después se plantean las ecuaciones :

	Pasado	Presente	Futuro
Luis	y	$2x$	$63 - 2x$
Manuel	x	y	$2x$

$$y - x = 2x - y = 63 - 2x - 2x$$

Y luego de resolver : $x = 14$; $y = 21$

Suma de edades actuales : $2x + y =$ **49** RPTA. C

37.- Hace 6 años mi edad era a tu edad como 1 a 5 ¿Cuánto tiempo tendrá que transcurrir para que nuestras edades estén en la relación de 2 a 5, si dentro de 6 años mi edad será la mitad de la que ahora tienes?

A) 1 *B) 2* *C) 6* *D) 8* *E) 4*

Resolución:

Dentro de 6 años mi edad será la mitad de la que ahora tienes :

	Hace 6 años	Ahora	Dentro de 6 años
Yo	x	$x + 6$	$x + 12$
Tú	$5x$	$5x + 6$	$5x + 12$

$$x + 12 = \frac{5x + 6}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

Las edades actuales son entonces : 12 y 36

Para que se encuentran en la relación 2 : 5, debe transcurrir n, por lo tanto :

$$\frac{12 + n}{36 + n} = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad n = 4$$ RPTA. E

38.- Estando reunido el día de ayer, un grupo de 20 alumnos procedieron a sumar el año de nacimiento de cada uno y por otro lado se sumó la edad también de cada uno, dando como resultado global 39956, ¿Cuántos alumnos todavía no cumplieron años en el presente? (Año actual 1998)

A) 7 *B) 4* *C) 2* *D) 5* *E) 1*

Resolución:

Sabemos que la edad de una persona se obtiene restando el año actual con el año de su nacimiento :

Edad = Año actual - Año de su nacimiento.

De aquí se deduce que : Edad + Año de su nacimiento = Año actual.

Esto indica que si cada persona ya cumplió años en 1998, la suma debe dar justamente 1998 y si son 20 personas :

$$\text{Suma total} = 20 \times 1998 = 39960$$

Pero la suma solo es 39956 , los 4 años que faltan se deben a que 4 de los alumnos aún no cumplen años.

RPTA. B

39.- La suma de las edades de Lalo y Rosa cuando nació Pepe, su primer hijo, era la mitad de la suma actual. Si ahora Pepe tiene 20 años, ¿Qué edad tenía cuando las edades de los tres sumaban 70?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 14 E) 11

Resolución:

De los datos : $(L - 20) + (R - 20) = \dfrac{L + R}{2}$

$\therefore \quad L + R = 80 \rightarrow$ suma actual

Hace x años, la suma de los tres debía ser 70.

$$L - x + R - x + 20 - x = 70 \quad \Rightarrow \quad L + R + 20 - 70 = 3x$$

Luego : $x = 10$ RPTA. A

40.- Dentro de 4 años la suma de las edades de 2 hermanos será "k" años, si hace 4 años la edad del mayor era el triple de la edad del menor; hallar la edad actual del mayor.

A) $\frac{3}{4}$ k + 6 B) $\frac{3}{2}$ k - 6 C) $\frac{3}{4}$ k - 6 D) $\frac{3}{3}$ k - 6 E) N.A.

Resolución:

Hace 4 años, las edades eran : $3x \ ; \ x$

Dentro de 4 años, será : $3x + 4 \ ; \ x + 4$

$\therefore \quad 3x + 4 + x + 4 = k$

$$x = \frac{k-8}{4} = \frac{k}{4} - 2$$

La edad actual del mayor : $3x = \dfrac{3}{4}k - 6$ RPTA. C

41.- Una persona a la que se preguntó qué edad tenía, contestó : "Mi madre acababa de cumplir 20 años en el mismo momento que yo nacía y el número actual de sus años, multiplicados por los míos, excede en 2 500 a su edad y a la mía reunidas" ¿Cuál era su edad?

A) 48 *B) 62* *C) 42* *D) 60* *E) 72*

Resolución:

Si la persona ahora tiene x años, su madre tendrá : $x + 20$.

El producto $x\ (x + 20)$ excede en 2 500 a la suma.

Esto se plantea con la ecuación: $x\ (x + 20) = \left[\, x + (x + 20)\,\right] + 2\ 500$

Que se transforma en : $x^2 + 18\,x - 2\ 520 = 0$, cuyas raíces son : $x_1 =$ **42** ; $x_2 = -60$

De estas raíces, sola la primera es la solución del problema. **RPTA. C**

42.- Las edades de cinco estudiantes son números consecutivos. Si la suma de los cuadrados de los dos mayores de dichos números es igual a la suma de los cuadrados de los otros tres. Determinar la suma de las cincos edades.

A) 60 *B) 75* *C) 65* *D) 70* *E) 18*

Resolución:

Los cinco números que representan a las edades son :

$x - 2$; $x - 1$; x ; $x + 1$; $x + 2$ y la suma es $5x$.

Por dato del problema se puede plantear :

$$(x+2)^2 + (x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2 + (x-2)^2$$

Esta ecuación se reduce a : $x^2 = 12x$

Cuyas raíces son : $x_1 = 0$; $x_2 = 12$, de aquí aceptaremos $x = 12$.

La suma de las edades será : $5x =$ **60** **RPTA. A**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Hace 9 años tenía x años, dentro de 6 años tendré:

A) $x + 3$ *años* D) $x + 6$ *años*

B) 15 *años* E) $x + 15$ *años*

C) 9 *años*

2.- Oscar tendrá x años dentro de 4 años. Alex hace 5 años tuvo x años. ¿Por cuántos años supera Alex a Oscar?

A) 1 B) 4 C) 5 D) 8 E) 9

3.- Una persona tendrá 20 años dentro de "y" años. Hace 5 años tenía:

A) $y - 5$ B) $15 + y$ C) $15 - y$

D) $25 - y$ E) $y + 5$

4.- Luis tiene su primer hijo a los 18 años. Si actualmente su edad es el doble de la de su hijo. ¿Cuál es la suma de las edades?

A) 39 *años* B) 54 *años* C) 60 *años*

D) 65 *años* E) 78 *años*

5.- La edad de Carlos es "x" años y la de Jorge es el doble de la de Carlos. ¿Cuántos años tendrá Jorge cuando Carlos tenga $2x$ años?

A) $3x$ B) $5x$ C) $7x$ D) $9x$ E) $2x$

6.- María pasó así su vida: $\frac{1}{3}$ durmiendo; $\frac{1}{12}$ comiendo; $\frac{1}{4}$ trabajando; $\frac{1}{6}$ practicando deporte y el resto de su vida que son 3,5 años la pasó viajando. ¿Qué edad tuvo al morir?

A) 18 B) 21 C) 32 D) 42 E) 70

7.- Un padre tiene 24 años más que su hijo. Determinar una de las edades actuales, sabiendo que dentro de 8 años la edad del padre será el doble de la de su hijo.

A) 26 B) 40 C) 18

D) 32 E) N.A.

8.- Leticia tiene 15 años más que su hermana Betty y h ace 6 años la edad de Leticia era 6 veces la de Betty . Hallar la edad actual de Betty.

A) 9 B) 12 C) 15 D) 21 E) 18

9.- La edad actual de Luis es el doble de la de Fernando. Hace 5 *años*, Luis tenía el triple de la edad de Fernando. ¿Cuántos años tiene Fernando?

A) 25 B) 20 C) 15

D) 10 E) 5

10.- La edad de un padre y la de su hijo suman 90 *años*. Si el hijo nació cuando el padre tenía 36 *años*. ¿Cuántos años tiene el hijo?

A) 12 B) 30 C) 27

D) 15 E) 9

11.- Dentro de 8 *años* la edad de un padre será el doble de la edad de su hijo y hace 3 *años* la edad del padre era el triple de la del hijo. La diferencia de edades es:

A) 22 B) 20 C) 18 D) 24 E) 21

12.- José tiene 13 años y su padre 4. ¿Cuántos años tienen que transcurrir para que la edad del padre sea el triple de la de su hijo?

A) 3 B) 12 C) 8 D) 5 E) 7

13.- La edad de Juan más el duplo de la edad de Pedro, suman 65 años. El duplo de la edad de Juan menos de la edad de Pedro

da 30 años. ¿Qué edad tiene el mayor de ellos?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

14.- La edad de un padre es el cuádruplo de la edad de su hijo. Hace 3 años era el quíntuplo. ¿Cuál es la edad actual del padre?

A) 54 B) 45 C) 48 D) 60 E) 36

15.- La edad actual de Manuel es el triple de la edad que tenía hace 20 años. ¿Cuál es su edad actual?

A) 30 B) 24 C) 45 D) 36 E) 15

16.- José tiene 7 años y Luis tiene 25 años. ¿Dentro de cuántos años, la edad de Luis será el triple de la edad de José?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

NIVEL B

17.- Hace 10 *años* tenía la mitad de la edad que tendr é dentro de 8 *años*. Dentro de cuántos años tendré el doble de la edad que tuve hace 8 *años*?

A) 18 B) 16 C) 8 D) 10 E) 12

18.- A tiene 11 veces la edad de B. Dentro de cierto número de años A tendrá 5 veces la edad de B y cinco años más tarde tendrá el triple de la edad de B. Hallar la edad de A.

A) 11 B) 22 C) 33
D) 44 E) N.A.

19.- Lucy tiene 20 *años*, ella tiene el doble de la edad que Roxana tenía cuando Lucy tenía la edad que Roxana tiene ahora. ¿Cuántos años tiene Roxana?

A) 10 B) 15 C) 16
D) 12 E) 5

20.- Un automóvil tiene la mitad de los años que tenía Gabriel cuando el coche era nuevo. Gabriel tiene ahora 15 *años*. ¿Cuántos años tiene el coche?

A) 10 B) 20 C) 5
D) 15 E) N.A.

21.- Hace 10 *años* la suma de las edades de dos hijos era $\frac{1}{3}$ de la de su padre. Uno es dos años mayor que el otro y la suma de sus edades actuales es 14 *años* menos que la de su padre. ¿Cuántos años tiene uno de los hijos?

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 18

22.- La edad de Alfredo es el doble de la edad de Karina y hace 20 *años* era el cuádruplo. Hallar la suma de las edades actuales.

A) 30 B) 40 C) 60
D) 70 E) 90

23.- Un padre tiene "a" años y su hijo "b" años. Dentro de cuántos años tendrá el doble de la edad de su hijo?

A) $a + 2b$ B) $a - 2b$ C) $a + \frac{b}{2}$
D) $a - b$ E) $a - \frac{b}{2}$

24.- La suma de las edades de dos hermanos dentro de 9 *años* será 98. Si el mayor tiene 30 *años* más que el menor, hallar la edad del menor?

A) 35 B) 55 C) 45
D) 25 E) N.A.

25.- Si Ud. pregunta a Luis su edad, él dirá: "La edad que yo tenía hace 42 *años* elevada al cuadrado" ¿Cuántos años tiene Luis?

A) 50 B) 48 C) 49
D) 45 E) N.A.

26.- La suma y el producto de las edades de 3 hermanitas son 13 y 36 respectivamente. Calcular 2 de las 3 edades sabiendo que

la mayor tiene ojos azules.

A) 9,4 B) 6,3 C) 6,1

D) 8,4 E) 9,2

27.- Dentro de 8 *años* mi edad será el doble de la edad que tuve hace 4 *años*. ¿Dentro de cuántos años tendré el doble de la edad que tuve hace 6 *años*?

A) 10 B) 8 C) 2 D) 4 E) 6

28.- La raíz cuadrada de la edad que tendrá un joven dentro de 7 *años*, más la raíz cuadrada de la edad que tuvo hace 2 *años*, es igual a nueve. ¿Cuál es la edad del joven?

A) 20 B) 12 C) 14

D) 16 E) 18

29.- Manolo cuenta que cuando cumplió años en 1994, descubrió que su edad era igual a la suma de las cifras del año de su nacimiento. ¿Cuántos años tenía en 1990?

A) 23 B) 20 C) 19

D) 21 E) 22

30.- En el mes de mayo, un estudiante sumó a los años que tiene todos los meses que ha vivido, obteniendo como resultado 232. ¿En qué mes nació?

A) Agosto B) Enero C) Abril

D) Junio E) Mayo

31.- Mi sobrina es ahora dos veces menor que yo, pero hace cinco años era tres veces menor. ¿Cuántos años tiene mi sobrina?

A) 18 B) 10 C) 20

D) 8 E) 9

NIVEL C

32.- Hace 2 años tenía el cuádruple de tu edad. Dentro de 8 años tendré 30 veces la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tendrás dentro de 9 años. ¿Qué edad tengo?

A) 26 B) 18 C) 22

D) 24 E) 20

33.- Pedro le dice a Juan: "La suma de nuestras edades es 46 *años* y tu edad es el triple de la edad que tenías cuando yo tenía el triple de la edad que tuviste cuando nací". Entonces Juan tiene actualmente:

A) 12 B) 24 C) 34

D) 48 E) N.A.

34.- La edad de un padre sobrepasa en 5 *años* la suma de las edades de sus tres hijos. Dentro de 30 *años* él tendrá el doble de la edad del hijo menor, dentro de 20 *años* tendrá el doble de la edad del segundo y dentro de 10 *años* tendrá el doble de la edad del mayor. La suma de todas las edades actuales es:

A) 105 B) 86 C) 108

D) 85 E) 95

35.- En 1988 la edad de Luis era la inversa de las dos últimas cifras del año de su nacimiento. Lo mismo ocurre con su padre. Si la diferencia de sus edades es 36 *años* y la edad de Luis en 1988 era la inversa de la edad de su padre. Hallar la edad actual del padre.

A) 69 B) 70 C) 71

D) 72 E) N.A.

36.- La edad de un padre y la de su hijo suman 63 *años*. Cuando el padre tenía la edad de su hijo ambas edades sumaban 25 *años*. La edad de uno de ellos es:

A) 43 B) 19 C) 21

D) 41 E) 47

37.- Un padre tiene "n" años y su hijo "m" años. ¿Dentro de cuántos años tendrá el padre el doble de la edad de su hijo?

A) $n + m$ B) $n - m$ C) $2n - m$

D) $n - 2m$ E) $2m - n$

38.- Hace "$x - y$" años Félix tenía "x" años más que Sandra; si actualmente Sandra tiene "y" años. ¿Cuál será la suma de sus edades dentro de "$x + y$" años?

A) $x + 3y$ B) $2y + x$ C) $n + y$

D) $3x + y$ E) $3x + 4y$

39.- Un padre pensó al ver a su hijo recién nacido: "Cuando tenga la mitad de mi edad, yo tendré el triple de su edad, si dentro de 30 *años* las edades suman 84 años, ¿Qué edad tiene el padre actualmente?

A) 18 B) 24 C) 26

D) 30 E) 27

40.- Pepe le dice a Tomás : "Dentro de 2 *años* yo tendré el triple de la edad que tú tenías, cuando yo tenía la edad que tú tendrás en ese entonces". Si actualmente la suma de sus edades es 21 *años*, ¿Qué edad tenía Tomás hace 2 *años*?

A) 8 B) 6 C) 9 D) 10 E) 12

41.- La suma de las edades de una pareja de esposos, cuando nació su primer hijo, era la tercera parte de la suma de sus edades actuales; si ahora el hijo tiene 35 *años*. ¿Qué edad tenía cuando la edad de los 3 sumaban 74?

A) 19 B) 28 C) 21

D) 17 E) 13

42.- En 1920 la edad de Betito era 4 veces la edad de Manuelito, en 1928 la edad de Betito fue el doble de la edad de Manuelito. ¿Cuál fue la edad de Betito en 1930?

A) 26 B) 24 C) 28

D) 19 E) 22

43.- Teresa le dice a Silvia : "Yo tengo el doble de la edad que tú tenías, cuando yo tenía la edad que tú tienes y cuando tú tengas la edad que yo tengo, la suma de nuestras edades será 54 *años*". ¿Cuál es la edad de Silvia?

A) 14 B) 16 C) 18

D) 12 E) 22

44.- Estando reunidas Ana, Betty y Carmen, se escucha la siguiente conversación :

* Betty : "Mi edad es la misma que tenía Ana Cuando Carmen nació".

* Ana : "Asi es, y en ese entonces nuestras edades sumaban 30 *años*"

* Carmen : "Mi edad actual es la misma que tenía Betty cuando yo nací".

¿Cuál será la edad que tendrá Ana cuando Carmen tenga la edad que tiene Betty?

A) 10 B) 20 C) 30

D) 40 E) 50

45.- Lalo observó en cierto año que el cuadrado de su edad era igual al año de su nacimiento y que la edad de su primo Paco era igual a la suma de cifras del año en que había cumplido 20 *años*. ¿Qué edad tenía Paco cuando Lalo cumplió 60 *años*?

A) 25 B) 37 C) 28

D) 35 E) 42

46.- Al preguntársele a un matemático por su edad éste responde : "No soy tan joven para decir que tengo 60 *años* ni tan viejo para tener 80 *años*. Cada hijo me ha proporcionado tanto nieto como hermanos tiene, mi edad es exactamente el doble de números de hijos y nietos que tengo". ¿Cuál es la edad del matemático?.

A) 75 B) 81 C) 64

D) 68 E) 72

EL EPITAFIO DE DIOFANTO

Este matemático de la antigüedad (vivió hacia el 250 después de Jesucristo) fue tan empedernido cultivador de su ciencia, que aún después de muerto quiso que se le recordara como un artista proponiendo problemas algebraicos. He aquí su famoso epitafio traducido a nuestro idioma.[1]

¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden demostrar, ¡oh milagro! cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia. Había transcurrido, además, una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla. Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, que entregó su cuerpo en súbita muerte, apenas había alcanzado tan sólo la mitad de la de su padre en la tierra. Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo. Dime cuántos años había vivido. Diofanto cuando le llegó la muerte!»

Para los conocedores del álgebra, el problema se reduce al resolver la siguiente ecuación :

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Cuya solución, 84 nos da a conocer varios datos biográficos del ilustre matemático: se casó a los 21 años. Fue padre a los 38, perdió su hijo a los 80 años y murió a los 84. Con todas estas explicaciones, el sabio se olvidó de decirnos en qué año había nacido, con lo cual, apenas sabemos nada. ¡Estos sabios...!. Don Isaac Newton nos propuso que :

«Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades, basta con traducir dicho problema de la lengua vulgar al idioma algebraico».

EN LENGUA VERNACULA	EN ALGEBRA
Un comerciante tenía una determinada suma de dinero.	x
El primer año se gastó cien *libras*	$x - 100.$
Aumentó el resto con un tercio de éste.	$x - 100 + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-400}{3}$
Al año siguiente, volvió a gastar cien *libras*.	$\frac{4x-400}{3} - 100 = \frac{4x-700}{3}$
Y aumentó la suma restante, con un tercio de ella.	$\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-1\,800}{9}$
El tercer año, se gastó de nuevo 100 *libras*.	$\frac{16x-700}{9} - 100 = \frac{16x-3\,700}{9}$
Y después de que hubo agregado como siempre su tercera parte.	$\frac{16x-3\,700}{9} + \frac{16x-3\,700}{27} = \frac{64x-14\,800}{27}$
El capital llegó al doble del inicial.	$\frac{16x-14\,800}{27}$

¿Cuál era el capital inicial del comerciante?

17 Problemas sobre Relojes

Los relojes y su utilidad para la medición del tiempo son motivo de una gran variedad de problemas y acertijos, que para un mejor estudio se clasifican en tres grupos:

I) Los que se refieren a la división del tiempo en *días*, *horas*, *minutos*, etc. y las relaciones entre estas medidas.

II) Los que tratan sobre relojes o cronómetros mal calibrados que registran el tiempo con **atraso** o **adelanto** respecto al tiempo normal.

III) Los que relacionan la hora marcada con el *ángulo* formado por las agujas del reloj.

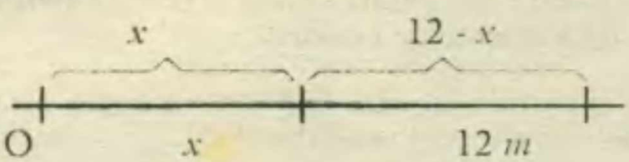
GRUPO I - MEDICION DEL TIEMPO

1.- ¿A qué hora de la mañana el tiempo que marca un reloj es igual a $\frac{5}{4}$ de lo que falta para las doce del mediodía?

A) 10:20	*B) 6:40*	*C) 8:15*	*D) 9:00*	*E) 11:45*

Resolución:

Hacemos un diagrama lineal:



x representa el tiempo en *horas* marcado por el reloj, luego, de acuerdo a los datos:

$$x = \frac{5}{4}(12 - x)$$

$$4x = 60 - 5x$$

$$x = 6\ \frac{2}{3}\ horas = 6h\ 40\ min.$$

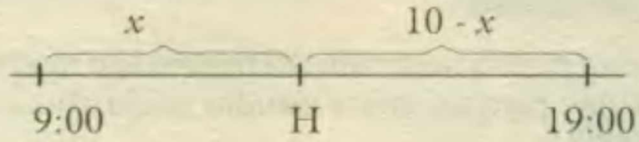
A las 6 : 40 ***am.*** RPTA. B

2.- Si la mitad del tiempo que ha transcurrido desde las 9 am. equivale a la tercera parte del tiempo que falta para las 7 pm. ¿Qué hora es?

A) 9:00 *B) 10:30* *C) 13:00* *D) 12:00* *E) 11:00*

Resolución:

Teniendo en cuenta que *7pm.* equivale a las 12 + 7 = 19 *horas* del día:



De los datos: $\frac{x}{2} = \frac{10-x}{3}$

$3x = 20 - 2x$

$x = 4$

Entonces H = 9 + x = 13:00 = 1:00 *pm.*

A las 13 *horas* ó 1:00 *pm.* RPTA. C

3.- Un pasajero parte a las 9:00 am. (hora de Lima) de Lima a Londres, siendo la duración del viaje con escalas, de cierto número de horas. Si llegó a Londres al día siguiente a las 12 m. (hora de Londres). ¿Cuántas horas duró el viaje, si hay una diferencia de 6 horas entre Lima y Londres?

A) 22 *B) 20* *C) 18* *D) 21* *E) 23* ***PUCP 95 - II***

Resolución:

Cuando parte de Lima (9:00 *am.*) en Londres son 9 + 6 = 15 *horas* ó 3 *pm.* (porque es más temprano en las ciudades al Occidente de Londres).

Según la hora de Londres, la partida fue a las 3:00 *pm.* de cierto día y la llegada a las 12 del mediodía del día siguiente, entonces el viaje duró:

9 + 12 = **21 *horas.*** RPTA. D

4.- ¿Cuál es la relación de la fracción transcurrida de la semana a la fracción transcurrida del día cuando son las 6 am. del Miércoles?

A) $\frac{8}{7}$ *B)* $\frac{1}{7}$ *C)* $\frac{6}{7}$ *D)* $\frac{9}{7}$ *E)* $\frac{3}{5}$ ***UNMSM 91***

Resolución:

1º) La duración de una semana en *horas* es: 24 × 7 = 168 *horas.*

Hasta las 6 *am* del Miércoles han transcurrido: 24 + 24 + 6 = 54 *horas*

La fracción transcurrida es: $\dfrac{54}{168} = \dfrac{9}{28}$

2da) Respecto al día Miércoles, a las 6 *am* la fracción transcurrida es :

$$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

3ra) La relación entre las fracciones será: $\dfrac{\frac{9}{28}}{\frac{1}{4}} = \boxed{\dfrac{9}{7}}$ RPTA. D

5.- Un reloj da las tres. Mientras suenan las campanas pasan 3 segundos. ¿Cuánto tiempo será necesario para que éste reloj dé las siete?

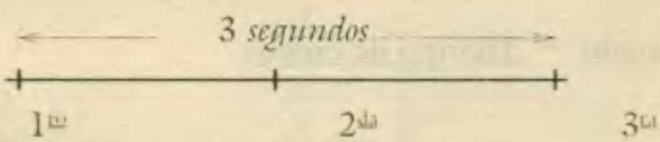
A) 7s *B) 8s* *C) 9s* *D) 3s* *E) 6s*

Resolución:

Generalmente se responde: "7 *segundos*", pero no es así. Veamos:

Cuando el reloj da las 3, transcurren dos intervalos:

- entre la primera y la segunda campanada.
- entre la segunda y la tercera campanada.



Ambos intervalos duran 3 *segundos* y cada uno $1\frac{1}{2}$ *segundos.*

Cuando el reloj da las 7, solo hay seis intervalos, los cuales duran 6 veces $1\frac{1}{2}$ *segundos*, o sea 9 *segundos.*

El reloj "da las siete" en 9 *segundos.* RPTA. D

GRUPO II - ATRASO Y ADELANTO

6.- Un reloj se atrasa 900 segundos por día. Se pone a la hora exacta un domingo a las 12 del mediodía. ¿Qué hora marcará el sábado siguiente a mediodía?

A) 9:00 *B) 10:30* *C) 16:30* *D) 5:30* *E) 11:30*

Resolución:

Convertimos los *segundos a minutos*: $\dfrac{900}{60} = 15$ *minutos*; luego se compara el tiempo transcurrido con el atraso, mediante una regla de tres:

Tiempo Transcurrido		Atraso
1 *día*	....	15 *min.*
6 *días*	....	x

$$x = \frac{15\times 6}{1} = 90\ min$$

$$x = 1h\ 30\ min$$

El reloj se habrá atrasado $1h$ 30 *min* respecto a la hora normal (12 *m*) entonces, marcará: 12:00 - 1:30 =10:30 *am.*

Las 10:30 *am.* **RPTA. B**

7.- Una persona conoce que su reloj se adelanta $\frac{2}{3}$ de minuto por hora transcurrida. Si el día Miércoles señala la hora exacta a las 12m, el tiempo de exceso que indicará el reloj el día Viernes cuando señale las 21 horas y 45 minutos, será:

A) 20 min 5 s B) 30 min 59 s C) 50 min 3 s D) 39 min 5 s E) 38 min 30 s UNALM 90 - I

Resolución:

Para hacer la comparación por regla de tres, debemos calcular el tiempo transcurrido:

$12h$ del Miércoles + $24h$ del Jueves + $21h$ 45 *min* del Viernes dan un total de 57 *horas* 45 *minutos* ó $57\frac{3}{4}\ h$.

Tiempo transcurrido		Tiempo de exceso
$1\ h$	....	$\frac{2}{3}$ *min*
$57\ \frac{3}{4}\ h$	....	x

$$x = \frac{\left(57\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}{1}$$

$$x = 38.5\ min$$

El tiempo de exceso es 38 *min* 30 *s*. **RPTA. E**

8.- Dos cronometristas midieron el tiempo que duró una competencia discrepando en un décimo de minuto. Se sabe que uno de los cronómetros adelanta $\frac{1}{2}$ segundo en 1 hora, mientras que el otro se retrasa $\frac{1}{2}$ segundo en 2 horas. ¿Qué tiempo duró la competencia?

A) 5h B) 7h C) 6h D) 8h E) 9h PUCP 92 - II

Resolución:

Sean x *horas* el tiempo que duró la competencia, luego :

- El que se adelanta registrará : $(x).\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ *segundos* de adelanto.

- El que se atrasa registrará : $\left(\dfrac{x}{2}\right).\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{x}{4}$ *segundos* de atraso.

- La discrepancia será : $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{10}$ de *minuto* = 6 *s*

Resolviendo : $x = 8$ RPTA. D

9.- En un momento dado, dos relojes marcan las 12 en punto: uno de ellos se atrasa 5 segundos por hora y el otro se adelanta 7 segundos, también por hora. ¿Qué tiempo mínimo tendrá que transcurrir para que los dos relojes vuelvan a marcar una misma hora?

A) 1 200 horas *B) 150 días* *C) 180 horas* *D) 180 días* *E) 240 días*

Resolución:

A pesar de que los relojes, comienzan a discrepar desde que se ponen en marcha, podrán volver a marcar la misma hora cuando esa discrepancia alcance una cantidad de 12 *horas* ¿porqué? porque cuando un reloj marque 12 *horas* más que otro, no se notará la diferencia. (Por ejemplo 4 *am.* y 4 *pm.*) Hecha esta aclaración el problema se razona así:

El segundo adelanta al primero en cada hora: 7 + 5 = 12 *segundos* y como tiene que adelantarle 12 × 60 × 60 = 43 200 *segundos* para que los dos marquen la misma hora, el tiempo que ha de transcurrir será:

43 200 ÷ 12 = 3 600 *horas* = **150 *días*.** RPTA. B

10.- Un reloj está atrasado 1 hora 40 minutos, pero se adelanta 3 minutos por día. ¿Al cabo de qué tiempo marcará la hora exacta?

A) 33 días 6 horas *B) 33 días 8 horas* *C) 35 días 12 horas 7 min*

D) 14 días 45 min *E) 24 días 3 horas* *UNMSM 91*

Resolución:

Para que marque la hora exacta, basta que se adelante el tiempo que lleva de atraso: 1*h* 40*min* ó 100 *minutos*.

En 1 día adelanta 3 *min*

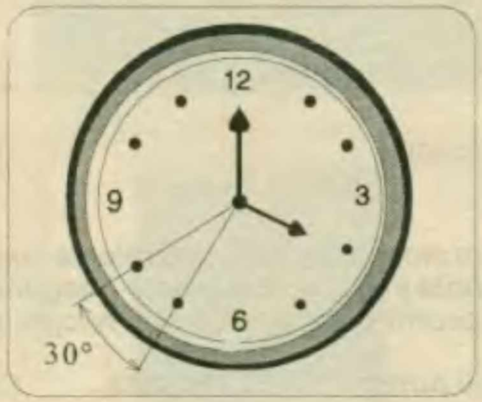
$$\Rightarrow x = \frac{100\times 1}{3}\ días$$

En *x* días adelantará 100 *min*.

Marcará la hora exacta luego de $33\frac{1}{3}$ *días* = **33 *días* 8 *horas*.** RPTA. B

GRUPO III.- AGUJAS Y ANGULOS

Para los problemas que relacionan la hora señalada por un reloj de agujas, con el ángulo formado por éstas, es necesario recordar cuestiones básicas sobre la circunferencia del reloj y las divisiones que sobre ella van inscritas.



1.) La circunferencia se divide en 60 divisiones de *minuto* que equivalen a 360°.

60 div < > 360°

1 div < > 6°

2.) Entre 2 marcas horarias consecutivas habrá 5 divisiones ó :

$5 \times 6 = 30°$

3.) El minutero recorre 60 divisiones en el mismo tiempo que el horario recorre solo 5 divisiones, por lo tanto se puede escribir una proporción:

$$\frac{\theta_H}{\theta_M} = \frac{5div}{60div} = \frac{1}{12}$$

θ_H: espacio recorrido por el horario.
θ_M: espacio recorrido por el minutero.

NOTA.- *Los espacios recorridos están referidos a la longitud de arco que se recorren los puntos de las agujas del reloj.*

- Por cada x divisiones que recorre el minutero, el horario recorre $\frac{x}{12}$ divisiones.

FORMULA PRACTICA.- Cuando el reloj marca las "H" horas "m" minutos ó abreviadamente $H:m$, el angulo "α" formado por el horario y el minutero se obtiene directamente con la siguiente fórmula:

$$\alpha = \left| \frac{11}{2} m - 30H \right|$$

APLICACIONES:

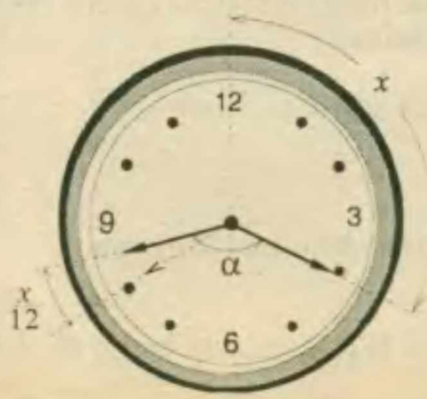
11.- *¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 8:20?*

A) 120° *B) 125°* *C) 130°* *D) 135°* *E) 140°*

Resolución:

1er Método

El movimiento de las agujas debe analizarse desde una hora de referencia, en este caso, desde las 8:00.



a.) x representa el ángulo recorrido por el minutero:

$x = 20\ div = 20 \times 6 = 120°$

b.) $\frac{x}{12}$ representa el recorrido del horario: $\frac{x}{12} = \frac{120°}{12} = 10°$

c.) De la figura, el ángulo será:

$$\alpha = 20\,div + \frac{x}{12} = 20 \times 6 + 10 = 130°$$

2^{do} Método

Podemos aplicar directamente la fórmula con $H = 8$; $m = 20$

$$\alpha = \left|\frac{11}{2}(20) - 30(8)\right| = |110 - 240| = |-130|$$

$\alpha = 130°$ RPTA. C

12.- ¿Cuál es el menor ángulo que forman las agujas de un reloj a las 10:15?

A) 142°30' *B) 145°* *C) 145° 30'* *D) 150°* *E) N.A.* *UNALM 90 - II*

Resolución:

Por fórmula :

$$\alpha = \left|\frac{11}{2}(15) - 30(10)\right|$$

$$\alpha = |82{,}5 - 300| = 217{,}5°$$

Como el ángulo es mayor que 180° y piden el menor ángulo, calculamos lo que falta para 360°.

$$\alpha' = 360° - 217{,}5° = 142{,}5° = 142°\,30'$$ RPTA. A

13.- Entre las 4 y las 5 ¿A qué hora estarán superpuestas las agujas de un reloj?

A) 4:32 *B) 4:36 $\frac{2}{11}$* *C) 4:48 $\frac{3}{11}$* *D) 4:21 $\frac{9}{11}$* *E) 4:48 $\frac{9}{11}$*

Resolución:

Sea $4 : x$ la *hora* que buscamos, el ángulo si están superpuestas las agujas es cero (0), luego:

$$0 = \left|\frac{11}{2}(x) - 30(4)\right| \Rightarrow x = \frac{240}{11} = 21\frac{9}{11}$$

Podemos precisar la respuesta pasando la fracción de minuto a segundos:

$$x = 21\,min\ \frac{9min}{11} \times \frac{60s}{1\,min} = 21\,min\ 49\frac{1}{11}\,s$$

A las $4{:}21\,\frac{9}{11}\,min$ ó $4{:}21\,min\ 49\frac{1}{11}\,s.$ RPTA. D

14.- ¿A qué hora entre las 10 y las 11, estarán las agujas de un reloj en línea recta?

A) 10:00 *B) 9:17* *C) 7:10* *D) 8:15$\frac{5}{12}$* *E) 10:21$\frac{9}{11}$*

Resolución:

Las agujas en línea recta corresponden a un ángulo de 180° y la hora será 10 : x, luego aplicamos la fórmula :

$$180 = \left|\frac{11}{2}(x) - 30(10)\right|$$

$$\text{ó} \quad 180 = \left|30(10) - \frac{11}{2}(x)\right|$$

Eliminamos las barras de valor absoluto en la 2da igualdad porque $x < 30$ y sólo en esa forma la diferencia es positiva.

$$180 = 300 - \frac{11x}{2} \Rightarrow x = \frac{240}{11} = 21\frac{9}{11}$$

A las 10:21 $\frac{9}{11}$ **RPTA. E**

15.- ¿Cuántas veces por día aparecen superpuestas las agujas de un reloj?

A) 12 *B) 24* *C) 19* *D) 22* *E) 10*

Resolución:

Para las primeras 12 *horas* del día:

- Entre las 0:00 y la 1:00 no se superponen.
- Entre la 1:00 y las 2:00 se superponen una sola vez.
- Entre las 2:00 y las 3:00 se superponen una sola vez.

⋮

⋮

- Entre las 10:00 y las 11:00 se superponen una sola vez.
- Entre las 11:00 y las 12:00 se superponen a las 12.

Como no se superponen en la 1ra hora, pero en los demás sí, habrá 11 superposiciones en la 1ra mitad del día.

Entonces, en todo el día : 11 × 2 = **22 superposiciones.**

RPTA. D

MISCELANEA

16.- *Una mecanógrafa puede completar una tarea en 3 horas. ¿Qué parte de su tarea puede hacer ella desde las 8:55 pm. hasta las 9:15 pm?*

A) $\frac{1}{2}$ *B)* $\frac{1}{3}$ *C)* $\frac{1}{5}$ *D)* $\frac{1}{6}$ *E)* $\frac{1}{9}$

Resolución:

Desde las 8:55 hasta las 9:15 hay 20 *min*.

Como la tarea se hace en 3 *horas* ó 180 *min*, la parte que puede hacer es:

$$\frac{20}{180} = \frac{1}{9}$$ RPTA. E

17.- *Las longitudes del horario y minutero de un reloj son 6 cm y 8 cm repectivamente. ¿A qué distancia se encuentran las puntas de dichas manecillas a las 3 pm.?*

A) 12 cm *B) 9 cm* *C) 10 cm* *D) 7,5 cm* *E) N.A.*

Resolución:

A las 3 *pm* las agujas están en ángulo recto, siendo los catetos 6 y 8, entonces la distancia pedida es la hipotenusa (x).

$$x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10\ cm.$$ RPTA. C

18.- *Una luz se enciende cada 11 minutos y una segunda luz se enciende cada 6 minutos. Si ambas luces se encienden a las 5 pm. ¿A qué hora se volverán a encender ambas simultáneamente?*

A) 5:42 pm *B) 5:08 pm* *C) 5:16 pm* *D) 5:17 pm* *E) 6:06 pm*

Resolución:

Basta con hallar el mínimo común múltiplo de 11 y 6, que es $11 \times 6 = 66\ minutos = 1h\ 6min$

$$5\ pm + 1h\ 6min = 6\ h\ 6\ min.$$ RPTA. E

19.- *Un reloj se atrasa diez minutos cada día. ¿Cuántos días transcurrirán para alcanzar un punto donde el reloj indicará la hora correcta?*

A) 36 *B) 72* *C) 120* *D) 142* *E) 144*

Resolución:

El reloj debe atrasarse 12 *horas* ó $12 \times 60 = 720\ min$. Como cada día se atraza 10 *minutos*, esto ocurrirá en :

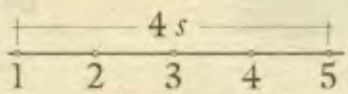
$$720 \div 10 = 72\ días$$ RPTA. B

20.- Un reloj demora 4 segundos en dar las 5; la primera campanada suena exactamente a las 5. Las campanadas están uniformemente espaciadas. ¿Cuántos segundos tardará en dar las 10?

A) $7\frac{1}{4}$ *B) 8*   *C) 9*   *D) 10*   *E) 12*

Resolución:

Según el diagrama:



los intervalos entre campanadas

duran $4\,s \div 4 = 1\,s$

Para dar las 10, deben transcurrir 9 intervalos y esto tarda en:

$9 \times 1 =$ **9 s.**   RPTA. C

21.- Un reloj que se adelanta 2 minutos cada hora se sincroniza a medianoche con un reloj que pierde 1 minuto cada hora. ¿Cuántos grados formarán los minuteros de ambos relojes al mediodía?

A) 84   *B) 72*   *C) 0*   *D) 180*   *E) 144*

Resolución:

En cada hora la discrepancia entre los relojes es de $2 + 1 = 3$ *min*. Durante 12 *horas* esta discrepancia será de $3 \times 12 = 36$ *min* y el ángulo que forman medirá:

$36 \times 6 = 216°$ ó $360° - 216° =$ **144°**   RPTA. E

22.- Un reloj se pone en hora a las 8 de la mañana y adelanta 2 minutos y 24 segundos cada 24 horas. ¿Qué hora será cuando marque las 10 horas y 50 minutos de la noche del mismo día?

A) 10 h 42 m   *B) 10 h 45 m 30 s*   *C) 10 h 40 m 24 s*

D) 10 h 36 m 10 s   *E) 10 h 48 m 31 s*

Resolución:

Por cada 24 *horas* de tiempo normal el reloj marca 24:02:24 y como desde las 8 de la mañana hasta las 10:50 de la noche, ha marcado 14:50, podemos plantear esta regla de tres:

Tiempo del Reloj		Tiempo Normal
24 : 02 : 24	....	24 : 00 : 00
14 : 50	....	x

$$x = \frac{(14:50)\ (24:00:00)}{24:02:24} = 14:48:31$$

La hora normal será: $8 + 14:48:31 =$ **22:48:31** RPTA. E

23.- Indicar cuántos minutos después de las 2 pm forman un ángulo recto las manecillas de un reloj.

A) $\frac{260}{11}$ *min* *B)* $\frac{250}{11}$ *min* *C)* $\frac{270}{11}$ *min* *D)* $\frac{300}{11}$ *min* *E)* $\frac{200}{11}$ *min*

Resolución:

En la fórmula reemplazamos $\alpha = 90$ y $H = 2$; luego despejamos m.

$$90 = \left|\frac{11}{2}(m) - 30(2)\right| \ ; \quad \frac{11}{2}(m) > 60$$

$$\Rightarrow \quad 90 = \frac{11}{2}m - 60 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{300}{11}$$ RPTA. D

24.- Después de las 3:00 ¿Cuál es la hora más próxima en que las agujas de un reloj forman un ángulo llano?

A) 3:49 *B)* $3:49\frac{7}{11}$ *C)* $3:49\frac{1}{11}$ *D) 3:50* *E)* $3:49\frac{2}{11}$

Resolución:

$m = ?$; $\alpha = 180$; $H = 3$

$$180 = \left|\frac{11}{2}(m) - 30(3)\right| \Rightarrow m = \frac{540}{11} = 49\frac{1}{11} \Rightarrow \text{hora}: \ 3:49\frac{1}{11}$$ RPTA. C

25.- ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 3h 48 min.?

A) 148° *B) 156°* *C) 172°* *D) 174°* *E) 126°*

Resolución:

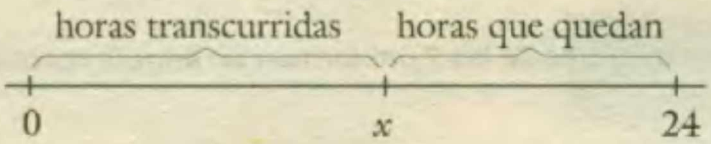
$m = 48$; $H = 3$; $\alpha = ?$

$$\alpha = \frac{11}{2}(48) - 30(3) = 264 - 90 = 174°$$ RPTA. D

26.- Consultando por la hora una persona contesta : "Las horas que quedan del día , son menores en 6 que las horas transcurridas". ¿Qué hora será dentro de 3 1/2 horas?

A) 18:30 *B) 18:25* *C) 18:35* *D) 18:20* *E) N.A.*

Resolución:



Del diagrama : $24 - x = x - 6$

$x = 15$

Dentro de $3\frac{1}{2}$ horas serán las $15 + 3\frac{1}{2} = 18\frac{1}{2}$

Es decir las : 18:30 ó 6:30 *pm*. **RPTA. A**

27.- Si el duplo de las horas transcurridas en un día es igual al cuádruplo de las que faltan para terminar el día. ¿Qué hora será dentro de 4 horas?

A) 18:00 *B) 19:00* *C) 20:00* *D) 21:00* *E) N.A.*

Resolución:

Horas transcurridas : x

Horas que faltan : $24 - x$

$\therefore \quad 2x = 4\,(24 - x) \quad \Rightarrow \quad x = 16$

Dentro de 4 horas serán las : 20 horas ó 8 *pm*. **RPTA. C**

28.- Ya pasaron las 3 sin ser las 4 de esta tarde. Si hubieran pasado 25 minutos más faltarían para las 5:00pm. los mismos minutos que pasaron desde las 3:00pm. hasta hace 15 minutos. ¿Qué hora es?

A) 3:50 *B) 3:55* *C) 3:58* *D) 3:59* *E) N.A.*

Resolución:

Hora real : $3 : x$

Si hubieran pasado 25 minutos más serían las $3{:}(x+25)'$

Y para las 5 faltarían $5{:}00 - 3{:}(x+25)'$

Esta última diferencia sería igual a : $(x + 15)'$, entonces : $5{:}00 - 3{:}(x + 25) = 0{:}(x - 15)$

$5{:}00 = 3{:}(2x + 10)$

Es decir : $2x + 10$ son 2 horas ó : $2x + 10 = 120$

Resolviendo : $x = 55'$

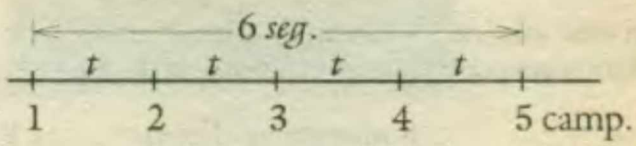
Entonces esto ocurre a las : **3:55** **RPTA. B**

29.- Un campanario señala las horas con igual número de campanadas; si para indicar las 5:00 am. demora 6 segundos. ¿Cuánto demora para indicar las 12:00m?

A) 16,2 s ***B) 16,3 s*** ***C) 15,4 s*** ***D) 16,5 s*** ***E) 16,6 s***

Resolución:

Para dar las 5 debe dar 5 campanadas, luego entre ellas debe haber pausas de 1,5 segundos.



Para dar las 12 , el número de pausas es 11.

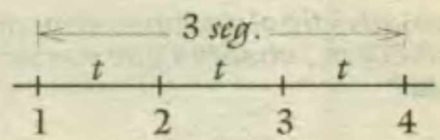
Luego el tiempo total será : $11\,t = 11\,(1{,}5) =$ **16,5 *s*** RPTA. D

30.- Un campanario tarda 3s. en tocar 4 campanadas. ¿Cuánto tiempo tardará en tocar 8 campanadas y cuánto para tocar 14 campanadas?

A) 7 ; 12 ***B) 7 ; 13*** ***C) 8 ; 13*** ***D) 8 ; 12*** ***E) N.A.***

Resolución:

1) Tarda 3 *s* en tocar 4 campanadas.



$\therefore\ 3t = 3 \Rightarrow t = 1$

2) En tocar 8 campanadas : $7t =$ **7 *s*.**

3) En tocar 14 campanadas : $13t =$ **13 *s*.** RPTA. B

31.- Un reloj se adelanta 2' cada 3 horas. ¿A qué hora empezó a adelantarse si a las 11 y cuarto de la noche señala 11 con 27 minutos?

A) 5:15 ***B) 5:16*** ***C) 5 : 17*** ***D) 5 : 18*** ***E) 5 : 19***

Resolución:

Si a las 11:15 señala 11:27, lleva 12 minutos de adelanto, entonces :

Tiempo de adelanto		Tiempo transcurrido
2 *min.*	....	3 *horas*
12 *min.*	....	x

Entonces : $x = \dfrac{12 \cdot 3}{2} = 18$ *horas*

Y empezó a adelantarse 18 horas antes de las 11:15*pm.* , es decir a las : **5:15 *am.***

RPTA. A

32.- *Siendo las 5pm. un reloj empezó adelantarse a razón de 8 minutos por hora. ¿Dentro de cuántas horas volverá a marcar la hora correcta por primera vez?*

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución:

Para que vuelva a marcar la hora exacta, debe transcurrir un tiempo suficiente para que el adelanto respecto a la hora real sea de 12 horas. Entonces planteamos :

8 *min* de adelanto .... 1 *h* de tiempo transcurrido

12 *horas* de adelante .... *x*

$$\therefore \quad x = \frac{(12\,horas)\,(1\,hora)}{8\,min} = 90\,horas$$

Estas 90*horas* equivalen a 3*días* y 8*horas*, que transcurridas luego de las 5*pm*. del día inicial, dan las 1:00 *horas* (1 de la madrugada) de 3 *días* después.

RPTA. A

33.- *Manuel advirtió el día lunes al medio día que su reloj marcaba las 11:58am., el miércoles a las 8:00pm., observó que su relcj marcaba 8:01 pm. ¿En qué día y hora marcó la hora exacta?*

A) 5:10 pm. *B) 5:15 pm.* *C) 5:20 pm.* *D) 5:25 pm.* *E) N.A.*

Resolución:

Planteamos la proporción de acuerdo al esquema :

$$\frac{x - 11{:}58}{8{:}01 - 11{:}58} = \frac{x - 12{:}00}{8{:}00 - 12{:}00}$$

$$\frac{x - 11{:}00}{44{:}03} = \frac{x - 12{:}00}{44{:}00}$$

Resolviendo $x = 41{:}20$ que equivalen a 17:20 del día Martes.

Reloj de Manuel	Reloj Real
11:58 (lunes)	12:00 (lunes)
x	x
8:01 (miércoles)	8:00 (miércoles)

RPTA. C

34.- *Un reloj se adelanta a razón de 4 minutos por hora, se pone a la hora a las 2 de la tarde. En la mañana del día siguiente, se observa que dicho reloj está marcando las 10 en punto. ¿Cuál es la hora correcta en ese momento?*

A) 8:40 am *B) 8:42 am* *C) 8:44 am* *D) 8:45 am* *E) N.A.*

Resolución:

Desde las 2 de la tarde, hasta las 10 del día siguiente, el tiempo del reloj malogrado es : 20 *horas*.

Tiempo real		Tiempo del reloj
60 *min*	....	64 *min*
x	....	20 *horas*

$$\therefore \quad x = \frac{60 \times 20}{64}\ horas = 18{:}45$$

Hora correcta : 2:00 *pm.* + 18:45 *am.* del día siguiente. **RPTA. D**

35.- ¿Cuál es el ángulo formado por las manecillas de un reloj a las 5:10 pm?

A) 91º *B) 92º* *C) 93º* *D) 94º* *E) 95º*

Resolución:

Aplicando : $\alpha = \left|\frac{11}{2}m - 30\text{H}\right|$

Las 5:10 implica H = 5 ; m = 10

$$\therefore \quad \alpha = \left|\frac{11}{2}\cdot 10 - 30\cdot 5\right| = |55 - 150|$$

$$\alpha = |-95| = \mathbf{95^o}$$ **RPTA. E**

36.- ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj en cada caso?

A) 130º *B) 134º* *C) 138º* *D) 139º* *E) N.A.*

Resolución:

a) $\alpha = \frac{11}{2}\cdot 30 - 30\cdot 6 = |-15^o| = 15$

b) $\alpha = \frac{11}{2}\cdot 20 - 30\cdot 4 = |110 - 120| = 10^o$

c) $\alpha = \frac{11}{2}\cdot 36 - 30\cdot 2 = |198 - 60| = \mathbf{138^o}$ **RPTA. C**

37.- ¿A qué hora entre las 2 y las 3, las agujas de un reloj están superpuestas?

A) 2:10 $\frac{10}{11}$ *B) 2:10 $\frac{11}{10}$* *C) 2:09 $\frac{10}{11}$*

D) 2:12 $\frac{11}{10}$ *E) N.A.*

Resolución:

Si las agujas están superpuestas, el ángulo es nulo, $\alpha = 0$; H = 2 ; m = ?

Entonces : $0 = \left| \frac{11}{2} \cdot m - 30 \cdot 2 \right|$

Resolviendo : $m = \frac{120}{11} = 10\,\frac{10}{11}$

A las : $2{:}10\,\frac{10}{11}$ **RPTA. A**

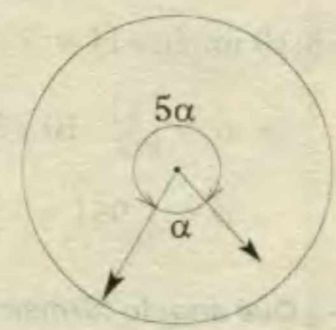
38.- ¿A qué hora entre las 4 y las 5 el ángulo interior será 1/5 del ángulo exterior que forman tanto el horario como el minutero?

A) 4:32 $\frac{8}{10}$ *B) 4:31 $\frac{8}{11}$* *C) 4:32 $\frac{8}{11}$*

D) 4:35 $\frac{8}{10}$ *E) 4:34 $\frac{8}{10}$*

Resolución:

Si el ángulo interior (α) es $\frac{1}{5}$ del exterior, este último será 5α, entonces :



$$\alpha + 5\alpha = 360$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Luego aplicamos la fórmula : $60 = \left| \frac{11}{2} \cdot m - 30 \cdot 4 \right|$

Resolviendo : $m = 32\frac{8}{11} \Rightarrow$ $4{:}32\,\frac{8}{11}$ **RPTA. C**

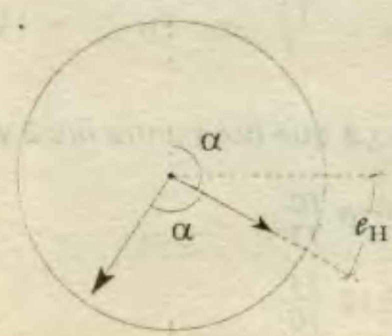
39.- ¿A qué hora inmediatamente después de las 3 pm. el minutero adelanta al horario tanto como el horario adelanta la marca de las 12?

A) 3:30 *B) 3:32* *C) 3:34* *D) 3:36* *E) 3:38*

Resolución:

Se sabe que : $e_H = \frac{e_m}{12}$

$\therefore \quad e_H = \frac{2\alpha}{12} = \frac{\alpha}{6}$



Además : $\alpha - \frac{\alpha}{6} = 15$

$\alpha = 18 \;;\; 2\alpha = 36$

La situación descrita ocurre a las : 3:36 **RPTA. D**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- ¿Cuál es la mitad de 7 *horas*, 15 *minutos*, 6 *segundos*?

A) $3h\ 53m\ 16s$ D) $3h\ 37m\ 33s$

B) $3h\ 53m\ 36s$ E) Ninguna anterior

C) $5h\ 37m\ 3s$

2.- Si un reloj tarda 2 *segundos* en dar las 2 ¿Cuántos segundos tardará en dar las 6?

A) $3s$ B) $1s$ C) $5s$ D) $6s$ E) N.A.

3.- Hallar el número de *días, horas, minutos* y *segundos* que hay en 541 240 *segundos*.

A) $6d\ 6h\ 20m\ 40s$ D) $6d\ 8h\ 16m\ 40s$

B) $6d\ 8h\ 16m\ 20s$ E) $6d\ 8h\ 20m\ 40s$

C) $6d\ 6h\ 20m\ 20s$

4.- Cierto día el sol apareció a las 7:30 *am* y se ocultó a las 5:15 *pm* ¿Cuántas horas y minutos estuvo alumbrando el sol?

A) $9h\ 45min$ B) $2h\ 15min$ C) $10h\ 45min$

D) $10h\ 15min$ E) N. A.

5.- ¿A qué hora los $\frac{2}{3}$ de lo que queda del día es igual al tiempo que ya pasó?

A) 9:16 *am* B) 8:20 *am* C) 9:20 *am*

D) 8:16 *am* E) 9:36 *am*

6.- Un reloj se adelanta 3 *minutos* cada 4 *horas* ¿Cuánto habrá adelantado al cabo de una semana?

A) $2h\ 12m$ B) $2h\ 6m$ C) $2h\ 8m$

D) $2h\ 2m$ E) N.A.

7.- El ángulo formado por las manecillas de un reloj que marca las $8h\ 30min$ es:

A) 45° B) 60° C) 30°

D) mayor que 60° pero menor que 90°

E) mayor que 45° pero menor que 50°

8.- ¿En qué momento las agujas de un reloj forman un ángulo de 123° entre las 9 y las 10?

A) 9:15' B) 9:15' 23" C) 9:06' 06"

D) 9:06' E) 9:26'

9.- ¿Qué ángulo forman las manecillas de un reloj a las $3h\ 38'$?

A) 54° B) 106° C) 110,5° D) 119° E) 130°

10.- Un reloj de pared da igual número de campanadas según las horas marcadas y cada 15 *minutos* da una campanada. ¿Cuántas campanadas dará desde el mediodía hasta las 5 *pm.*?

A) 84 B) 48 C) 60 D) 42 E) N.A.

11.- Juan trabaja durante 4 *días*. El primero trabaja 2 *horas* 15 *minutos* y luego, cada vez, $1h\ 25min$ más que el anterior. ¿Cuánto tiempo trabajó en total?

A) 15:30 B) 17:30 C) 24:00

D) 18:45 E) 12:55

12.- ¿A qué hora del día se cumple que el triple de lo que falta transcurrir es igual al doble de lo que ya transcurrió?

A) 14:24 B) 14:40 C) 12:30

D) 10:40 E) 15:30

13.- Un reloj se atrasa 15 segundos cada hora ¿Cuántos minutos deben transcurrir para que se atrase media hora?

A) 600 B) 6 000 C) 720

D) 7 200 E) 900

14.- Hace 6 *horas* el reloj de la catedral se atrasa 2 minutos cada hora ¿Cuál será la hora exacta si dicho reloj está marcando las 12:24 ?

A) 12:18 B) 12:12 C) 12:36

D) 12:48 E) 12:30

15.- ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 2:12?

A) 30° B) 12° C) 5° D) 6° E) 10°

16.- ¿Qué hora será cuando las manecillas del reloj se encuentran superpuestas entre las 3 y las 4?

A) 3 *h* 12 *min* 21 7/12 *s*

B) 3 *h* 14 *min* 12 3/7 *s*

C) 3 *h* 16 *min* 21 9/11 *s*

D) 3 *h* 20 *min* 14 3/11 *s*

E) N.A.

NIVEL B

17.- Juan sale de su casa según su reloj a las 7:05 *am* y llega a la oficina a las 8:20 *am*. Luego se entera que su reloj estaba atrazado 12 *minutos* y el de la oficina tenía un adelanto de 5 *minutos*. Exactamente ¿cuántos *minutos* demoró en llegar a la oficina?

A) 53 *min* B) 59 *min* C) 1 *h* 01 *min*

D) 25 *min* E) N.A.

18.- En una escuela las clases empiezan a las 9:15 de la mañana y terminan a las 12:50. Si las clases están distribuídas en 4 periodos iguales con 5 *min* de intermedio entre ellos. ¿A qué hora termina el segundo intermedio?

A) 10:50 B) 11:15 C) 11:00

D) 11:05 E) N.A.

19.- Un reloj se atrasa 4 *minutos* cada 24 *horas*. Si el reloj marca las 6 *am* (hora exacta) del 1° de Febrero ¿Qué hora marcará al mediodía del 6 de Febrero?

A) 11:24 B) 12:24 C) 10:56

D) 11:39 E) N.A.

20.- Son las 6 *pm* sin embargo un reloj malogrado indica las 6:42 sabiendo que por cada 2 *horas* se adelanta 7 *minutos* ¿A qué hora marcará la hora exacta?

A) 6 *am* B) 6 *pm* C) 12:00

D) 0:00 E) N.A.

21.- Un reloj señala las 5*h* 36*min*. ¿A cuántos grados de la marca de las 12:00 se encuentra el horario?

A) 144° B) 172° C) 168° D) 96° E) N.A.

22.- Un reloj se atrasa 3 *minutos* por cada día. Si después de haber funcionado 7 *días* completos señala las 8*h* 14*min* ¿Qué hora es en realidad?

A) 9:10' B) 10:12' C) 8:35'

D) 8:42' E) 9:20'

23.- ¿A qué hora entre las 4 y las 5 de la tarde las manecillas de un reloj se encuentran en oposición?

A) 4*h* 53 6/11 *min* D) 4*h* 54 1/11 *min*

B) 4*h* 54 6/11 *min* E) N.A.

C) 4*h* 54 *min*

24.- Entre las 7 y las 8 ¿A qué hora el minutero habrá adelantado al horario exactamente en 5 divisiones?

A) 7*h* 43*min* D) 7*h* 43*min* $\frac{7}{11}$ *s*

B) 7*h* 43*min* 11*s* E) N.A.

C) 7*h* 43 $\frac{7}{11}$ *min*

25.- Señalar cuánto tiempo después de la 1 *pm* forman un ángulo de 120° las manecillas de un reloj.

A) $\frac{180}{11}$ *min* B) $\frac{300}{11}$ *min* C) $\frac{300}{13}$ *min*

D) $\frac{320}{11}$ *min* E) $\frac{321}{11}$ *min*

26.- A qué hora exactamente entre las 4 y las 5, las agujas del reloj forman ángulo recto por primera vez?

A) 4*h* 05*m* 21*s* D) 4*h* 5*min* $\frac{2}{11}$ *s*

B) 4*h* 5 $\frac{5}{11}$ *min* E) N.A.

C) 4*h* 5*m* $\frac{5}{11}$ *s*

27.- Se le preguntó la hora a un profesor y el responde: "Queda del día e[illegible] oras, la suma de las dos cifras que form[illegible] el número de las horas transcurridas". ¿[illegible]ué hora es?

A) 11*pm* B) 6*pm* C) 8*pm* D) 10*pm* E) N.A.

28.- Si fueran 3 horas más tarde de lo que es, faltaría para acabar el día, 5/7 de lo que faltaría si es que fuera 3 horas más temprano. ¿Qué hora es?

A) 5:00 B) 2:00 C) 6:00 D) 3:00 E) N.A.

29.- Supongamos que un campanario toca 5 campanadas en 8*s*. ¿Cuántos tocará en 12*s*. y cuánto en 16*s*?

A) 1 y 2 B) 2 y 3 C) 7 y 9 D) 2 y 4 E) N.A.

30.- Siendo las 8:00*am*.. empieza adelantarse un reloj a razón de 5*minutos* por cada hora. ¿Qué hora estará marcando este reloj, cuando en realidad sean las 10:00*pm*. del mismo día?

A) 9:10 B) 11:10 C) 12:14 D) 8:15 E) N.A.

31.- Un reloj tiene 3 *minutos* de atraso y se atrasa 3*s* por minuto. Sabiendo que son las 12:00*am*. de un lunes. ¿A qué hora el reloj tendrá un retraso de 1 *hora*?

A) 7*pm*. martes B) 6*pm*. lunes

C) 5*pm*. lunes D) 2*pm*. martes

E) 3*pm*. lunes.

NIVEL C

32.- Si del día faltan tantas *horas* completas como *minutos* han transcurridodc la hora en que estamos. Además los *minutos* que faltan para la hora siguiente son el cuádruple de las *horas* completas que faltan del día. ¿Qué hora es?

A) 10:36*am* B) 12:48*pm* C) 14:20*pm*

D) 11:12*am* E) 11:16*am*

33.- Un reloj se adelanta *media hora* cada día. Si se pone a la hora exacta a las 6:00 ¿Qué hora será más tarde cuando el reloj marque las 8:27?

A) 8:22 B) 8:23 C) 8:24

D) 8:25 E) 8:26

34.- Enrique comienza un viaje cuando las manecillas del reloj están superpuestas entre las 8 y las 9 *am*. Llega a su destino entre las 2 y las 3 *pm* cuando las manecillas del reloj forman un ángulo de 180° ¿Qué tiempo demoró el viaje?

A) 6*h* B) 6*h* 30*min* C) 5*h* 20*min*

D) 6*h* 20*min* E) N.A.

35.- ¿Cada cuánto tiempo las agujas de un reloj forman entre sí un ángulo de 90°?

A) Cada 15' D) Cada 43' 32 $\frac{7}{11}$ *s*

B) Cada 32 $\frac{8}{11}$ *min* E) N.A.

C) Cada 38' 43 $\frac{7}{11}$ *s*

36.- Miro el reloj y observo que la aguja de las horas está en una marca y el minutero está sobre la marca siguiente. ¿Qué hora es?

A) 3:20 B) 4:25 C) 2:12

D) 1:06 E) 6:31

37.- Es medió día, las agujas del reloj forman un ángulo llano ¿Qué parte de lo que queda del día es el tiempo transcurrido?

A) $\frac{38}{39}$ B) $\frac{23}{17}$ C) $\frac{24}{23}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{32}{21}$

38.- Suponiendo que las agujas de un reloj se mueven sin saltos, ¿Cuánto tardará la aguja de minutos en alcanzar a la horaria si el punto de partida fue a las 4 en punto?

A) $20\frac{3}{11}$ *min* B) $21\frac{9}{11}$ *min* C) $22\frac{7}{11}$ *min*

D) $23\frac{1}{2}$ *min* E) 25 *min* 12 *s*

39.- Un obrero puede hacer una obra en 3 *horas*. ¿Qué parte de su tarea puede hacer si empieza a las 8 *horas* y 37 *minutos* y se retira a las 9 *horas* y 22 *minutos*?

A) 1/2 B) 1/3 C) 2/3 D) 1/4 E) 5/8

40.- Un reloj demora (m + 1) *segundos* en tocar m^2 campanadas. ¿Cuántas campanadas tocará en (m - 1) *segundos*.?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

41.- Un reloj se adelanta dos minutos cada 3 *horas*. ¿Qué hora será en realidad cuando marque las 10:15*am*. si hace 30*horas* lleva adelantándose?

A) 9:10 B) 9:20 C) 9:30 D) 9:40 E) 9:55

42.- Un reloj se adelanta 4 *minutos* por hora y otro se atrasa 1 *minuto* por hora. Si empiezan el miércoles 22 de mayo a las 12:00*m*. exactamente. ¿En qué fecha volverán a señalar la misma hora?

A) 28; junio B) 28.mayo C) 30.mayo

D) 25.mayo E) 22.junio

43.- María observa que su reloj a las 6 *pm*. estaba con 1 *minuto* de atraso; luego en la mañana del día siguiente cuando son las 10 se percata que su reloj está adelantado 7 *minutos*. ¿A qué hora dicho reloj marcó la hora correcta?

A) 6*pm* B) 7*pm* C) 8*pm* D) 9*pm* E) N.A.

44.- ¿Cuál es el mayor ángulo formado por las agujas de un reloj cuando sean 8:27 *pm*?

A) 90,5° B) 92,5° C) 91,5° D) 95,5° E) N.A.

45.- Faltan 5 para las 12. ¿Qué ángulo estarán formando las agujas del reloj?

A) 20,5° B) 30° C) 27,5° D) 15° E) 37°

46.- ¿A qué hora después de las 3, el horario dista de las 3 tanto como el minutero dista de las 7, después de haberla pasado?

A) $2h\,35\frac{2}{11}$ B) $3h\,30\frac{2}{11}$ C) $3h\,38\frac{2}{11}$

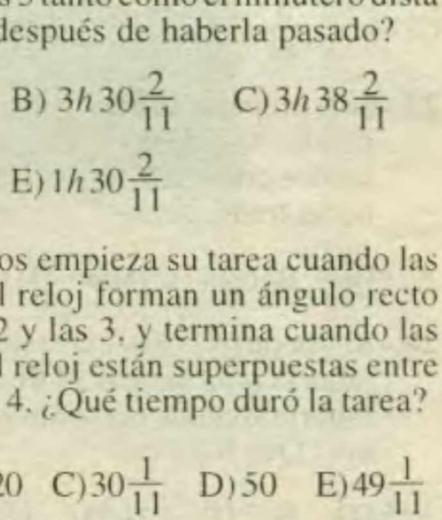
D) $4h\,40\frac{2}{11}$ E) $1h\,30\frac{2}{11}$

47.- Un alumnos empieza su tarea cuando las agujas del reloj forman un ángulo recto entre las 2 y las 3, y termina cuando las agujas del reloj están superpuestas entre las 3 y las 4. ¿Qué tiempo duró la tarea?

A) $40\frac{1}{11}$ B) 20 C) $30\frac{1}{11}$ D) 50 E) $49\frac{1}{11}$

48.- ¿Qué magnitud tienen los ángulos formados por las agujas de los relojes mostrados?

A) 140; 155
B) 110; 105
C) 150; 165
D) 170; 175
E) 130; 185



49.- ¿Qué hora marca el reloj mostrado?

A) $9{:}23\frac{9}{11}$

B) $9{:}21\frac{9}{11}$

C) $9{:}22\frac{9}{11}$

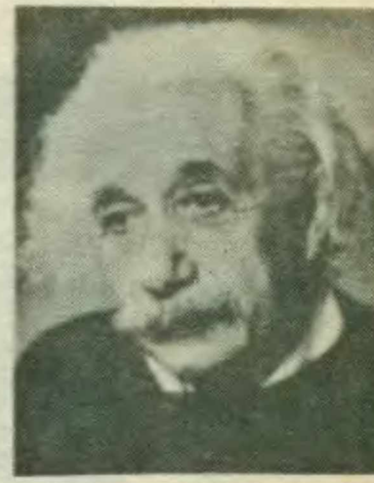
D) $9{:}25\frac{9}{11}$

E) $9{:}31\frac{9}{11}$



EL RELOJ DE EINSTEIN





Cuentan que estando el famoso sabio postrado en el lecho, recibió la visita de A. Moshkovski que para procurarle alguna distracción le propuso el siguiente problema:

Tomemos un reloj que tenga las manecillas a las 12. Cambiando la función de las manecillas, es decir, que el minutero avanzara a la velocidad del horario y viceversa, a las 12 no se notaría, porque ambas estarían juntas. Pero a otras *horas*, por ejemplo a las seis, nos resultaría un absurdo, porque el minutero no puede hallarse en las 6 cuando el horario haya recorrido exactamente seis *horas*. Entonces se puede proponer :

¿Cuándo y cada cuánto tiempo ocupan las manecillas de un reloj normal una posición que al cambiar la función de las manecillas nos den posiciones similares a las normales?

Como no podía faltar la anécdota, dicen que Einstein contestó a su interlocutor : «Sí, este problema es muy apropiado para un hombre obligado por su enfermedad a permanecer postrado en su lecho, porque es interesante y no demasiado fácil. Pero me temo que mi distracción me durará poco, porque he dado ya con la forma de resolverlo».

E incorporándose en el lecho, en pocos trazos dibujó un esquema que reflejaba las condiciones del problema. ¿Cómo se resuelve?.

En todo problema relacionado con las manecillas del reloj hay que tener en cuenta las velocidades relativas de éstas. Ambas están en la relación 5/60, o lo que es lo mismo, 1/12. Dividiendo la esfera en 60 divisiones, llamemos x al número de divisiones recorridas por el horario y asimismo, y a las recorridas por el minutero. Advirtamos que siendo nuestros relojes regidos por el sistema sexagesimal, el minutero recorre y divisiones en y *minutos*, o sea, en $y/60$ *horas*.

El minutero habrá pasado la cifra 12 hace $y/60$ *horas*, en tanto que el horario habrá recorrido $x/5$ *horas*, luego :

$$\frac{y}{5} = \frac{x}{60}$$

Igualdad que debe ser equivalente a un número entero. Planteando el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{60} = a$$

$$\frac{y}{5} - \frac{x}{60} = b$$

Podemos despejar x e y sabiendo que tanto a como b tienen que ser números enteros comprendidos entre 0 y 12.

$$x = \frac{60(12a+b)}{143} \qquad y = \frac{60(12b+a)}{143}$$

Dando ahora valores entre 0 y 12 a a y b, determinaremos todas las posiciones que se requieren en el problema para ambas manecillas. Parece que siendo 12 los valores posibles, podríamos obtener 12 × 12 = 144 posiciones, pero hay que tener en cuenta que cuando $a = 0$ y $b = 0$, la posición es la misma que si los valores son $a = 11$ y $b = 11$, porque resulta $x = y = 60$, es decir se repite la posición de las manecillas señalando las 12 en ambos casos.

Para el valor $a = 1$ y $b = 1$, resulta :

$$x = 5\,\frac{5}{11} \qquad y = 5\,\frac{5}{11}$$

O sea, una *hora*, 5 *minutos* y 5/11 de *minuto*.

En este momento, las dos saetas están en el mismo sitio, por lo que pueden intercambiarse. Para $a = 8$ y $b = 5$, resulta $x = 42{,}38$ e $y = 28{,}53$, o sea, a las 8 *horas* y 28,53 *minutos* y a las 5 *horas* y 42,38 *minutos*.

Ya queda indicado que el número de soluciones es 143. Dividiendo la esfera en 143 partes iguales, obtendremos los puntos buscados.

Esta solución permite resolver el conocido problema de relojes para hallar el instante en que a partir de las 12 *horas*, las dos manecillas vuelven a estar de nuevo por primera vez una sobre otra.

Aprovechando las dos últimas ecuaciones planteadas, podemos hallar en cuántas posiciones pueden coincidir el horario y el minutero de un reloj que marche normalmente.

Si ambas saetas coinciden podrán cambiar sus funciones sin que en esos momentos se produzca alteración ninguna. Ambas manecillas habrán recorrido el mismo número de divisiones a partir del número 12. Es decir, que en nuestras ecuaciones sucede que $x = y$, y en tal caso se simplifican todos los razonamientos precedentes.

Sabíamos que :

$$\frac{x}{5} - \frac{x}{60} = a$$

Puesto que $x = y$, y como a es un entero comprendido entre 0 y 12.

$$x = \frac{60m}{11}$$

Y de los 12 valores de a obtenemos 11 posiciones diversas. No 12 porque cuando $a = 11$, resulta $x = 16$ y vuelve a repetirse la primera posición, es decir, las dos manecillas están de nuevo en las 12. Lo mismo ocurre cuando $a = 0$.

18 Criptoaritmética

En 1931 la revista de Matemática Recreativa Sphinx (Bélgica) público un artículo de M. Vatrignant quien utilizaba la palabra "Cryptarithm" (Criptoaritmética) para denominar al procedimiento de encontrar cifras *ocultas* o representadas con letras y símbolos en una operación aritmética.

En algunos enunciados criptoaritméticos se utilizan las letras para formar palabras asociadas a un mensaje o frase curiosa que tiene coherencia verbal, aparte de su coherencia matemática.

En muchos enunciados, las cifras que se deben encontrar, han sido reemplazadas por símbolos en lugar de letras, utilizándose de preferencia los asteriscos.

TIPOS DE ENUNCIADOS CRIPTOARITMETICOS :

AB +	CINCO -	8 * 7 * +
BC	TRES	5 6 * 9
BCB	DOS	1 * 3 3 6
(I)	**(II)**	**(III)**

En (I) no hay coherencia verbal entre las letras que forman el acertijo; en (II) las letras forman palabras que tiene sentido y aún más, afirman una verdad matemática (estos son los enunciados más seductores) y en (III) sólo hay que descubrir lo que esconde cada asterisco.

NORMA PRINCIPAL.- Generalmente, letras diferentes representan a dígitos diferentes y tiene el mismo valor ahí donde se repita. Cuando se trata de asteriscos (*), cada uno representa a un dígito cualquiera, pudiendo repetirse o no.

ADVERTENCIA.- El interés por este tipo de problemas radica en su aparente sencillez, ya que sólo se deben dominar las propiedades de las operaciones aritméticas básicas, sin embargo, algunas soluciones pueden exigir numerosas hipótesis y en consecuencia cálculos tediosos que implican grandes riesgos de confusión. Por este motivo se recomienda mucha paciencia y meticulosidad.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- *Reconstruya la operación que se indica, donde cada letra diferente representa a un dígito diferente.*

$$\begin{array}{r} CDU\ + \\ DU \\ \hline DCU \end{array}$$

Resolución:

Analizando la columna de unidades deducimos que el único número U que sumado consigo mismo dé el mismo número, es el 0. Luego la operación queda parcialmente así:

$$\begin{array}{r} C\,D\,0\ + \\ D\,0 \\ \hline D\,C\,0 \end{array}$$

En la columna de la decenas podemos plantear que:

$$D+D = C \ ,\text{ó}, \ D+D = C+10$$

Descartamos la primera opción porque de ser cierto, en la columna de las centenas tendríamos C = D, lo cual sería una contradicción puesto que la condición es que una letra representa un dígito diferente.

Queda entonces :

$$2D = C + 10 \quad .....(a)$$

El número 10 supone que debemos llevar una unidad (1) a la columna de las centenas, de modo que allí se establecerá la siguiente relación:

$$C + 1 = D \quad ....(b)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos:

$$C = 8 \ ; \ D = 9$$

De este modo la operación reconstruida queda así :

$$\begin{array}{r} 8\,9\,0+ \\ 9\,0 \\ \hline 9\,8\,0 \end{array}$$

NOTAS:

- Puede captarse que no existe una forma preestablecida para desarrollar esta clase de problemas.
- Solo deben tenerse muy en cuenta las técnicas operativas de la operación que se está reconstruyendo.
- Es importante analizar columna por columna, y escribir la o las ecuaciones que justifiquen cada opción a elegir.

2.- Si cada letra diferente representa a un dígito diferente, el valor de U + N + I en la siguiente suma es :

$$\begin{array}{r} UU\ + \\ NN \\ II \\ \hline UNI \end{array}$$

A) 20 *B) 18* *C) 15* *D) 13* *E) 12*

Resolución:

En lugar de comenzar por las unidades se puede deducir algo al observar con atención la cifra del otro extremo izquierdo: U. Esta cifra debe ser menor que 3......¿Por qué?

La respuesta es muy sencilla, porque cada sumando está compuesto de dos dígitos por lo tanto, todos ellos deben ser menores que 100 ; por ello la suma de estos tres sumandos no puede pasar de 300. Es asi que podemos afirmar que :

$$U = 1 \ ,ó,\ U = 2$$

Escogiendo la primera opción la suma quedaría así:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ + \\ N\ N \\ I\ I \\ \hline 1\ N\ I \end{array}$$

En la columna de las unidades ,

$$1 + N + I = I + ...$$

El espacio vacío representa "Lo que se lleva", y esto solo puede ser 1. En realidad 1 representa a una decena o 10 unidades, por lo que la igualdad completa sería así:

$$1 + N + 1 = 1 + 10 \Rightarrow N = 9$$

En las centenas queda :

$$1 + 1 + N + I = \overline{1N}$$

Y como N = 9 :

$$11 + I = 19$$

$$\Rightarrow \quad I = 8$$

reemplazando los valores obtenidos la suma quedaría así:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ + \\ 9\ 9 \\ 8\ 8 \\ \hline 1\ 9\ 8 \end{array}$$

Finalmente la suma de los valores de cada dígito es:

$$U + N + I = 1 + 9 + 8$$

$$= 18$$

RPTA. B

OJO.- La opción U=2, nos conduce a una contradicción ¿Puedes comprobarlo?

3.- El producto de un entero positivo x de 3 dígitos por 3 es un número que termina en 721. La suma de los dígitos de x es:

A) 13 *B) 12* *C) 16* *D) 14* *E) 15* ***UNMSM 96***

Resolución:

Si el entero x tiene 3 dígitos entonces será de la forma:

$$x = \overline{abc}$$

Cabe suponer que el producto de este número por 3 es otro número de cuatro cifras como máximo.

De la condición dada y de lo expuesto anteriormente podemos plantear la multiplicación del siguiente modo:

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\ \times \\ 3 \\ \hline {*}\,7\,2\,1 \end{array}$$

Procediendo a multiplicar 3 por cada cifra, tendremos:

1) $3 \times c$ termina en $1 \Rightarrow c = 7$
   Es decir, ponemos 1 y llevamos 2.
2) $3 \times b + 2$ debe terminar en 2.
   Esto solo ocurre si $b = 0$ y por tanto no se lleva nada.
3) $3 \times a$ debe terminar en 7 y esto será posible si $a = 9$

Finalmente el número x buscado es $\overline{abc} = 907$.

Por lo tanto sus dígitos suman:

$9 + 0 + 7 = 16$

RPTA. C

$$\begin{array}{r} 9\,0\,7\ \times \\ 3 \\ \hline 2\,7\,2\,1 \end{array}$$

4.- En la siguiente multiplicación calcular la suma de las cifras del producto total (cada punto representa un dígito).

$$\begin{array}{r} .\,.\,.\ \times \\ .\,3 \\ \hline .\,0\,. \\ .\,4\,.\ \ \\ \hline .\,.\,1\,.\,5 \end{array}$$

A) 6 *B) 7* *C) 8* *D) 9* *E) 10* ***UNFV 96***

Resolución:

El dígito de las unidades del multiplicando (M)debe ser 5. El primer producto será 3×5 =.5 llevando 1.

```
M ——>   . . 5 ×
            . 3
        -------
          . 0 5
          . 4 .
        -------
        . . 1 . 5
```

El dígito de las decenas de M debe ser 3 para que el producto más 1 sea 10. Así, se pone cero(0) y se lleva 1

```
M ——>   . 3 5 ×
            . 3
        -------
          . 0 5
          . 4 .
        -------
        . . 1 . 5
```

Analizando los productos parciales reconocemos que el primero debe ser 705. Así se logra que 7 + 4 , termine en 1.Luego: M= 235.

```
M     ——>   2 3 5 ×
                . 3
            -------
1er P. ——>  7 0 5
2do P. ——>  . 4 .
            -------
          . . 1 . 5
```

El segundo producto es .4. el cual solo posee 3 dígitos. Para saber de qué número se trata, bastará con probar los siguientes productos :

$235 \times 1 = 235$

$235 \times 2 = 470$

$235 \times 3 = 705$

$235 \times \boxed{4} = 940$

Dado que el único producto que posee la cifra 4 en las decenas es 940,diremos que la operación va quedando así:

```
    2 3 5  ×
      4 3
    -------
    7 0 5
  9 4 0
  -------
  . . 1 . 5
```

Si ahora procedemos a efectuar la suma de los productos parciales encontraremos que el producto total es : 10 105.

Finalmente la suma de las cifras de este número es:

$$1 + 0 + 1 + 0 + 5 = 7$$

RPTA. B

5.- En la división solo intervienen tres dígitos: p, q, y r. Hallar el valor de 2p + 3q + 5r.

```
pqq | r
 r    pp
 --
 pq
  r
 --
  p
```

A) 38 *B) 43* *C) 30* *D) 49* *E) 47* *PUCP 94 - I*

Resolución:

Sabemos que la comprobación de la división se hace por medio de una multiplicación. Examinando el primer producto de la primera cifra del cociente con el divisor, se tiene:

$$p \times r = r$$

$$\Rightarrow \quad p = 1$$

Recordemos también que:

$$D = d \times q + r$$

Donde :

D = Dividendo

d = Divisor

q = Cociente

r = Residuo

Aplicando la fórmula anterior y lo obtenido en el primer paso, tendremos:

$$\overline{1qq} = 11 \,.\, r + 1 \quad ...(*)$$

Observando la posición de r en la división original, resulta claro que se trata de un número de un solo dígito. Analizando la relación (*) reconocemos que la igualdad solo será posible si: $r = 9$

Al sustituir el valor de r en la relación (*) nos queda:

$$\overline{1qq} = 11 \,.\, (9) + 1$$

$$\overline{1qq} = 100$$

De está ultima igualdad es fácil reconocer que : $q = 0$

Finalmente lo solicitado es :

$$2p + 3q + 5r = 2(1) + 3(0) + 5(9)$$

$$= 47$$

```
100 | 9
 9    11
 10
  9
  1
```

RPTA. E

6.- ¿Qué dígitos acompañan al 8 en el cociente de la siguiente división?

```
* * * * * * * | * *
* * *           * * 8 * *
    * *
    * *
      * * *
      * * *
          1
```

A) 1 y 8 *D) 1; 0 y 7*

B) 1; 3 y 5 *E) 2; 3; 5 y 7*

C) 0 y 9

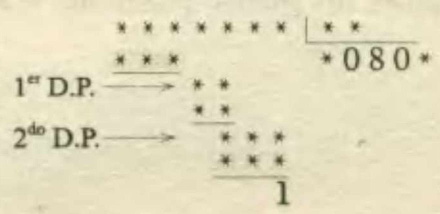
Resolución:

En la operación de división se sabe que cuando un dividendo parcial es menor que el divisor se debe anotar un cero en el cociente.

¿Puedes reconocer en qué dividendos parciales ocurre esto ?

El primer cero se presenta con el primer dividendo parcial obtenido al bajar por primera vez una cifra del dividendo original. Este cero corresponde a la 2ᵈᵃ cifra del cociente.

El segundo cero se presenta cuando se deben bajar dos cifras del dividendo original para formar el 2ᵈᵒ dividendo parcial. Este cero es la 4ᵗᵃ cifra del cociente.



El resultado de multiplicar 8 por el divisor es un número de dos cifras lo cual aparece debajo del 1ᵉʳ dividendo parcial. Luego la 1ʳᵃ y 5ᵗᵃ cifra del cociente deben ser 9 ya que solo así los productos de ellos por el divisor generaran números de tres cifras tal como se ha indicado en los recuadros del paso anterior. Por tanto el cociente resulta ser:

90 809 **RPTA.C**

NOTA.- Aunque ya se encontró lo que pedía la pregunta, se puede deducir fácilmente todo el resto de los números. Por ejemplo el divisor resulta ser 12 y el dividendo es igual 1 089 708.

7.- En la siguiente suma las letras a, b, c, representan dígitos. Calcular la suma de $\overline{ba}$ más $\overline{ac}$

$$\begin{array}{r} ab\ + \\ ca \\ \hline 111 \end{array}$$

A) 111 B) 120 C) 102 D) 121 E) Hay más de una solución PUCP 93 - II

Resolución:

a) Observando la suma total reconocemos que en las unidades $b+a$ = 1, u , 11 . Elegimos $b+a = 11$, y se descarta la primera opción porque sólo se cumple si a es *cero* ó 1 lo cual no sirve para la suma en las decenas.

b) En las decenas tenemos un 1 "llevado" de las unidades a las decenas, luego: $a+c = 10$

c) Esto es suficiente para hallar lo que nos piden:

$$\overline{ba} + \overline{ac} = 10b + a + 10a + c$$
$$= 10\,(b+a) + (a+c)$$
$$= 10\,(11) + 10$$
$$= \boxed{120} \qquad \text{RPTA. B}$$

8.- Reconstruir la siguiente suma y dar como resultado el valor de:

$$\overline{MAS} + \overline{SAL}$$

$$\begin{array}{r} S\,A\,L\ + \\ M\,A\,S \\ \hline A\,L\,L\,A \end{array}$$

A) 1 331   B) 2 442   C) 1 441   D) 1 551   E) 2 332

<u>Resolución</u>:

a) Dado que la suma de dos números de tres cifras no puede pasar de 2 000, resulta evidente que : A = 1

b) $L + S = 11$

$A + A + 1 = L \;\Rightarrow\; L = 3\;;\; S = 8$

c) $8 + M = 13 \;\Rightarrow\; M = 5$

Luego : $\overline{MAS} + \overline{SAL} = 518 + 813 = \boxed{1\,331}$ RPTA. A

9.- Si un recipiente que tiene $\overline{ab}$ litros de agua se empieza a llenar a un caudal constante, al cabo de 30 minutos se obtiene $\overline{ba}$ litros y cumplidos los primeros 60 minutos se tienen $\overline{a0b}$ litros. Hallar el caudal en litros por hora.

A) 51 $\frac{l}{h}$ B) 65 $\frac{l}{h}$ C) 15 $\frac{l}{h}$ D) 90 $\frac{l}{h}$ E) 45 $\frac{l}{h}$ UNMSM 91

<u>Resolución</u>:

Se forma esta secuencia numérica:

$\overline{ab}$ $\overline{ba}$ $\overline{a0b}$

30 *min*   30 *min*

Entonces: $\overline{ba} - \overline{ab} = \overline{a0b} - \overline{ba}$

Lo cual se puede escribir : $\overline{ab} + \overline{a0b} = \overline{ba} + \overline{ba}$

Esto quiere decir que: estas sumas son iguales

$$\begin{array}{r} ab\ + \\ a0b \\ \hline *\,*\,* \end{array} \qquad \begin{array}{r} ba\ + \\ ba \\ \hline *\,*\,* \end{array}$$

$$b + b = a + a + 10 \;\Rightarrow\; 2b = 2a + 10$$

$$1 + a + \overline{a0} = b + b \;\Rightarrow\; 11a + 1 = 2b$$

Resolviendo : $a = 1$ y $b = 6$

En 30 *min* el contenido aumentó de 16 a 61 *litros*, luego el caudal en *litros* por *hora* es:

$$\frac{61-16}{0,5} = \frac{45}{0,5} = 90\frac{l}{h}$$ **RPTA. D**

10.- Si a un número entero de seis cifras que comienza con uno (1) se le traslada este uno a la derecha de la última cifra, se obtiene otro número que es el triple del primero. El número inicial es:

A) 142 867   B) 142 857   C) 114 957   D) 155 497   E) 134 575   UNFV 95

Resolución:

La situación queda planteada así:

$$\begin{array}{r} 1\,a\,b\,c\,d\,e \;\times \\ 3 \\ \hline a\,b\,c\,d\,e\,1 \end{array}$$

Tenemos que $e = 7$; $3d + 2 = .7 \;\Rightarrow\; d = 5$

$3c + 1 = .5 \;\Rightarrow\; c = 8$

$3b + 2 = .8 \;\Rightarrow\; b = 2$

$3a = .2 \;\Rightarrow\; a = 4$

El número es : **142 857** **RPTA. B**

11.- En la multiplicación:

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D \;\times \\ 4 \\ \hline D\,C\,B\,A \end{array}$$

Hallar A + B + C + D

A)21   B) 15   C) 18   D) 20   E) 12

Resolución:

1°) A solo puede ser 1 ó 2 porque el producto sólo tiene 4 cifras. Pero al observar las unidades A debe ser par, sólo queda. A = 2

$$\begin{array}{r} 2\,B\,C\,D \;\times \\ 4 \\ \hline D\,C\,B\,2 \end{array}$$

2°) El primer producto 4×D debe terminar en 2, entonces D=3 ú 8, pero del paso anterior el producto debe ser mayor que 8 000 luego se descarta el 3 y se tiene D=8

$$\begin{array}{r} 2\,B\,C\,8 \;\times \\ 4 \\ \hline 8\,C\,B\,2 \end{array}$$

3°) En el segundo producto tenemos:

$4\times C + 3 = _B$ ----- (*)

$$\begin{array}{r} 2\,1\,C\,8 \;\times \\ 4 \\ \hline 8\,C\,1\,2 \end{array}$$

En el tercer producto no se lleva ninguna cantidad, luego :

$4\times B < 10 \quad \Rightarrow \quad B = 1$ ó 2

pero de (*) B es impar, luego B=1

4º) Finalmente:

$4\times C + 3 = _1 \;\Rightarrow\; 4\times C = _8$

se cumple para C = 2 ó 7, pero con 2 habría contradicción en el tercer producto, entonces C = 7

$$\begin{array}{r} 2178\times \\ 4 \\ \hline 8712 \end{array}$$

y A + B + C + D = 2 + 1 + 7 + 8 = **18** **RPTA. C**

12.- En la siguiente multiplicación hay dígitos y letras. Halle los valores de las letras B, C, D, E y F.

$$\begin{array}{r} F\,1\,F\times \\ 2\,E \\ \hline 6\,3\,C \\ D\,2\,D \\ \hline D\,8\,B\,C \end{array}$$

A) 2; 4; 6; 2; 3 B) 6; 4; 2; 3; 3 C) 6; 4; 3; 2; 2 D) 4; 3; 6; 4; 2 E) 7; 6; 4; 3; 2

Resolución:

1º) El primer producto es :

$$\begin{array}{r} F\,1\,F\times \\ E \\ \hline 6\,3\,C \end{array}$$

2do) El producto E×F es menor o igual que 6, entonces solo tiene una cifra,luego E×F = C, sin llevar nada. Después E×1= 3 y E×F= 6. Todo esto se cumple si E=3 ; F=2 ; C=6 la operación queda así :

$$\begin{array}{r} 2\,1\,2\times \\ 2\,3 \\ \hline 6\,3\,6 \\ D\,2\,D \\ \hline D\,8\,B\,6 \end{array}$$

3º) En el segundo producto : D = 4

y en el producto final : B = 7

Ahora ya se puede reconstruir toda la operación :

$$\begin{array}{r} 2\,1\,2\times \\ 2\,3 \\ \hline 6\,3\,6 \\ 4\,2\,4 \\ \hline 4\,8\,7\,6 \end{array}$$

RPTA. E

13.- En esta operación una de las cifras vale:

$$\begin{array}{r} A\,B+ \\ B\,C \\ \hline B\,C\,B \end{array}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

1º) $\overline{AB} < 100$; $\overline{BC} < 100$

luego la suma es menor que 200 y esto implica que: B=1

$$\begin{array}{r} A\,1+ \\ 1\,C \\ \hline 1\,C\,1 \end{array}$$

2do) En las unidades, 1+C = 1, u, 11 entonces C solo puede ser: cero (0)

$$\begin{array}{r} A\,1 + \\ 1\,0 \\ \hline 1\,0\,1 \end{array}$$

3ro) En las decenas: A + 1 = 10
A = 9

$$\begin{array}{r} 9\,1 + \\ 1\,0 \\ \hline 1\,0\,1 \end{array}$$

Y ya se puede reconstruir todo : **RPTA. A**

14.- Se tiene un número de dos dígitos. Si se le agrega un 3 a la izquierda se convierte en un número igual a 5 veces el número original. Hallar la suma de las cifras del número original.

A) 10 *B) 15* *C) 12* *D) 8* *E) 17* *PUCP 93 - I*

Resolución:

La operación a reconstruir es:

$$\begin{array}{r} a\,b\ \times \\ 5 \\ \hline 3\,a\,b \end{array}$$

$b = 5$, ó , 0

Si $b = 0$, $5.a = 30 + a$ aquí y a no puede tomar ningún valor entero.

Si $b = 5 \Rightarrow 5a+2 = 30+a \Rightarrow a = 7$

El número original es : **75** RPTA. C

15.- Sabiendo que :

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\ + \\ c\,b\,a \\ \hline 1\,3\,3\,2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a\,b\,c\ - \\ c\,b\,a \\ \hline 5\,*\,* \end{array}$$

Hallar : a.b.c

A) 174 *B) 164* *C) 162* *D) 184* *E) N.A.*

Resolución:

En la suma obtenemos: $c + a = 12$

$1 + 2b = 13 \Rightarrow b = 6$

En la resta: $a - c = 5$, ó , $a - 1 - c = 5$

Pero $a - c$ no puede ser impar (porque $a+c = 12$)

Luego $a - c = 6$

Y resolviendo tendremos: $a = 9$; $c = 3$

Entonces: $a \,.\, b \,.\, c \,. = 9 \times 3 \times 6 =$ **162** RPTA. C

16.- Se sabe que: $\overline{abc} \times m = 2\,312$

$\overline{abc} \times n = 1\,734$

¿Cuánto es $\overline{abc} \times \overline{mn}$?

A) 9 652 *B) 24 854* *C) 21 954* *D) 25 854* *E) N.A.*

Resolución:

Ordenando los productos parciales se obtiene:

$$\begin{array}{r} abc\ \times \\ mn \\ \hline 1734 \\ 2312 \\ \hline 24854 \end{array}$$

RPTA. B

17.- "El complemento aritmético (C.A.) de un número de n cifras es lo que le falta al número para ser igual a la unidad seguida de n ceros".
Si se sabe lo anterior y que: C.A. $(\overline{abcd}) = \overline{ab}$ ***; hallar a + b + c + d***

A) 17 B)16 C) 19 D) 18 E) N.A.

Resolución:

La operación es:

$$\begin{array}{r} abcd\ + \\ ab \\ \hline 10000 \end{array}$$

Si se conoce que a y b deben ser 9 y 9

Luego: $9\,900 + \overline{cd} + 99 = 10\,000 \Rightarrow \overline{cd} = 01$

$c = 0$; $d = 1$ y $a + b + c + d =$ **19** RPTA. C

18.- Si N × 17 = ...2 581 ; ¿Cómo termina N × 8?

A) 4 834 B) 4 634 C) 4 744 D) 2 964 E) 3 864

Resolución:

$$\begin{array}{r} ...abcd\ \times \\ 17 \\ \hline ...1651 \\ ...093 \\ \hline ...2581 \end{array}$$

$d \times 7 = .1 \Rightarrow d = 3$
$c \times 7 = .3 \Rightarrow c = 9$
$b \times 7 = .0 \Rightarrow b = 0$
$a \times 7 = .1 \Rightarrow a = 3$

N = .3093 , luego N × 8 = **..4744** RPTA. C

19.- Hallar la suma de las cifras del producto abc × 27 si los productos parciales suman 2 862.

A) 23 B) 24 C) 25 D) 26 E) 27

Resolución:

$$\begin{array}{r} abc\ \times \\ 27 \\ \hline ... \\ ... \\ \hline .... \end{array}$$

Se sabe que:

$$\begin{array}{r} \overline{abc}\ \times 7\ + \\ \overline{abc}\ \times 2 \\ \hline \overline{abc}\ \times 9 = 2862 \end{array}$$

Luego : $\overline{abc} = 318$

El producto es: $318 \times 27 = 8\,586$

Y la suma de sus cifras: $8 + 5 + 8 + 6 =$ **27** **RPTA. E**

20.- ¿En qué cifra termina N × 12 si se sabe que N × 84 termina en ..8836? Dé como respuesta la suma de las últimas cuatro cifras.

A) 20 *B) 21* *C) 23* *D) 24* *E) 22*

Resolución:

Se sabe que: $N \times 84 = ...8836$

$N \times 12 \times 7 = ...8836$

Asumimos que :

$N \times 12 = \overline{...abcd}$

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d\ \times \\ 7 \\ \hline 8\,8\,3\,6 \end{array}$$

$d = 8 \Rightarrow c\times 7 + 5 = .3 \Rightarrow c = 4$

$b\times 7 + 3 = .8 \Rightarrow b = 5$

$a\times 7 + 3 = .8 \Rightarrow a = 5$

Entonces : $N \times 12 = .5548$

Y la suma de las 4 últimas cifras :

$5 + 5 + 4 + 8 =$ **22** **RPTA. E**

21.- ¿Cuál es el resultado de la siguiente multiplicación?

$$\begin{array}{r} 2\,3\,5\ \times \\ *\ * \\ \hline *\,*\,*\,* \\ *\,*\,*\,*\ \ \\ \hline *\,*\,5\,6\,* \end{array}$$

A) 23560 *B) 22560* *C) 32565*

D) 42565 *E) 24560*

Resolución:

1^ro^) La cifra 6 del producto se obtuvo de la suma de dos cifras, de las cuales la inferior puede ser 0 ó 5. Eligiendo una de estas opciones : 5, avanzamos en la reconstrucción (elegir la otra opción conduce a una contradicción que se deja para que la descubra el lector).

2^do^) La cifra b debe ser mayor que 4 para que el producto parcial tenga 4 cifras.

Para que dicho producto lleve un 1 en el lugar de las decenas, $b = 6$.

$$\begin{array}{r} 235\ \times \\ ab \\ \hline **1* \\ ***5\ \ \\ \hline **56* \end{array}$$

3^ro^) Si el primer producto parcial es $235 \times 6 = 1\,410$, el segundo producto parcial es $**15$, y para que este producto termine en 15; a debe ser 9. Entonces $\overline{ab} = 96$.

4^to^) El resultado de la multiplicación es: $235 \times 96 =$ **22 560** **RPTA. B**

22.- Si A y B son dígitos, hallar A + B en : (A + A) . B = $\overline{AB}$

A) 7 B) 9 C) 13 D) 8 E) 10

Resolución:

Descomponiendo polinómicamente : 2A . B = 10A + B .....(*)

Y despejando A : $A = \dfrac{B}{2B-10}$ ....(**)

De (*) B debe ser cifra par y de (**) B debe ser mayor que 5: B=6, ú, 8.

De (**) A sólo es entero para B = 6. En este caso : A = 3 RPTA. A

23.- El número N de tres cifras que multiplicado por 9 da un producto que termina en 007, está comprendido entre :

A) 450 y 500 B) 650 y 700 C) 100 y 150 D) 400 y 450 E) 200 y 250

Resolución:

Sea N = $\overline{abc}$

Luego: $\overline{abc} \times 9 = ..007$

$\overline{abc}\ (10 - 1) = ..007 \Rightarrow \overline{abc0} - \overline{abc} = .007$

$$\left.\begin{array}{r} a\,b\,c\,0\ - \\ a\,b\,c \\ \hline 0\,0\,7 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c = 3 \\ b = 2 = a \end{array}$$

El número es : 223 RPTA. E

24.- La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 12 y el cociente de su división por su cifra de unidades es 21. ¿Cuánto vale la cifra de las decenas?

A) 7 B) 9 C) 8 D) 6 E) 5

Resolución:

Sea $\overline{ab}$ el número dado, luego:

$a + b = 12$ ......(1)

$\overline{ab} \div b = 21 \Rightarrow \begin{array}{r} 21\ \times \\ b \\ \hline \overline{ab} \end{array}$

Se deduce que $a = 2b$ ....(2)

Resolviendo (1) y (2) : $b = 4\ ;\ a = 8$ RPTA. C

25.- Si $\overline{abcc} \times \overline{ba} = 7..71$ donde cada punto representa una cifra. ¿Cuál es el valor de a + b + c si sabemos que las 3 cifras son diferentes?

A) 14 *B) 12* *C) 16* *D) 18* *E) 22*

Resolución:

$c \times a$ termina en 1, luego c y a son 3 y 7 sin saberse el orden. Pero $\overline{abcc} \times a$ solo tiene 4 cifras, luego $a = 3$ y entonces $c = 7$. Asimismo $b \times 7$ termina en 4.

$$\begin{array}{r} 3\,b\,7\,7\,\times \\ b\,3 \\ \hline 9\,.\,3\,1 \\ .\,.\,.\,. \\ \hline 7\,.\,.\,7\,1 \end{array}$$

Luego $b = 2$ y $a + b + c =$ **12** RPTA. B

26.- Hallar : a + b + c + d , sabiendo que : $\overline{a4b8} + \overline{3c5d} = \overline{8a90}$

A) 9 *B) 10* *C) 11* *D) 12* *E) 13*

Resolución:

Anotamos la operación de esta forma :

$$\begin{array}{r} a\,4\,b\,8\,+ \\ 3\,c\,5\,d \\ \hline 8\,a\,9\,0 \end{array}$$

1) Se deduce que $d = 2$ y se lleva 1 a la otra columna.

2) Luego : $1 + b + 5 = 9$, entonces $b = 3$

3) En la 3ra columna : $4 + c = a$; y en la 4ta : $a + 3 = 8$

Ambas igualdades se cumplen si : $a = 5$; $c = 1$

$\therefore \quad a + b + c + d =$ **11** RPTA. C

27.- Si se cumple que : $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = \overline{1cc6}$; hallar : a + b - c

A) 6 *B) 3* *C) 1* *D) 2* *E) 7*

Resolución:

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,+ \\ b\,c\,a \\ c\,a\,b \\ \hline 1\,c\,c\,6 \end{array}$$

Se observa que : $a + b + c = 6$ ó 16

Pero también : $a + b + c > 10$

Entonces : $a + b + c = 16$ .... (1)

En la última columna : $a + b + c + 1 = \overline{1c}$ ...... (2)

De (1) y (2) , deducimos que $c = 7$; $a + b = 9$

$\therefore \quad a + b - c = 9 - 7 =$ **2** RPTA. D

28.- Se cumple : $\overline{abc} \times 99 = ...447$ ***; hallar :*** $a + b + c$

A) 12 *B)* 13 *C)* 14 *D)* 15 *E)* 16

Resolución:

$\overline{abc} \times 99 = \overline{abc} \times (100 - 1) = \overline{abc00} - \overline{abc}$

Luego de estas transformaciones, podemos plantear :

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,0\,0\,- \\ a\,b\,c \\ \hline ..\,4\,7\,7 \end{array} \qquad \text{Aquí : } c = 3 \,;\, b = 2 \text{ , y , } a = 8$$

$\therefore \quad a + b + c =$ **13** RPTA. B

29.- Si : $\overline{EVA} + \overline{AVE} = 645$ ***; hallar :*** $V + E + A$

A) 12 *B)* 13 *C)* 14 *D)* 15 *E)* 16

Resolución:

$$\begin{array}{r} E\,V\,A\,+ \\ A\,V\,E \\ \hline 6\;4\;5 \end{array}$$

1) En las unidades : $A + E = 5$ ó 15

2) En las centenas : $E + A < 10$; luego : $A + E = 5$

3) En las decenas : $V + V = 14$

$V = 7$

$\therefore \quad V + E + A =$ **12** RPTA. A

30.- Hallar : $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ ***; si :*** $a + b + c = 18$

A) 1770 *B)* 1772 *C)* 1774 *D)* 1776 *E)* 1777

Resolución:

Anotamos la operación en forma vertical y sumamos en cada columna :

$$\begin{array}{r} 1 \\ a\,b\,c\,+ \\ b\,c\,a \\ c\,a\,b \\ \hline ---6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,1 \\ a\,b\,c\,+ \\ b\,c\,a \\ c\,a\,b \\ \hline 1\,7\,7\,6 \end{array}$$

1) $a + b + c = 16$. Se anota el 6 y se lleva 1.

2) Repitiendo el proceso en la 2^da^ y 3^ra^ columna se obtiene : **1776** RPTA. D

31.- Si : $\overline{abc} + \overline{cba} = 1334$ ***y*** $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{5**}$ ***; hallar :*** $a \times b \times c$

A) 152 *B)* 162 *C)* 172 *D)* 182 *E)* 192

Resolución:

Una sustracción de la forma $\overline{abc} - \overline{cba}$ siempre da como resultado un múltiplo de 99. Veamos porque :

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$$
$$= 99\,(a - c)$$

Ahora, sabemos que equivale a $\overline{5**}$, es decir comienza en 5 y esto implica que es: $99 \times 6 = 594$.

Ahora tenemos : $\overline{abc} + \overline{cba} = 1332$

$\overline{abc} - \overline{cba} = 594$

Luego de sumar *m.a.m.* : $2\,.\,\overline{abc} = 1926$

$\overline{abc} = 963$

Obtenemos : $a\,.\,b\,.\,c = 9\,.\,6\,.\,3 =$ **162** **RPTA. B**

32.- p + q = 12 ; r + s = 16

$\overline{qqss} + \overline{rrpq} + \overline{pprp} + \overline{ssqr} = \overline{addbc}$; calcular : $(a + b + c - d)^2$

A) 9 *B) 16* *C) 25* *D) 36* *E) 100*

Resolución:

Escribiendo la operación en forma vertical y en cada columna encontramos la misma suma:

$$p + q + r + s = 28$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ q\,q\,s\,s\;+ \\ r\,r\,p\,q \\ p\,p\,r\,p \\ s\,s\,q\,r \\ \hline -\,-\,-\,-\,8 \end{array}$$

Entonces, reconstruyendo tenemos :

$$\overline{addbc} = 31108$$

Luego : $(a + b + c - d)^2 = (3 + 0 + 8 - 1)^2 = 10^2$

$= 100$ **RPTA. E**

33.- CA $(\overline{abc})$ - $\overline{xyz}$; Si : a + b + c = 16 ; hallar : x + y + z

A) 10 *B) 11* *C) 12* *D) 14* *E) 15*

Resolución:

C.A. significa complemento aritmético, entonces, $\overline{xyz}$ es el C.A. de $\overline{abc}$, esto quiere decir que:

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\ + \\ x\,y\,z \\ \hline 1\,0\,0\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} c + z = 10 \\ b + y = 9 \\ a + x = 9 \end{array}$$

Sumando *m.a.m.* : $(a + b + c) + (x + y + z) = 28$

Luego : $x + y + z =$ **12** RPTA. C

34.- En la siguiente multiplicación, hallar el multiplicando :

A) 432
B) 328
C) 153
D) 145
E) 351

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\ \times \\ D\,A \\ \hline E\,C\,D \\ F\,A\,F\,B\ \ \\ \hline F\,D\,F\,H\,D \end{array}$$

Resolución:

1) En la columna de centenas : E + F = F , es imposible.

Debemos asumir : $1 + E + F = F + 10 \Rightarrow E = 9$

2) $\overline{ABC} \times A = 9**$, entonces : A = 3

3) En los millares : $1 + A = D \Rightarrow D = 4$

4) Como $\overline{ABC} \times A = ECD$, deducimos que C = 8

Luego : $\overline{ABC} \times 3 = 984 \Rightarrow \overline{ABC} =$ **328** RPTA. B

35.- Calcular la suma de todos los asterisco de esta división :

A) 16
B) 32
C) 42
D) 26
E) 44

$$\begin{array}{r|l} * & *3 \\ \cline{2-2} *8\ & *,** \\ \cline{1-1} *** & \\ *** & \\ \cline{1-1} --3 & \end{array}$$

Resolución:

La operación reconstruida es la siguiente, donde el primer asterisco del cociente es 0, luego el segundo asterisco es 6.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 13 \\ \cline{2-2} 78\ & 0,69 \\ \cline{1-1} 120 & \\ 117 & \\ \cline{1-1} --3 & \end{array}$$

Luego se deduce que el primer asterisco del divisor es 1, ya que $*3 \times 6 = *8$ ó $13 \times 6 = 78$

El resto se deduce con facilidad, y la suma de los asteriscos es : **44** RPTA. E

36.- Si : $\dfrac{\overline{abcbd}}{346} = \dfrac{\overline{xxxx}}{\overline{xx}}$; calcular el valor de : $E = \overline{abcd} + \overline{abcd} + \overline{cdab} + \overline{dcda}$

A) 25552 B) 24442 C) 34996 D) 44225 E) 43334

<u>Resolución</u>:

El 2do miembro de la igualdad es : $\dfrac{\overline{xxxx}}{\overline{xx}} = \dfrac{101 \cdot \overline{xx}}{\overline{xx}} = 101$

Luego : $\overline{abcbd} = 346 \cdot 101 = 34946$: $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = 9 \\ d = 6 \end{cases}$

Además : $E = 1111\ (a + b + c + d)$

$E = 1111 \cdot 22 =$ **24442** RPTA. B

37.- Si : $17391 \div \overline{DD} = \overline{ABC}$; hallar las tres últimas cifras de : $\overline{BA}^{\overline{BA}}$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

<u>Resolución</u>:

Veamos : $\dfrac{17391}{\overline{DD}} = \dfrac{17391}{D \cdot 11} = \dfrac{1581}{D}$

"D" debe ser divisor de 1581, tal que sea dígito y el resultado tenga 3 cifras : $\overline{ABC}$, la única opción es D = 3

Luego : $\overline{ABC} = \dfrac{1581}{3} = 527$: $\begin{cases} A = 5 \\ B = 2 \\ C = 7 \end{cases}$

Y la expresión $\overline{BA}^{\overline{BA}}$ es 25^{25}

Toda potencia entera de 25 es de la forma : $25^n = ...625$

Es decir termina en las 3 cifras indicadas.

$\therefore$ Σ 3 últimas cifras = 6 + 2 + 5 = **13** RPTA. D

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- En la siguiente sustracción, se sabe que A + C = 12. El valor de A.C es :

$$\begin{array}{r} ABC\ - \\ \underline{CBA\ \ } \\ 1{*}{*}\ \ \end{array}$$

A) 35 B) 32 C) 27 D) 20 E) N.A.

2.- Si B = A + C, luego de reconstruir la operación mostrada, el valor de $A^2 + B^2 + C^2$ es :

$$\begin{array}{r} ABC\ - \\ \underline{CBA\ \ } \\ {*}{*}3\ \ \end{array}$$

A) 222 B) 150 C) 185 D) 146 E) 212

3.- Las cifras A y B que aparecen en ambas operaciones son las mismas.
El valor de 2A + 3B es :

$$\begin{array}{r} 4AB\ - \\ \underline{BA4\ \ } \\ 1{*}{*}\ \ \end{array} \qquad \begin{array}{r} AB\ - \\ \underline{BA\ \ } \\ {*}4\ \ \end{array}$$

A) 17 B) 32 C) 22 D) 28 E) 19

4.- Las cifras A y B que aparecen en las dos sumas son las mismas. ¿Cuál es la suma de los cinco dígitos que forman el resultado de la segunda suma?

$$\begin{array}{r} AA\ + \\ \underline{BB\ \ } \\ 154\ \ \end{array} \qquad \begin{array}{r} ABBA\ + \\ \underline{BAAB\ \ } \\ {*}{*}{*}{*}{*}\ \ \end{array}$$

A) 19 B) 20 C) 18 D) 17 E) 24

5.- ¿Cuál es el menor número de cinco cifras que multiplicado por 15 da un número cuyas cifras son todas "cincos"?

A) 14 023 B) 20 525 C) 17 029

D) 37 037 E) 19 091

6.- Hallar :

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cba} + \overline{cab}$$

Sabiendo que $a + b + c = 9$

A) 1 445 B) 1 998 C) 1 886

D) 1 776 E) N.A.

7.- El producto de los dígitos a, b y c que aparecen en la suma es :

$$\begin{array}{r} a\,7\,c\ + \\ c\,6\,a\ \ \ \\ \underline{5\,b\,9\ \ \ } \\ 1\,c\,2\,6\ \ \ \end{array}$$

A) 24 B) 48 C) 72

D) 96 E) 126

8.- En la siguiente resta 0 = cero. Determinar el valor de $a + b + c$

$$\begin{array}{r} 7\,a\,b\,4\ - \\ \underline{c\,d\,0\,b\ \ \ } \\ a\,7\,c\,8\ \ \ \end{array}$$

A) 11 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

9.- Sabiendo que $\overline{AB} \times \overline{BA} = 1\,300$, hallar A + B.

A) 7 B) 11 C) 9 D) 4 E) 8

10.- En la multiplicación que se muestra, hallar: A + B + C, sabiendo que $\overline{ABC}$ es divisible por [illegible].

$$\begin{array}{r} BC\times \\ \underline{4\ \ } \\ AB\ \ \end{array}$$

A) 14 B) 17 C) 19 D) 23 E) 20

NIVEL B

11.- N es el menor número que al multiplicarlo por 7 da un número formado por la repetición del dígito 3. La suma de los dígitos de N es :

A) 20 B) 23 C) 24 D) 27 E) 29

12.- Si se cumple que :

$$\overline{ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$$

Hallar : A - B + C.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

13.- En la multiplicación, algunas cifras se han sustituído por asteriscos. El producto resultante vale:

```
     * 1 * ×
       3 * 2
     -------
       * 3 *
     3 * 2 *
   * 2 * 5
   ---------
   1* 8 * 3 0
```

A) 15 8630 B) 16 8430

• C) 15 8530 D) 14 8530 E) 16 8730

14.- En esta división, la suma de las cifras del dividendo es :

```
*2*5*  | 325
***      1**
-----
 *0**
 *9**
 ----
  *5*
  *5*
  ---
  000
```

A) 20 B) 18 C) 15

D) 16 E) 21

15.- Sabiendo que : $\overline{AB} \times \overline{BA} - \overline{BA}^2 = 1\,566$

El valor de $\overline{AB} + \overline{BA}$ será :

A) 55 B) 99 C) 121 D) 143 E) 156

16.- Luego de reconstruir la división, hallar el valor de : $a+b+c$.

```
a8b | ab
..    cc
--
 ..
 ..
 --
 2b
```

A) 5 B) 7 C) 9

D) 11 E) 13

17.- Hallar el valor de : $\overline{abc} - \overline{cba}$.

Siendo a, b, c, las cifras de la suma mostrada :

```
 a b c +
   3 . 7
 -------
 1 0 0 0
```

A) 396 B) 297 C) 198 D) 485 E) N.A.

18.- Si : $N \times 375 = ..625$

$N \times 427 = ..021$

Hallar las 3 últimas cifras de $N \times 156$

A) 235 B) 234 C) 188 D) 366 E) 422

19.- Hallar: $a+b+c$ en la siguiente suma :

```
 *1* +
 *2*
 *3*
  .
  .
  .
 ----
 abc4
```

A) 6 D) 15

B) 5 E) 14

C) 14

20.- En la siguiente resta, hallar : $\overline{abc} - \overline{cba}$

```
 abc -
 bca
 ---
 316
```

A) 297 D) 369

B) 594 E) 396

C) 495

21.- Calcular : $x \cdot y \cdot z$; si se cumple que :

$$\overline{x74y} + \overline{z7y} + \overline{5yx2} = \overline{yyx64}$$

A) 24 B) 32 C) 45 D) 30 E) 36

22.- Si se cumple que : $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{7xy}$; hallar: $x+y$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

23.- Si se cumple que : $\overline{abc} \times \overline{aba} = 36863$; hallar: $a+b+c$

A) 12 B) 13 C) 10 D) 9 E) 16

24.- Si : $\overline{AA} + \overline{LL} + \overline{OO} = \overline{ALO}$; O ≠ cero; calcular el valor de la suma de las cifras de:

$$\overline{OLLA} + \overline{LOLA}$$

A) 25 B) 26 C) 24 D) 27 E) 22

25.- Al dividir $\overline{abab}$ entre cierto número, se obtuvo cociente $\overline{ab}$ y un resto que es el triple de $\overline{ab}$; calcular el mayor valor que puede tomar el dividendo.

A) 9797 B) 3232 C) 9696

D) 3131 E) 3434

NIVEL C

26.- Si : $\sqrt{\overline{AABB}} = \overline{CC}$

Hallar : A + B + C

A) 15 B) 19 C) 21 D) 24 E) 20

27.- En la multiplicación, el mayor dígito que aparece en el producto es :

$$\begin{array}{r} \text{NIGMAE} \times \\ 5 \\ \hline \text{ENIGMA} \end{array}$$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

28.- Si : $\overline{ABC} \times \overline{CBA} = 39\,483$

Hallar : $A + B + C$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

29.- Un automóvil recorre $\overline{abc}$ *km* en el primer día, $\overline{ba}$ el segundo, $\overline{bac}$ el tercero y $\overline{ac}$ el cuarto. Al final del cuarto día recorrió en total $\overline{acba}$ ¿Cuánto le falta para recorrer 2 500 *km*?

A) 1 417 B) 1 418 C) 1 419

D) 1 420 E) 1 421

30.- En una división inexacta el dividendo es 38 149 y los residuos obtenidos al efectuar la división son 80; 202 y 223. Hallar el cociente.

A) 234 B) 126 C) 716

D) 236 E) 423

31.- Hallar la suma de las cifras de dividendo :

```
* * 4 * * | * *
2 * *       * * 2
-----
  3 * *
  * * *
  -----
    * 5 *
    * * 0
    -----
    - - -
```

A) 10 B) 12 C) 14 D) 20 E) N.A.

32.- Sabiendo que : $\overline{LRJ} + \overline{SLJ} + \overline{EG8} = \overline{AELJ}$; hallar : $L + A + J$

A) 10 B) 9 C) 5 D) 7 E) 2

33.- Si se cumple que : $CA(\overline{ab}) + CA(\overline{ba}) = 46$; ¿Cuántos valores toma "a"?

A) 4 B) 1 C) 4 D) 5 E) 6

34.- Hallar $a + b$, sabiendo que para escribir todos los números enteros y consecutivos desde el numeral $\overline{ab}$ al $\overline{ab0}$ se han empleado $27 \times \overline{ab}$ cifras.

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

35.- Si : $a + b + c + d = \sqrt[3]{\overline{xy625}}$; hallar la suma de cifras de la adición :

$$\overline{abcd} + \overline{badc} + \overline{cdab} + \overline{dcba}$$

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

36.- Si : $\overline{abc} = \overline{cba} + \overline{mn(n-1)}$; hallar : $a - c + n$

A) 6 B) 11 C) 8 D) 9 E) 10

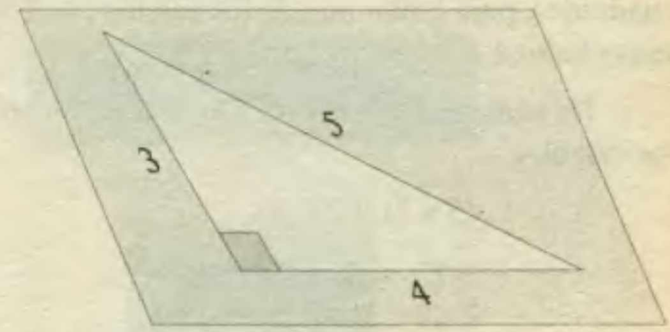
37.- Hallar : $a + b + c + d$; luego de reconstruir la operación :

$$\begin{array}{r} a\,b \times \\ 2\,1 \\ \hline a\,b \\ c\,d \\ \hline 9\,a\,b \end{array}$$

A) 13 B) 15 C) 18

D) 17 E) 20

PITAGORAS SIN TRIANGULO



Sabemos que los geómetras antiguos, bastante antes de que Pitágoras generalizara su célebre teorema, cuadrangulaban los terrenos aprovechando la propiedad que ya conocían :

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Y haciendo nudos en una soga, formaban triángulos rectángulos con suficiente precisión para sus cálculos sobre el terreno. Es como sabes, la proporción de lados más simples y conocidas de todas.

Vamos a llamar números triangulares rectángulos, aunque no dibujemos ningún polígono, a todas las ternas de números que guarden la proporción que resuelve el teorema de Pitágoras.

¿Será fácil encontrar ternas de este tipo? o ¿Habrá que dedicarse a tantear sin seguridad alguna de obtener soluciones?.

Desde luego descartaremos todos los números proporcionales a los anteriores, pues siendo los triángulos que formarían semejantes, se cumplirá que :

$$(n \, . \, 3)^2 + \left(n \cdot 4^2\right) = (n \cdot 5)^2$$

Y así formaríamos las ternas : $6^2 + 8^2 = 10^2$

$$9^2 + 12^2 = 15^2 \text{ etc.}$$

Tampoco consideramos la posibilidad de resolver el problema con números cualesquiera, pues si no limitamos el campo a los enteros o al menos a los racionales, no merece considerarse una cuestión que no tiene nada de dificultosa ya que tomando dos números cualesquiera, por ejemplo, el 2 y el 6 , elevándolos al cuadrado y sumándolos, tendremos el cuadrado de la hipotenusa buscada. Así, el tercer número buscado se representa por : $\sqrt{40}$

Pero con ello no hemos hecho sino poner en símbolos lo que no es posible realizar exactamente en el campo de racional.

Vamos pues a ceñirnos a los números enteros, donde la cuestión llega a hacerse apasionante, sobre todo después de saber que grandes matemáticos se han dedicado también a buscar estos números triangulares.

En primer lugar, aprendamos una sencilla manera de encontrar estos números rectángulos sin excesiva dificultad. Lo propondremos primero prácticamente, para explicar luego el proceso matemático, que es bien sencillo:

Tomemos dos números enteros al azar, que llamaremos los **generadores.** Los más sencillos para no meternos en cálculos enojosos, son el 1 y el 2.

Multiplicándolos entre sí y doblando su producto (nos resultará = 4) habremos hallado el primer lado del triángulo rectángulo.

Elevando al cuadrado ambos generadores, nos basta hallar la diferencia entre estos dos cuadrados, para hallar uno de los catetos (4 - 1 = 3) y sumando los dos cuadrados, hallaremos el tercer lado (4 + 1 = 5).

De análoga manera procederíamos con otros generadores, por ejemplo el 5 y el 7. He aquí los cálculos :

$$(5 \times 7) \times 2 = 70$$

$$7^2 + 5^2 = 74$$

$$7^2 - 5^2 = 24$$

Efectivamente resulta que : $24^2 + 70^2 = 74^2$

Para generalizar la ley de búsqueda de estos números basta con recordar las fórmulas del desarrollo de los binomios.

En efecto, llamando x e y a los números generadores, el primer número sería : $2xy$

El segundo y el tercero serían respectivamente : $x^2 - y^2$, $x^2 + y^2$

Y probamos fácilmente que los cuadrados de estos números cumplen el teorema de Pitágoras, de la siguiente forma :

$$\left(x^2 - y^2\right)^2 + (2xy)^2 = \left(\left(x^2\right)^2 + \left(y^2\right)^2 - 2x^2y^2\right) + 4x^2y^2$$

Es decir : $x^4 + y^4 + 2x^2y^2$, que es : $\left(x^2 + y^2\right)^2$

19 Promedios y Gráficos Estadísticos

I) PROMEDIOS

Cuando disponemos de un conjunto de datos numéricos, tenemos una tendencia natural a buscar una representación de ellos que de manera simple nos permita tener una idea global del conjunto. Hay muchos modos de definir un cierto número que tenga validez como "representante" de todos los datos, al cual le llamaremos "promedio" o "media".

Sean $a_1; a_2; a_3; ......; a_n$ los datos. Los promedios más difundidos son:

MEDIA ARITMETICA.- Es el valor que tomaría cada uno de los datos si el total de valores se repartiera uniformemente entre el número de ellos.

$$MA = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$

MEDIA GEOMETRICA.- Se define como la raíz enésima del producto de los "n" datos del conjunto.

$$MG = \sqrt[n]{a_1 . a_2 . a_3 ...... a_n}$$

MEDIA ARMONICA.- Se define como el recíproco de la media aritmética de los recíprocos de los datos del conjunto.

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

MEDIA PONDERADA.- En ocasiones se conocen los datos y alguna medida de la importancia de cada uno, es decir su ponderación (Pi). La media ponderada de los datos será :

$$MP = \frac{a_1 P_1 + a_2 P_2 + ... + a_n P_n}{P_1 + P_2 + ... + P_n}$$

OBSERVACIONES:

1°) Cuando son dos datos a y b, las medias ya definidas tienen por expresiones:

$$MA = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad MG = \sqrt{ab} \quad ; MH = \frac{2ab}{a+b}$$

donde se cumple además:

$MG^2 = MA \times MH \quad ; \quad MH \leq MG \leq MA$

2º) El promedio más frecuentemente usado es la media aritmética por eso cuando se menciona en un problema "el promedio de ciertos datos" se asumirá que se trata de la media aritmética.

3º) Existen otros tipos de promedio que se usan en estadística como por ejemplo la mediana y la moda cuyas definiciones las consideramos innecesarias en este curso.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- *El promedio de dos números es 3. Si se duplica el primer número y se quintuplica el segundo, el nuevo promedio es 9. Los números originales están en la razón :*

A) 3:1 *B) 3:2* *C) 4:3* *D) 5:2* *E) 2:1* ***UNMSM 90***

Resolución:

El enunciado afirma: "el promedio de dos números es 3", sin especificar el tipo de promedio, entonces asumimos que se trata de la media aritmética:

$$\frac{a+b}{2} = 3 \Rightarrow a+b \;\; ..... (1)$$

Luego de los cambios : $\frac{2a+5b}{2} = 9 \Rightarrow 2a+5b = 18 \;\; .... (2)$

Y resolviendo (1) y (2) : $a = 4 \;\; ; \;\; b = 2$

La relación será : $\frac{a}{b} = \frac{4}{2} =$ **2:1** RPTA. E

2.- *La media aritmética de un conjunto de 10 números es 16. Si incluímos los números 8 y 12 en el conjunto. ¿Cuál es la media aritmética de este nuevo conjunto?*

A) 17 *B) 12* *C) 15* *D) 18* *E) 13* ***UNMSM 96***

Resolución:

Del 1er dato: $\frac{\text{Suma de los 10 números}}{10} = 16$

$\Rightarrow$ Suma de los 10 #s = 160

Luego agregamos los números 8 y 12 :

Suma de los 12 números = 160 + 8 + 12 = 180

El nuevo promedio será : $\frac{180}{12} = 15$ RPTA. C

3.- La media aritmética de 10; 12; 20 y 30 excede a la media armónica de los mismos números en :

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 0,5*** ***E) 2,5***

Resolución:

De las definiciones :

$$MA = \frac{10+12+20+30}{4} = \frac{72}{4} = 18$$

$$MH = \frac{4}{\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}} = \frac{4}{\frac{32}{120}} = 15$$

La MA excede a la MH en: 18 - 15 = 3 RPTA. C

4.- Calcular la media geométrica de 12; 32 y 36.

A) 30 ***B) 20*** ***C) 27*** ***D) 24*** ***E) 18***

Resolución:

Por definición:

$$MG = \sqrt[3]{12.32.36} = \sqrt[3]{2^2.3.2^5.2^2.3^2} = \sqrt[3]{2^9.3^3}$$

$MG = 2^3.3 = 24$ RPTA. D

5.- La media aritmética y la media geométrica de dos números enteros positivos x e y son enteros consecutivos, entonces el valor absoluto de $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ es :

A) $\sqrt{2}$ ***B) 2*** ***C) 1*** ***D) $3\sqrt{2}$*** ***E) $\sqrt{3}$*** ***UNMSM 93***

Resolución:

Si son enteros consecutivos, la diferencia es 1.

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 1$$

$$\Rightarrow x + y - 2\sqrt{xy} = 2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = 2$$

$$\therefore \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \sqrt{2}$$ RPTA. A

6.- La ciudad de Villa Rica, de 100 casas tiene un promedio de 5 habitantes por casa y la ciudad de Bellavista de 300 casas tiene un promedio de 1 habitante por casa. ¿Cuál es el promedio de habitantes por casa para ambas ciudades?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5* *UNFV 96*

Resolución:

Ordenando los datos en un esquema :

	#casas	#hab/casa
VILLA RICA	100	5
BELLAVISTA	300	1

Se opera como si fuese un promedio ponderado (Pp):

$$Pp = \frac{100\times5+300\times1}{100+300} = \frac{800 \text{ habitantes}}{400 \text{ casas}}$$

Pp = 2 *hab/casa* **RPTA. B**

7.- La edad promedio de 4 hombres es 65 años. Ninguno de ellos es mayor de 70 años. ¿Cuál es la edad mínima que cualquiera de los hombres puede tener?

A) 67 años *B) 65 años* *C) 54 años* *D) 50 años* *E) 45 años*

Resolución:

Primero hallamos la suma de las 4 edades :

$$\frac{\text{Suma de las 4 edades}}{4} = 65 \Rightarrow \text{Suma} = 260$$

Una de las edades será mínima cuando las otras tres sean máximas. La edad máxima es 70, luego :

$$x + 70 + 70 + 70 = 260$$

$$x = 50$$ **RPTA. D**

8.- En un grupo de 18 hombres y 12 mujeres, el promedio de edades de los hombres era 16 y de las mujeres 14. ¿Cuál era el promedio de todo el grupo?

A) 5 *B) 16,2* *C) 15,2* *D) 15,1* *E) 16,1* *PUCP 93 - I*

Resolución:

Suma de edades de los hombres = $18\times16 = 288$

Suma de edades de las mujeres = $12\times14 = 168$

Suma total = $288 + 168 = 456$

El promedio del grupo será la suma total entre el número de personas:

$$\text{prom} = \frac{456}{18+12} = \frac{456}{30} = \boxed{15{,}2} \qquad \text{RPTA. C}$$

9.- El promedio de 50 números es 62,1; se retiran 5 de ellos cuyo promedio es 18. ¿En cuánto varía el promedio?

A) En 5 B) En 4,9 C) En 4,7 D) En 3,9 E) En 5,7 PUCP 94 - II

<u>Resolución:</u>

El promedio de los 50 números es 62,1 : $P_{50} = 62{,}1$

La suma de estos 50 números es : $50 \times 62{,}1 = 3\,105$

La suma de los 5 números que se retiran es : $18 \times 5 = 90$

La suma de los 45 que quedan será : $3\,105 - 90 = 3\,015$

El promedio de estos números será : $P_{45} = \dfrac{3\,015}{45} = 67$

La variación es : $67 - 62{,}1 = \boxed{4{,}9}$ RPTA. B

10.- El promedio de 20 números es 40. Si agregamos 5 números, cuyo promedio es 20. ¿Cuál es el promedio final?

A) 42 B) 20 C) 40 D) 30 E) 36 UNMSM 92

<u>Resolución:</u>

La suma de los 20 primeros números es : $20 \times 40 = 800$

La suma de los otros 5 números : $5 \times 20 = 100$

$$\text{Promedio final} = \frac{\text{Suma total}}{20 + 5} = \frac{800+100}{25} = \boxed{36} \qquad \text{RPTA. E}$$

11.- Tres números enteros a, b y c tienen una media aritmética de 5 y una media geométrica de $\sqrt[3]{120}$. Además se conoce el producto de dos de ellos: b.c = 30. ¿Cuál es la media armónica de los tres números?

A) $\frac{320}{73}$ B) $\frac{350}{75}$ C) $\frac{360}{74}$ D) $\frac{75}{350}$ E) $\frac{73}{360}$

<u>Resolución:</u>

Si la MA es 5, la suma es : $a + b + c = 5 \times 3 = 15$

Si la MG es $\sqrt[3]{120}$, el producto es : $a.b.c = 120$

Y se conoce además que $b.c = 30$, que implica $a = 4$; $b+c = 11$

Ahora, hallamos la MH :

$$\text{MH} = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3abc}{ab+bc+ac} = \frac{3abc}{bc+a(b+c)}$$

$$MH = \frac{3(120)}{30+4(11)} = \frac{360}{74} \qquad \text{RPTA. C}$$

12.- Si la media armónica de dos cantidades es 160 y su media geométrica es 200. ¿Cuál es su media aritmética?

A) 180 B) 179 C) 250 D) 236 E) 186

<u>**Resolución:**</u>

Se sabe que : $MG^2 = MA \times MH$

Entonces, despejamos MA y reemplazamos los datos :

$$MA = \frac{MG^2}{MH} = \frac{200\times 200}{160} = 250 \qquad \text{RPTA. C}$$

II) GRAFICOS ESTADISTICOS

La información estadística, se aprecia mejor cuando se utilizan gráficos, que ilustran claramente las comparaciones y tendencias de los datos que se quieren mostrar.

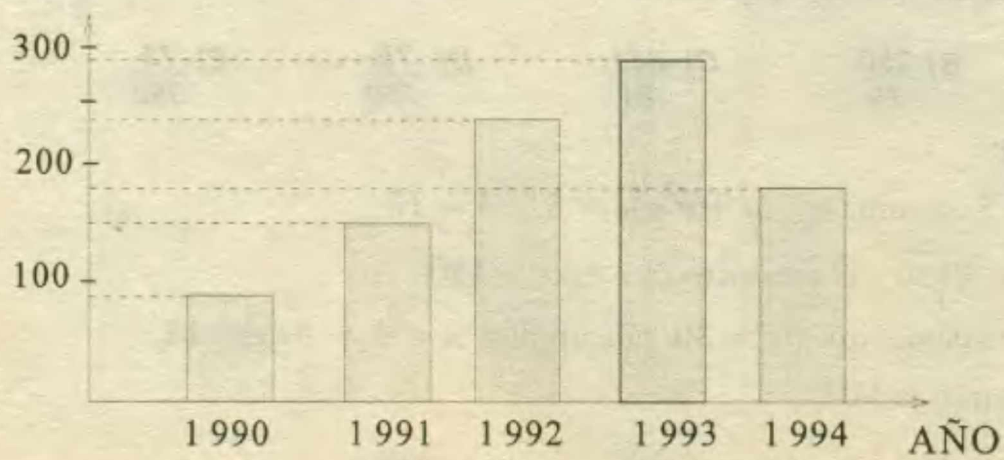
Los gráficos más usados son los gráficos de barras, los de líneas, los circulares, etc. Enseguida se muestran ejemplos de cada uno de estos tipos.

III) GRAFICOS DE BARRAS

Son usados para comparar varias cantidades. Cada ba··a representa una de las cantidades que se van a comparar y se pueden usar barras verti es o barras horizontales.

Ejemplo:

Las preguntas 13, 14, 15 y 16 se refieren al siguiente gráfico :



Casas construidas en Villa Jardín (1 990 -1 994)

13.- La diferencia entre el número máximo y el número mínimo de casas construídas en el período mostrado es :

A) 75 *B) 160* *C) 175* *D) 190* *E) 210*

Resolución:

El número máximo se aprecia en 1 993 y fue de 290 casas.

El número mínimo se aprecia en 1 990 y fue de 80 casas.

La diferencia : 290 - 80 = **210 casas.** RPTA. E

14.- El número total de casas construídas en el período 1 990 - 1 994. ¿Cuántas veces contiene al número de casas construídas en 1994?

A) 11,6 *B) 9* *C) 7* *D) 5* *E) 3,5*

Resolución:

El número total es : 80 + 150 + 240 +290 +190 = 950

El número de casas en 1994 es : 190

El número de veces es : 950 ÷ 190 = **5** RPTA. D

15.- En qué % aumentó la construcción de casas entre 1991 y 1992?

A) 50% *B) 30%* *C) 20%* *D) 75%* *E) 60%*

Resolución:

En 1991 se construyeron 150 casas y en 1992, 240 casas.

El % de incremento es : $\frac{240-150}{150} \times 100 =$ **60%** RPTA. E

16.- En qué año hubo mayor aumento?

A) 1 990 *B) 1 991* *C) 1 992* *D) 1 993* *E) 1 994*

Resolución:

Las cantidades son : $\overset{90}{80}$, $\overset{91}{150}$, $\overset{92}{240}$, $\overset{93}{290}$, $\overset{94}{190}$

Δ_1 Δ_2 Δ_3

Sólo se registran 3 aumentos :

$$\Delta_1 = \frac{150-80}{80} \times 100 = 87{,}5\%$$

$$\Delta_2 = \frac{240 - 150}{150} \times 100 = 60\%$$

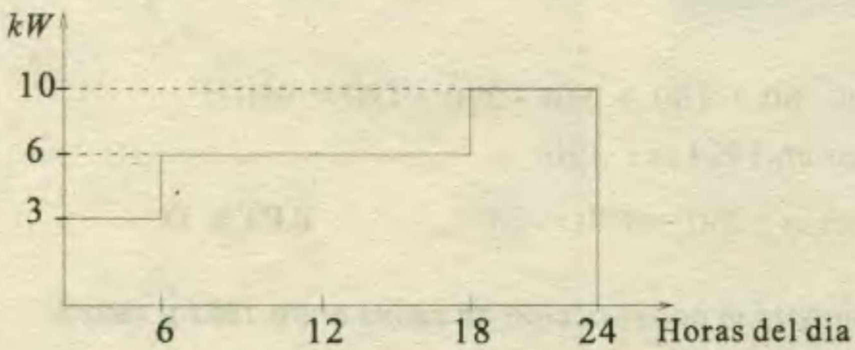
$$\Delta_3 = \frac{290 - 240}{240} \times 100 = 20.8\%$$

El mayor es Δ_1, correspondiente a : **1 991** **RPTA. B**

IV) GRAFICOS LINEALES

Son usados para mostrar tendencias sobre un período de tiempo. En un mismo gráfico se pueden incluir una o más líneas, representando cada línea una información diferente.

Ejemplo: Las preguntas 17, 18, 19 y 20 se refieren al siguiente gráfico:



CONSUMO DE ENERGIA DURANTE UN DIA

MISCELANEA

17.- ¿En qué período del día se produce el máximo consumo?

A) 6 y 12 ***B) 12 y 18*** ***C) 18 y 24*** ***D) 12*** ***E) N.A.***

Resolución:

El máximo consumo es 10 kW y se produce entre las **18 y las 24 horas** **RPTA. C**

18.- ¿Cuántos kW-h de energía se consumen hasta el mediodía?

A) 54 kW-h ***B) 50 kW-h*** ***C) 47 kW-h*** ***D) 34 kW-h*** ***E) 30 kW-h***

Resolución:

Entre las 0 *horas* y las 6 *horas* el consumo es de 3 kW es decir $3 \times 6 = 18$ kW-h.

Entre las 6 y las 12 el consumo es : $6 \times 6 = 36$ kW-h.

Hasta el mediodía se consumen : $18 + 36 =$ **54 kW-h** **RPTA. A**

19.- ¿Cuántos kW-h se consume en todo el día?

A) 110 kW-h ***B) 120 kW-h*** ***C) 130 kW-h*** ***D) 140 kW-h*** ***E) 150 kW-h***

Resolución:

De 0 a 6 horas : $3 \times 6 = 18\ kW\text{-}h$

De 6 a 18 horas : $6 \times 12 = 72\ kW\text{-}h$

De 18 a 24 horas : $10 \times 6 = 60\ kW\text{-}h$

En todo el día : $18 + 72 + 60 =$ **150 *kW-h*** **RPTA. E**

20.- ¿Qué % del consumo diario se consume en la noche (desde las 18 hasta las 24 horas)?

A) 20% ***B) 40%*** ***C) 60%*** ***D) 70%*** ***E) 80%***

Resolución:

En la noche se consumen 60 *kW-h*, lo cual representa:

$\frac{60}{150} \times 100\% =$ **40% del consumo diario** **RPTA. B**

VI) GRAFICOS CIRCULARES

Son usados preferentemente para mostrar relaciones entre varias partes de una cantidad mayor que está representada por un círculo (si se utilizan porcentajes, los 360° del círculo corresponden al 100%). Las partes serán sectores del círculo.

Ejemplo:

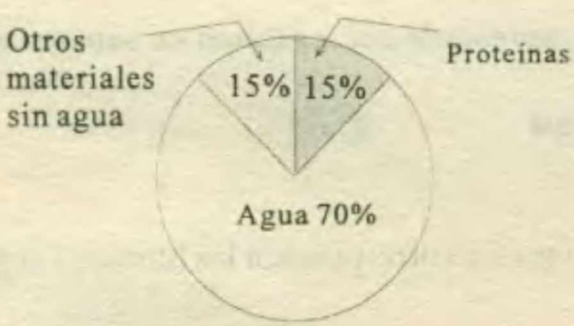


GRAFICO I
DISTRIBUCION DE MATERIALES EN EL CUERPO HUMANO

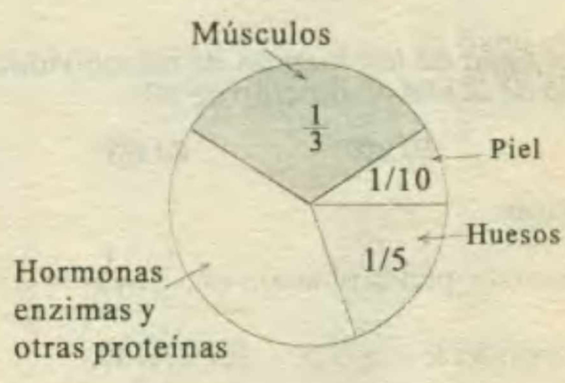


GRAFICO II
DISTRIBUCION DE PROTEINAS EN EL CUERPO HUMANO

Respecto a la información que muestran estos dos gráficos, responda a las preguntas 21, 22, 23, 24 y 25.

21.- Si una persona pesa 85 kg ¿Qué cantidad de agua contiene su cuerpo?

A) 39,5 *B) 45,5* *C) 50* *D) 59,5* *E) 69,5*

Resolución:

La cantidad de agua es el 70% de su peso, es decir :

$$(0{,}70)\,(85) = \boxed{59{,}5\ kg} \qquad \text{RPTA. D}$$

22.- ¿Cuántos grados (°) en el primer círculo deberán ser utilizados para representar la distribución de proteínas?

A) 45º *B) 54º* *C) 65º* *D) 75º* *E) 57º*

Resolución:

Si a 100% le corresponden 360°
a 15% le corresponden x

$$x = \frac{(15)(360)}{100} = \boxed{54°} \qquad \text{RPTA. B}$$

23.- ¿Qué porcentaje del peso total del cuerpo humano corresponde al peso de la piel?

A) 1,5% *B) 2,5%º* *C) 3,5%* *D) 4,5%* *E) 5,5%*

Resolución:

Hay que consultar los dos gráficos. En el 1º se ve que las proteínas son el 15% y en el segundo, que la piel es el 10% de las proteínas entonces será 10% de 15% = **1,5% del peso total del cuerpo.** RPTA. A

24.- Si el peso de los huesos de un individuo se representa por x ¿Cómo se expresará el peso de la piel en función de x?

A) x/1 *B) x/2º* *C) x/3* *D) x/4* *E) x/5*

Resolución:

Entre huesos y piel la relación es $\frac{1}{5} : \frac{1}{10} = 2:1$, luego si x corresponde a los huesos, a la piel le corresponderá: $\boxed{x/2.}$ RPTA. B

25.- ¿Qué parte de las proteínas en el cuerpo está conformada por la piel y los músculos?

A) 10/40 *B) 15/25* *C) 11/15* *D) 12/20* *E) 13/30*

Resolución:

$$\text{Piel + músculos} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{13}{30}} \qquad \text{RPTA. E}$$

26.- En una empresa, el promedio de empleados por sección es 43. ¿Cuántos hay en la sección A, si en las demás hay 25 ; 57 y 51?

A) 35 *B) 36* *C) 37* *D) 38* *E) 39*

Resolución:

Si no se especifica el tipo de promedio, asumimos que es la media aritmética : 43 ; y como son 4 secciones, aplicamos :

$$\frac{A+25+57+51}{4} = 43$$

$$A + 133 = 172 \quad \Rightarrow \quad A = 39 \qquad \text{RPTA. E}$$

27.- Al calcular la media geométrica de 32 ; 18 ; 25 y 36 ; se obtiene :

A) $12\sqrt{5}$ *B)* $11\sqrt{5}$ *C)* $13\sqrt{5}$ *D)* $10\sqrt{5}$ *E)* $14\sqrt{5}$

Resolución:

La M.G. de n datos es la raíz "n" del producto : $(n = 4)$

$$M.G. = \sqrt[4]{32 \cdot 18 \cdot 25 \cdot 36} = 12\sqrt{5} \qquad \text{RPTA. A}$$

28.- El promedio de 3 números es 7. Si la suma de dos de ellos es 13 y todos son consecutivos; hallar la media armónica de los 3 números.

A) 6,8 *B) 6,9* *C) 6,10* *D) 6,11* *E) N.A.*

Resolución:

$$\frac{a+b+c}{3} = 7 \ ; \ a + b = 13$$

Resolviendo se obtiene : $c = 8$

Y como son consecutivos a y b son 6 y 7

La media armónica es : $\dfrac{3}{\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}} = \dfrac{3}{\frac{73}{168}}$

$$MH = \frac{3 \cdot 168}{73} = 6,9 \qquad \text{RPTA. A}$$

29.- En el siguiente conjunto de datos :

47	*49*	*48*	*48*	*49*
51	*47*	*46*	*49*	*52*

¿Cuál es la mediana?

A) 48,2 *B) 48,3* *C) 48,4* *D) 48,5* *E) 48,6*

Resolución:

Ordenando de menor a mayor :

46 ; 47 ; 47 ; 48 ; **48 ; 49** ; 49 ; 49 ; 51 ; 52

La mediana es la m.a. de los datos centrales : $\frac{48+49}{2} =$ **48,5** RPTA. D

30.- En el problema anterior, ¿Cuál es el valor de la moda?

A) 45 *B) 46* *C) 47* *D) 48* *E) 49*

Resolución:

La moda es el dato que más se repite.

Este dato es 49, porque se repite 3 veces, superando a 48 y que se repiten sólo dos veces.

MODA = 49 RPTA. E

31.- El promedio de "m" números es A y el promedio de otros "n" números es B. ¿Cuál es el promedio de todos los números?

A) $\frac{nA+mB}{m+n}$ *B)* $\frac{mA+nB}{m+n}$ *C)* $\frac{nB+mA}{n+m}$ *D)* $\frac{mA+nB}{n+m}$ *E) N.A.*

Resolución:

La suma de los m primeros números es : $m \cdot A$

Y la suma de los otros n números es : $n \cdot B$

$\therefore$ promedio de todos los números = $\frac{mA+nB}{m+n}$ RPTA. B

32.- En un examen las notas fueron : 04; 06; 09; 12; 11; 13; 06; 15; 12 y 10. Un alumno aprueba si su nota es mayor o igual que la media o que la mediana. ¿Cuántos aprobaron?

A) 1 *B) 3* *C) 6* *D) 9* *E) 10*

Resolución:

Ordenando de menor a mayor : 04; 06; 06; 09; 10; 11; 12; 12; 13; 15

La mediana es : $\frac{10+11}{2} = 10{,}5$

La media es : $\frac{\Sigma xi}{n} = \frac{98}{10} = 9{,}8$

Superan a la media o a la mediana las notas mayores que 9, 8 ; es decir 6 alumnos.

RPTA. C

33.- Dados los siguientes datos : 06; 08; 13; 04; 12; 12; 08; 07; 04; 13;15; 07; 08

Calcular la suma de la media, moda y mediana.

A) 20 ***B) 22*** ***C) 24*** ***D) 25*** ***E) 26***

Resolución:

Datos ordenados : 04; 04; 06; 07; 07; 08; **08;** 08; 12; 12; 13; 13; 15

Media : $\frac{\Sigma xi}{n} = \frac{117}{13} = 9$

Mediana : 08

Moda : 08

$\therefore \quad 9 + 8 + 8 \quad$ **25** RPTA. D

34.- Dada la distribución de frecuencias de cierto número de alumnos :

Determinar mediana y la media.

Edades	fi
20	5
22	4
24	6
26	3
28	2

A) 24 ; 19,4
B) 24 ; 19,3
C) 23 ; 18,4
D) 23 ; 19,4
E) 24 ; 19,0

Resolución:

El número de datos es : $\Sigma fi = 5 + 4 + 6 + 3 + 2 = 20$

Como son 20 datos, al ser ordenados de menor a mayor, la mediana estará dada por :

mediana : $\frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{24 + 24}{2} = 24$

Media : $\frac{\Sigma xifi}{n} = \frac{20 \cdot 5 + 22 \cdot 4 + 24 \cdot 6 + 26 \cdot 3 + 28 \cdot 2}{24}$

$= \frac{466}{24} = 19{,}4 \Rightarrow$ **24 ; 19,4** RPTA. A

35.- Dada la distribución de frecuencia de cierto número de niños :

Calcular la diferencia entre la mediana y la moda.

Edades	6	8	10	12
fi			13	15
Fi	4	13		

A) 1 ***D) 4***
B) 2 ***E) 5***
C) 3

Resolución:

Completando el cuadro : $f_1 = 4$; $f_2 = 9$; $f_3 = 12$; $f_4 = 15$

Número de datos : $\Sigma fi = 41$

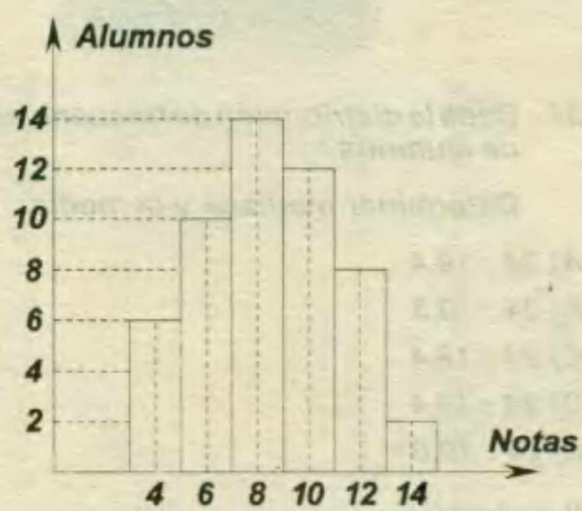
Mediana : $x_{21} = 10$

Media : $\dfrac{6 \cdot 4 + 8 \cdot 9 + 10 \cdot 13 + 12 \cdot 15}{41} = 9{,}90$

Moda : 12

$\therefore$ moda - mediana : 12 - 10 = **2** RPTA. B

36.- En el curso de Matemática 1; se tiene las notas de los alumnos distribuidas según el siguiente histograma de frecuencias :



Entonces la nota de promedio del curso es :

A) 8,44

B) 8,40

C) 8,48

D) 8,46

E) N.A.

Resolución:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, xifi}{\Sigma fi} = \frac{6 \cdot 4 + 6 \cdot 10 + 8 \cdot 14 + 10 \cdot 12 + 12 \cdot 8 + 14 \cdot 2}{6 + 10 + 14 + 12 + 8 + 2}$$

$\bar{x} = \dfrac{440}{52} =$ **8,46** RPTA. D

37.- Según los datos del problema 36. ¿Qué porcentaje de los alumnos superó la nota promedio?

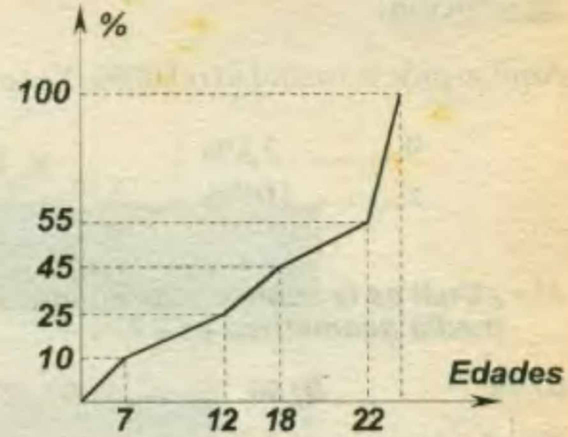
A) 52,3% *B) 52,1%* *C) 52,4%* *D) 52,5%* *E) N.A.*

Resolución:

Superaran 8,46 los que tuvieron nota 10; 12 y 14 es decir : 12 + 8 + 2 = 22 alumnos.

En porcentaje : $\dfrac{22}{42} \cdot 100\% =$ **52,4%** RPTA.

38.- El siguiente cuadro muestra la ojiva de la frecuencia relativa acumulada de las edades de cierto número de alumnos. ¿Qué porcentaje de alumnos tiene edades comprendidas entre 7 y 15 años?



A) 10%

B) 21%

C) 18%

D) 23%

E) 25%

Resolución:

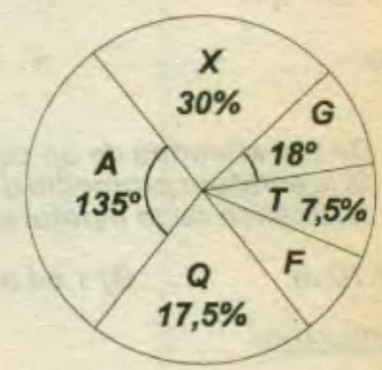
Del diagrama, vemos que entre 0 y 7 años hay 10%

Hasta 15 años tenemos el punto medio entre 25 y 45 : $\frac{25+45}{2} = 35\%$

Entonces, entre 7 y 15 años tenemos : 35% - 10% = **25%** RPTA. E

39.- En el siguiente gráfico se muestra las preferencias de los alumnos de un aula por los cursos de aritmética (A); Algebra (X); Geometría (G); Física (F); Trigonometría (T); Química (Q).

Si 9 alumnos prefieren Física. ¿A cuántos les gusta aritmética?



A) 130 ***D) 140***

B) 135 ***E) 145***

C) 150

Resolución:

Convirtiendo los grados a porcentajes : $135^o = \frac{135}{3,6} = 37,5\%$ ..... ARITMETICA

$18^o = \frac{18}{3,6} = 5\%$ ...... GEOMETRIA

Sumando : $37,5\% + 30\% + 5\% + 7,5\% + 17,5\% = 97,5\%$

En el sector F hay 9 alumnos que completan el 100%, luego F corresponde al 2,5%.

$$\left.\begin{matrix} 9 \text{ ....} & 2,5\% \\ x \text{ ....} & 37,5\% \end{matrix}\right\} \quad x = \frac{9 \cdot 37,5}{2,5} = 135$$

RPTA. B

40.- En el problema anterior, ¿Cuál es el total de alumnos encuestados?

A) 360 ***B) 340*** ***C) 370*** ***D) 320*** ***E) 365***

Resolución:

Aquí se pide la totalidad o 100%. Ya se conoce que 9 alumnos representan el 2,5%, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} 9 \ldots\ldots\ 2{,}5\% \\ x \ldots\ldots\ 100\% \end{array}\right\} \quad x = \frac{9 \cdot 100}{2{,}5} = \boxed{360}$$

RPTA. A

41.- ¿Cuál es la suma de los cuadrados de dos números cuya media aritmética es 5 y su media geométrica es 6?

A) 28 *B) 36* *C) 72* *D) 64* *E) 27*

Resolución:

Siendo a y b los números y según los datos, podemos plantear :

$$\frac{a+b}{2} = 5 \Rightarrow a + b = 10$$

$$\sqrt{ab} = 6 \Rightarrow ab = 36$$

Sabemos que : $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

luego : $a^2 + b^2 = 10^2 - 2 \cdot 36 = \boxed{28}$ RPTA. A

42.- De 500 alumnos de un colegio cuya estatura promedio es de 1,67 m; 150 son mujeres. Si la estatura promedio de todas las mujeres es de 1,60 m. ¿Cuál es el promedio o media aritmética de la estatura de los varones de dicho grupo?

A) 1,70 m *B) 1,64 m* *C) 1,71 m* *D) 1,69 m* *E) 1,68 m*

Resolución:

Recordemos la media ponderada : $\dfrac{n_1 P_1 + n_2 P_2}{n_1 + n_2} = P$

y reemplacemos los datos :

$$\frac{150\,(1{,}60) + 350\,(P_2)}{500} = 1{,}67$$

$$350\, P_2 = 500\,(1{,}67) - 150\,(1{,}60)$$

$$P_2 = \boxed{1{,}70}$$

RPTA. A

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- El promedio de la temperatura registrada durante 5 días consecutivos fue de 26° sobre cero. Si en los cuatro primeros días se registró 21°, 27°, 26° y 28° ¿Cuál fue la temperatura del quinto día?

A) 25 B) 26 C) 27 D) 28 E) 29

2.- La media geométrica de $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{4}$ es :

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) N.A.

3.- La media armónica de 3, 6 y 12 es :

A) 4,5 B) 9 C) 4 D) 6 E) 7,5

4.- La media armónica de dos números es $18\frac{3}{4}$ mientras que la media aritmética es 20. Hallar la media geométrica.

A) 18 B) $5\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{15}$

D) 19 E) N.A.

5.- El promedio de cinco números es 85. Se considera un sexto número y el promedio aumenta en 15. El sexto número es :

A) 15 B) 35 C) 75 D) 115 E) 175

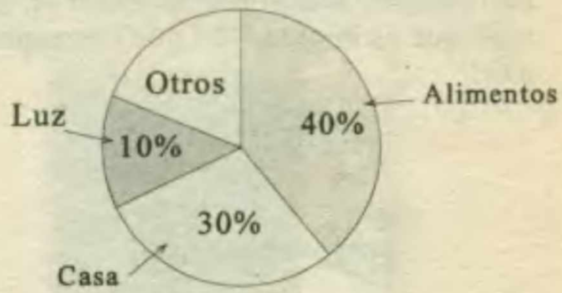
6.- Un alumno ha obtenido 15 de promedio luego de rendir tres exámenes. Si dos de sus notas fueron 13 y 14 la tercera nota fue :

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

7.- El promedio de cuatro números es 72, un quinto número es agregado y ahora el promedio es 70. ¿Cuál es el quinto número?

A) 58 B) 59 C) 60 D) 61 E) 62

8.- El gráfico muestra la distribución de los gastos de un hogar. ¿Cuántos grados corresponderán al sector alimentación?



A) 135° B) 120° C) 144°

D) 90° E) N.A.

9.- En el problema anterior, si los gastos en el sector "casa" ascienden a 450 soles ¿Cuánto se gasta en alimentos?

A) S/.500 B) S/.750 C) S/.800

D) S/.600 E) S/.720

10.- Con la información de los problemas 8 y 9, calcular cuánto se asigna para ahorrar si este rubro es la mitad del sector correspondiente a "OTROS"?

A) S/.300 B) S/.150 C) S/.200

D) S/.240 E) N.A.

11.- La media aritmética de: 9 ; 10 ; 10 ; 15 ; x es 12. ¿Cuál es el valor de x?

A) 12 B) 13 C) 15 D) 14 E) 16

12.- El precio promedio de tres artículos es 22 *soles*. Si ninguno de ellos cuesta menos de 21 *soles*. ¿Cuál es el precio máximo que puede tener uno de ellos?

A) 21 B) 22 C) 25 D) 24 E) 50

13.- ¿Cuál es el promedio de un décimo, un centésimo y un milésimo?

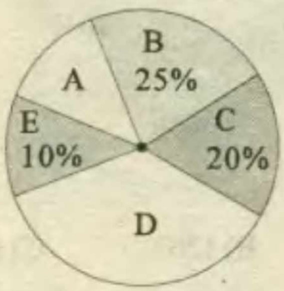
A) 0,01 B) 0.111 C) 0,333

D) 0,037 E) 0,003

14.- ¿Cuál es la media armónica de 30 ; 60 ; 120?

A) 35 B) 55 C) 50 D) 45 E) 40

15.- En el siguiente diagrama circular. ¿Qué porcentaje corresponde al sector A, si se sabe que es la mitad del que corresponde a D?



A) 15% B) 20% C) 45% D) 10% E) 12%

NIVEL B

16.- La media aritmética de los "n" primeros enteros positivos es :

A) $\frac{n}{2}$ B) $\frac{n^2}{2}$ C) n D) $\frac{n-1}{2}$ E) $\frac{n+1}{2}$

17.- La media aritmética de un conjunto de 50 números es 38. Si dos números, digamos 45 y 55 se quitan, entonces la media aritmética del cojunto restante de números es :

A) 36,5 B) 37 C) 37,2

D) 37.5 E) 37.52

18.- La razón entre la media aritmética y la media geométrica de dos números es 5:4. Hallar la razón entre la media aritmética y la media armónica de dichos números.

A) 4:5 B) 16:9 C) 25:16 D) 25:24 E) N.A.

19.- La diferencia de dos números es 7 y la suma de su media geométrica y su media aritmética es 24,5. Hallar el exceso de la media aritmética sobre la media geométrica.

A) 0,25 B) 0,5 C) 1,0 D) 1,5 E) 2,0

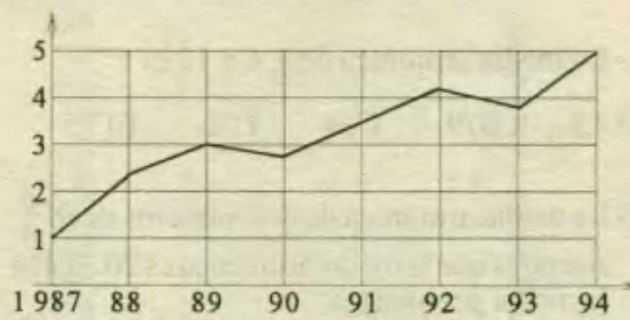
20.- El promedio aritmético de las edades de cuatro personas es 48 años. Ninguna de ellas es menor que 45. ¿Cuál es la edad máxima que podría tener uno de ellos?

A) 61 B) 53 C) 57 D) 54 E) 60

21.- En un salón de 20 estudiantes, la calificación promedio en un exámen fue de 80 y en otro salón de 30 estudiantes, la calificación promedio fue de 70. ¿Cuál fue la nota promedio para los estudiantes de ambos salones?

A) 75 B) 74 C) 72 D) 77 E) N.A.

Las preguntas 22 a 25 se refieren al siguiente gráfico :



Producción de café durante los años 1 987 - 1 994

22.- ¿Qué cantid: le café aproximadamente se produjo en 1991? (en millones de toneladas).

A) 2,5 B) 3,4 C) 4,0 D) 2,6 E) 3,0

23.- ¿En qué años disminuyó la producción?

A) 90 y 92 B) 90 y 94 C) 89 y 93

D) 90 y 93 E) N.A.

24.- ¿En cuántos millones de toneladas aumentó la producción entre 1 990 y 1 992?

A) 1,5 B) 2,0 C) 2,5 D) 0,5 E) 1,0

25.- ¿En qué % aumentó la población entre 1 990 y 1 992?

A) 44% B) 55% C) 50%

D) 36% E) 75%

26.- En una fábrica el promedio de empleados por sección es 35. ¿Cuántos hay en la sección A si en las demás hay 29; 42 y 38?

A) 32 B) 31 C) 37 D) 35 E) 41

27.- Al calcular la Media Geométrica de 32; 54 y 64 se obtiene :

A) 42 B) 50 C) 36 D) 48 E) 60

28.- El promedio de 12 números es 15 y el promedio de otros 25 números es 12; el promedio de todos los números es :

A) $16,\hat{3}$ B) 17,5 C) $15,\hat{3}$

D) $17,\hat{7}$ E) 16,5

29.- El promedio de tres números es $17,\hat{3}$; el mayor es el doble del menor y el mediano es 4 unidades más que el menor. Hallar el menor de los números.

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

30.- Dado el siguiente conjunto de valores :

$A = \{1 ; 2 ; 1 ; 3 ; 2 ; 1 ; 7 ; 6 ; 3\}$;

calcular la mediana de los valores.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 7

NIVEL C

31.- La media aritmética de 200 números pares de tres cifras es 699, y la media aritmética de otros 200 números pares de tres cifras es 299. ¿Cuál es la media aritmética de los números pares de 3 cifras no considerados?

A) 498 B) 499 C) 948

D) 949 E) N.A.

32.- La media geométrica de cuatro enteros diferentes es $5\sqrt{5}$. La media aritmética de dichos números será :

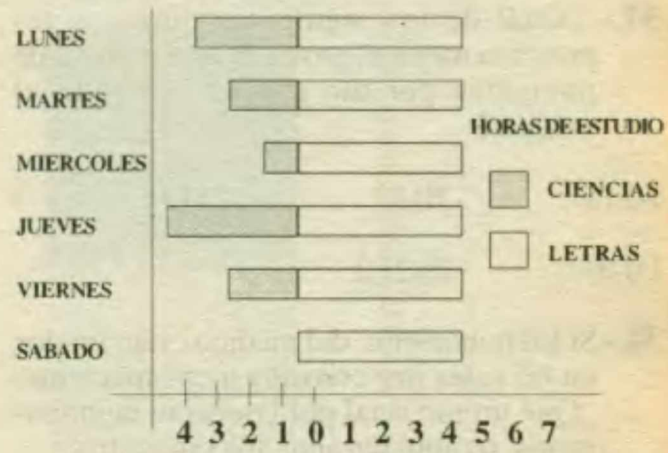
A) 15 B) 35 C) 39

D) 37,5 E) 45

33.- La media aritmética de dos enteros positivos es a la media geométrica de los mismos como 13 es a 12. El menor de dichos números puede ser :

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

El gráfico muestra el número de horas que cada día de la semana dedica un alumno al estudio.



Utilice la información mostrada para resolver las preguntas 34 y 35.

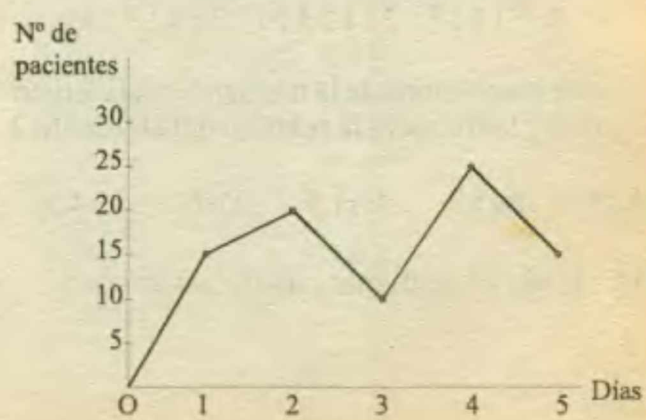
34.- El promedio por día de horas de estudio del alumno es :

A) 6,4 B) 6 C) 7 D) 8,4 E) 8,6

35.- El número de horas por semana que el alumno dedica al estudio de letras es :

A) 29 B) 30 C) 31 D) 32 E) 34

El gráfico lineal indica el número de pacientes atendidos por un médico durante los cinco primeros días de la semana.



Utilice esta información para responder a las tres preguntas siguientes:

36.- ¿Cuántos pacientes han tenido consulta con el médico durante los cinco días?

A) 75 B) 105 C) 70

D) 85 E) 90

37.- ¿Cuál de los siguientes números representa mejor el promedio del número de pacientes por día que ha obtenido el médico?

A) 15 B) 17 C) 18,5

D) 20 E) 21,2

38.- Si los honorarios del médico están fijados en 60 soles por consulta a cadapaciente, ¿Qué monto total por concepto de honorarios recibió durante los cinco días?

A) 4 980 B) 3 200 C) 2 700

D) 3 920 E) 5 100

39.- Dado el siguiente conjunto de valores :

$A = \{1 ; 2 ; 1 ; 3 ; 1 ; 4 ; 5 ; 1 ; 2 ; 5\}$;

calcular la suma de la moda y la mediana de los valores.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 2,5 E) 3,5

40.- Dado el conjunto de valores :

$A = \{1 ; 3 ; 2 ; 1 ; 3 ; 1 ; 2 ; 4 ; 3 ; 4\}$

calcular la suma de la frecuencia del elemento 3 y la frecuencia relativa del elemento 2.

A) 5 B) 3,2 C) 1,5 D) 6 E) 4,5

41.- Dado el siguiente cuadro estadístico :

x_i	f_i	F_i
6		4
8	6	
10		15
13		20
15	8	

; calcular la moda.

A) 6 B) 8 C) 10 D) 13 E) 15

42.- Dadas las edades de 20 alumnos de un aula:

15	17	19	20	18
18	19	17	16	17
20	15	20	18	15
15	16	17	15	17

se puede decir entonces que el sistema es:

A) Unimodal D) Amodal

B) Bimodal E) Multimodal

C) Trimodal

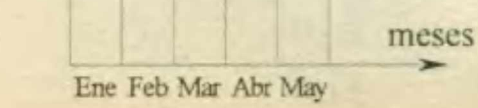
43.- Dado el siguiente cuadro estadístico :

x_i	f_i	F_i
2		6
4		20
6	16	
10	10	

; calcular la mediana.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 10 E) 8

44.- Dado el gráfico :



Se afirma :

I. El rendimiento más bajo se da en febrero y marzo.

II. A partir de marzo hay una clara recuperación en su eficiencia.

III. En abril su eficiencia llega al 50%.

Son ciertas :

A) Solo I B) Solo II C) Solo III

D) I y II E) N.A.

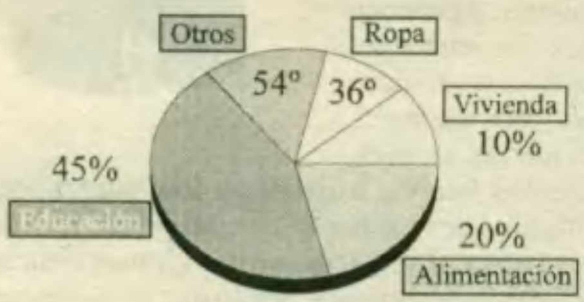
45.- Para el siguiente gráfico :

¿Qué se puede afirmar la persona tiene un ingreso de S/. 300?

I. La persona gasta S/. 135 en educación.

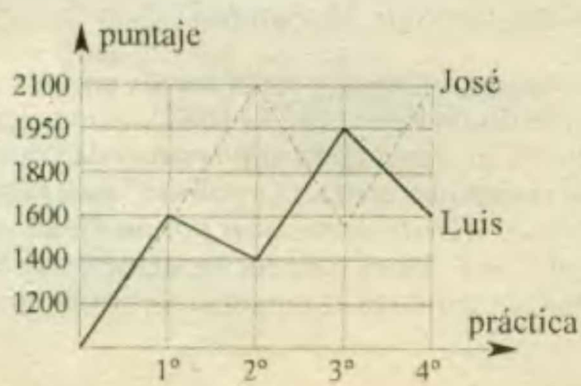
II. Gasta igual en vivienda y en ropa.

III. En alimentación gasta S/. 50.



A) I B) II y I C) II D) I y III E) III

46.- El siguiente gráfico muestra el ranking de notas de dos alumnos.



Son ciertas :

I. Luis tiene promedio 1587,5

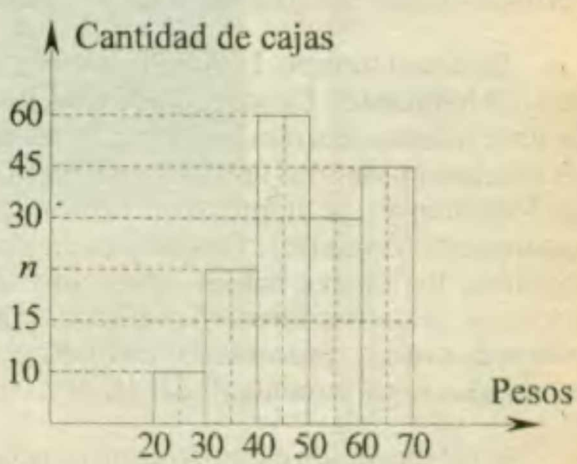
II. Si el promedio para ingresar es 1700 entonces José ingresa.

III. José saca siempre más nota que Luis.

A) Solo I B) Solo II C) I y II

D) I y III E) II y III

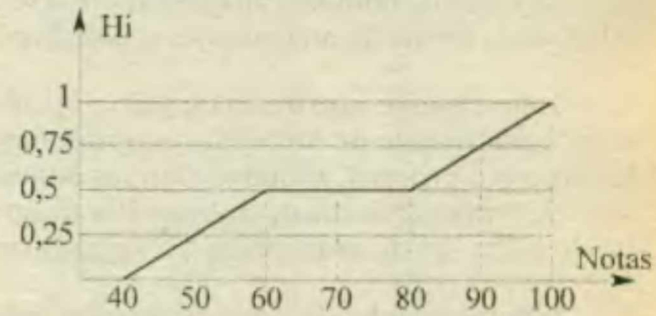
47.- Dado el siguiente histograma :



halla el valor de "n" sabiendo que la media vale 49,84848484848....

A) 17 B) 19 C) 20 D) 22 E) 25

48.- En el siguiente gráfico :



ha sido formando con las notas obtenidas en un examen. Si la población corresponde a un total de 400 alumnos. ¿Cuántos obtendrán notas entre 70 y 90?

A) 100 B) 200 C) 250 D) 300 E) 150

ESTADISTICA

"Dejemos que el mundo sea nuestro laboratorio y obtengamos las estadísticas de lo que ahí ocurre".

John Graunt (1620 - 1674)

El análisis estadístico nació en Londres, en donde John Graunt publicó en 1662 un libro extraordinario: *Observaciones Naturales y Políticas sobre los Registros de Mortalidad*.

Diagrama Continuo Tridimensional

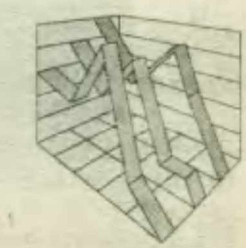


Diagrama Porcentual Tridimensional



En aquel tiempo, Londres ya había alcanzado una población de cien mil habitantes. La sobrepoblación, las dificultades para satisfacer las necesidades diarias de la vida, la prevalencia de enfermedades y las muchas epidemias anuales, todo esto se combinó para hacer que los londinenses se interesaran profundamente en los registros de nacimientos y muertes. Después de la gran epidemia de 1603, estos registros, los cuales habían aparecido sólo esporádicamente hasta entonces, se convirtieron en publicaciones semanales regulares. Las causas de muerte, presentadas en los *Registros de Mortalidad*, fueron publicadas regularmente desde 1629.

La elaboración estadística no es notable en sí misma. Aparecen estadísticas en la Biblia y aún en publicaciones antiguas. Sin embargo, el trabajo de Graunt, es el primero en el que se analizan las estadísticas y de cuyo análisis se obtienen algunas conclusiones. Por ejemplo, Graunt señaló el *porcentaje* casi constante de muertes por accidentes, suicidios y ciertas enfermedades. A los ojos de él, estos hechos mostraban una sorprendente regularidad. También descubrió que había más nacimientos de varones que de mujeres, pero dado que los hombres estaban sujetos a labores de mayor riesgo y al servicio militar Graunt concluyó que el número de hombres en edad de casarse casi igualaba al de mujeres, por lo que la monogamia debía ser la forma de matrimonio señalada por la naturaleza.

John Graunt, hijo de un tapicero, nació en Londres en 1620. A temprana edad fue aprendiz de un comerciante de mercería y continuó en este negocio toda su vida. Principalmente, a base de esfuerzos propios, adquirió algunos conocimientos. Estudiaba latín y francés por las mañanas antes de empezar su día de trabajo. Por desgracia no tenía práctica para las matemáticas, materia que le pudo ser de gran ayuda en su análisis de los *Registros de Mortalidad*.

Graunt gozaba de gran reputación entre sus contemporáneos y tenía varios amigos en el mundo académico. Entre estos amigos se hallaba Sir William Petty (1623 - 1687), quien alentó y ayudó a Graunt en el estudio de los Registros. Petty era profesor de la universidad de Oxford y más tarde se convirtió en médico del ejército. El acuñó el término "aritmética política" para la recién descubierta ciencia de las estadísticas y la definió como, *"el arte de razonar por medio de cifras y gráficas acerca de aspectos relacionados con el gobierno"*. Petty trató fervientemente de hacer cuantitativas a las ciencias sociales y evitar así el uso de palabras comparativas, superlativas y de argumentos intelectuales.

20 Mezclas

En este capítulo se estudiarán los problemas que tratan sobre la unión de ciertas sustancias en proporciones conocidas a las que suelen llamar aleaciones, mezclas, o, soluciones. Cada sustancia o ingrediente tiene un valor numérico característico, lo cual producirá en la mezcla un valor resultante o promedio.

Por ejemplo se pueden mezclar tipos de vino de diferente precio, soluciones de alcohol con diferente tipo de concentración, dos o más tipos de metales para formar una aleación, etc.

I) RELACIONES BASICAS

1.- LA CANTIDAD TOTAL DE MEZCLA ES IGUAL A LA SUMA DE LOS INGREDIENTES.

Cantidad Total de mezcla = cantidad de A+cantidad de B+...

Ejm: Se mezclan 10 *kg* de cemento con 40 *kg* de arena. ¿Cuánto pesa la mezcla?

Peso de la mezcla = 10 + 40 = 50 *kg*.

2.- CADA INGREDIENTE EN LA MEZCLA TIENE UNA CONCENTRACIÓN (C) QUE SE EXPRESA COMO UN PORCENTAJE.

$$C_A = \frac{\text{Cantidad de A}}{\text{Cantidad total de mezcla}} \times 100\%$$

Ejm: En la mezcla anterior de cemento y arena, el % de concentración del cemento es :

$$C = \frac{\text{Cantidad de Cemento}}{\text{Cantidad total de mezcla}} \times 100\% = \frac{10}{50} \times 100\% = 20\%$$

Esto quiere decir que en la mezcla, el 20% es cemento.

3.- LA CANTIDAD DE INGREDIENTE EN UNA MEZCLA SE PUEDE CONOCER A PARTIR DE LA CONCENTRACIÓN DEL INGREDIENTE.

Cantidad de A = cantidad de mezcla × Concentración de A

Ejm: Si en una solución de agua y alcohol, el 80% es alcohol ¿Cuánto alcohol hay en 20 *litros* de solución?

Cantidad de alcohol = (20) (0,80) = 16 *lts.*

4.- CUANDO DOS MEZCLAS SE COMBINAN PARA FORMAR UNA TERCERA, SE PUEDE DETERMINAR LA CANTIDAD DE UN INGREDIENTE EN LA MEZCLA FINAL.

Cant. final de A = Cant. de A en la mezcla 1 + Cant. de A en la mezcla 2

Ejm: 30 *litros* de solución de alcohol al 40% se mezcla con 20 *litros* de alcohol al 25%. ¿Cuánto alcohol puro hay en la mezcla?

Alcohol puro = 40% de 30 + 25% de 20

= 12 + 5 = 17 *litros.*

5.- CUANDO DOS MEZCLAS SE COMBINAN PARA FORMAR UNA TERCERA TAMBIÉN SE CUMPLE:

$$C_m \cdot V_m = C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2$$

donde C = concentración ; V = volumen ; $V_m = V_1 + V_2$

Ejm: Si se requiere hallar la concentración de la mezcla (C_m), según los datos del ejemplo anterior :

$$C_m\ (30+20) = (40\%)\ (30) + (25\%)\ (20)$$

$$C_m \times 5 = (40\%)\ (3) + (25\%)\ (2)$$

$$C_m = 34\%$$

6.- CUANDO LOS INGREDIENTES TIENEN COSTOS DIFERENTES (C_i) Y SE MEZCLAN EN DIFERENTES CANTIDADES (N_i), SE PUEDE DETERMINAR EL COSTO PROMEDIO (C_p)

$$C_p = \frac{C_1 N_1 + C_2 N_2}{N_1 + N_2}$$

Ejm: Si se mezclan 10 *kg* de café de S/.26 el kilogramo con 20 *kg* de café de 32 *soles* el *kilogramo* ¿Cuál es el precio de 1 *kilogramo* de la mezcla?

$$C_p = \frac{(26)\ (10) + (32)\ (20)}{10 + 20} = \frac{260 + 640}{30} = 30 \textit{ soles}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Si se mezclan 100 litros de aceite con 1m³ de agua ¿Qué parte de la mezcla es aceite?

A) $\frac{1}{10}$ *B)* $\frac{2}{11}$ *C)* $\frac{1}{9}$ *D)* $\frac{1}{11}$ *E)* $\frac{3}{10}$ ***UNMSM 91***

Resolución:

Se debe expresar la cantidad de cada ingrediente en las mismas unidades:

aceite = 100 *litros* ; agua = 1 m^3 = 1 000 *litros*

$$\text{parte de aceite} = \frac{\text{Vol. de aceite}}{\text{Vol. de mezcla}} = \frac{100}{100 + 100} = \boxed{\frac{1}{11}}$$

RPTA. D

2.- El latón se compone de 33 partes de zinc y 67 de cobre. En 850 kg de latón ¿qué diferencia hay entre los pesos de cobre y zinc?

A) 249 kg *B) 169 kg* *C) 289 kg* *D) 340 kg* *E) N.A.* ***PUCP 93 - II***

Resolución:

Las partes de zinc, y cobre suman: 33 + 67 = 100

Entonces, en el latón (que viene a ser la mezcla de zinc y cobre) el 33% es zinc y el 67% es cobre; luego en 850 *kg* de latón:

Peso de cobre = 67% de 850 = 569,5 *kg*

Peso de zinc = 33% de 850 = 280,5 *kg*

Diferencia de pesos = **289 *kg*** RPTA. C

3.- Si 30 litros de una solución contiene 12 litros de alcohol. ¿Cuántos litros de agua debemos agregar para obtener una solución al 25%?

A) 18 *B) 16* *C) 14* *D) 12* *E) 10*

Resolución:

Antes de agregar agua tenemos 12 *litros* de alcohol y 18 *litros* de agua.

Si agregamos x *litros* de agua, tendremos que los ingredientes son :

agua : $18 + x$
alcohol : 12
mezcla : $30 + x$

Si la concentración de alcohol debe ser 25%

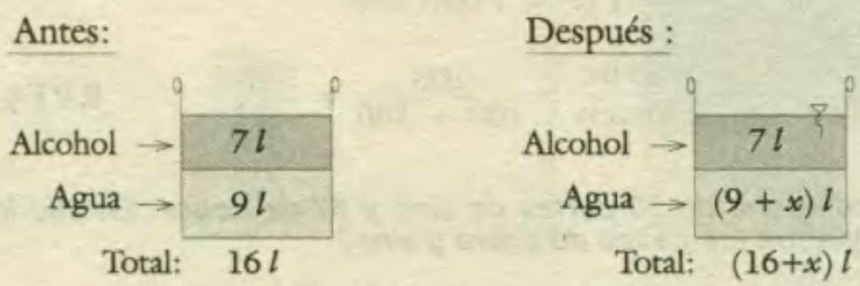
$$25\% = \frac{12}{30+x}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{12}{30+x} \Rightarrow \boxed{x = 18 \text{ litros}} \qquad \text{RPTA. A}$$

4.- En 16 litros de una mezcla de alcohol y agua, 7 litros son de alcohol. ¿Cuánta agua debe añadirse para que 1/3 de la mezcla resultante sea alcohol?

A) 6 *B) 7* *C) 5* *D) 4* *E) 3* ***UPCH 89***

Resolución:



En la mezcla resultante : $\frac{1}{3} = \frac{7}{16 + x}$

Resolviendo : $\boxed{x = 5}$ RPTA. C

5.- Una cierta cantidad de azúcar de S/.1,20 el kg se mezcla con 100 kg de azúcar de S/.1,80 el kg. Si el precio resultante era S/.1,60 el kg , hallar dicha cantidad.

A) 60 kg *B) 50 kg* *C) 120 kg* *D) 100 kg* *E) 150 kg* ***PUCP 93 - I***

Resolución:

Tenemos x *kg* de azúcar de 1,20 mezclados con 100 *kg* de azúcar de 1,80 el *kg*. El costo promedio es 1,60.

$$1{,}60 = \frac{(x)\,(1{,}20) + (100)\,(1{,}8)}{x + 100}$$

$$1{,}6x + 160 = 1{,}2x + 180$$

$$0{,}4x = 20$$

$$\boxed{x = 50 \text{ kg}} \qquad \text{RPTA. B}$$

6.- Se tiene 2 litros de solución de alcohol al 20%. Si se le agrega 1 litro de agua y 1/2 litro de alcohol. ¿Cuál es el % de alcohol de la nueva mezcla?

A) 27,5% *B) 25%* *C) 25,2%* *D) 25,7%* *E) 20%* ***PUCP 94 - I***

Resolución:

Inicialmente tenemos : 2 *litros* de mezcla (alcohol y agua)

Cantidad de alcohol : 20% de 20 = 0,4 *litros*

Cantidad de agua : 2 - 0,4 = 1,6 *litros*

Después de los agregados habrá :

Cantidad de alcohol = 0,4 + 0,5 = 0,9 *litros*

Cantidad de agua = 1,6 + 1,0 = 2,6 *litros*

$$\% \text{ de alcohol} = \frac{0{,}9}{0{,}9+2{,}6} \times 100\% = 25{,}7\%$$ RPTA. D

7.- Se han mezclado 60 kg de una mercancía de 5 soles el kg con otra cuyo peso representa el 25% del peso total y se ha obtenido como precio medio del kilogramo 4,75 soles. ¿Cuál es el precio por kilogramo de la segunda mercancía?

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

Resolución:

Si la segunda mercancía representa el 25% del total, la primera mercancía (60 *kg*) representa el 75% del total. De aquí concluimos que de la segunda hay 20 *kg*.

(60 *kg*) + (20 *kg*) = (80 *kg*)

precio = 5 precio = x precio = 4,75

$$60\,(5) + 20\,(x) = 80\,(4{,}75)$$

$$x = 4$$ RPTA. C

8.- Un depósito tiene una mezcla de 90 litros de alcohol y 10 litros de agua. ¿Qué cantidad de alcohol debe añadirse para que la mezcla sea de 95% de pureza relativa al alcohol?

A) 100 litros *B) 90 litros* *C) 95 litros* *D) 105 litros* *E) 85 litros*

Resolución:

$$95\% = \frac{\text{Vol. de alcohol}}{\text{Vol. total}} = \frac{90 + x}{100 + x}$$

Siendo x la cantidad de alcohol que se debe añadir, despejamos:

$$95 + 0{,}95\,x = 90 + x$$

$$5 = 0{,}05\,x \Rightarrow x = 100$$ RPTA. A

9.- A 215 litros de un vino que importa 0,40 soles cada uno, se añaden 5 litros de alcohol de 2,50 soles el litro. ¿En cuánto debe venderse el litro de la mezcla para ganar el 20% sobre el precio de compra?

A) 0,537 *B) 0,587* *C) 0,337* *D) 0,437* *E) 0,357*

Resolución:

El costo promedio es : $Cp = \dfrac{215(0,4) + 5(2,5)}{215 + 5} = \dfrac{98,5}{220}$ cada *litro*

El precio de Venta para ganar el 20% será :

$$P_V = 120\% \text{ de } \frac{98,5}{220} = \boxed{0,537} \qquad \text{RPTA. A}$$

10.- Se han mezclado 50 litros de alcohol de 96° de pureza con 52 litros de alcohol de 60° de pureza y 48 litros de otro alcohol. ¿Cuál es la pureza de este último alcohol si los 150 litros de mezcla tienen 80° de pureza?

A) 84° *B) 78°* *C) 72°* *D) 85°* *E) 92°*

Resolución:

$$C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 = C_mV_m$$

$$(96)(50) + (60)(52) + C_3(48) = (80)(150)$$

$$4\,800 + 3\,120 + C_3.48 = 12\,000$$

$$\boxed{C_3 = 85°} \qquad \text{RPTA. D}$$

11.- Hallar el número de kilogramos que se deben tomar de dos ingredientes cuyos precios son 45 y 85 soles por kilogramo respectivamente para obtener un producto de 40 kg a un precio de 60 soles por kilogramo.

A) 20 y 20 *B) 15 y 25* *C) 12 y 18* *D) 30 y 10* *E) N.A.*

Resolución:

Sea x el # de *kg* de 45 *soles*, y , $40 - x$ el # de *kg* de 85 *soles*

$\Rightarrow \quad x(45) + (40 - x)(85) = 40(60)$

Resolviendo : $x = 25$; $40 - x = \boxed{15}$ RPTA. B

12.- Un depósito contiene 20 litros de una mezcla de alcohol y agua al 40% de alcohol en volumen. Hallar el número de litros de mezcla que se deben sustituir por un volumen igual de agua para que la solución que resulte sea de 25% de alcohol en volumen.

A) 5,0 *B) 8,0* *C) 7,5* *D) 6,0* *E) 9,0*

Resolución:

Sea x = Volumen que se extrae de la solución al 40%

Volumen de alcohol en la solución final = Volumen de alcohol en 20 l de solución al 25%

$$0,40\ (20 - x) = 0,25\ (20)$$

Resolviendo : $x = 7,5$ *litros* RPTA. C

13.- Hallar la masa de agua que se debe evaporar de 40 kg de una solución salina al 20% para que resulte una solución al 50%.

A) 15 kg *B) 16 kg* *C) 20 kg* *D) 24 kg* *E) 18 kg*

Resolución:

Sea x = masa en *kg* que se debe evaporar.

masa de sal en la solución al 20% = masa de sal en la nueva solución:

$$0,20\ (40) = 0,50\ (40 - x)$$

$$8 = 20 - 0,5\,x$$

$x = 24$ RPTA. D

14.- Dos minerales de Manganeso contiene el 40% y el 25% de dicho metal respectivamente. Calcular las toneladas de cada uno de ellos que se deben mezclar para obtener 100 toneladas de mineral con una riqueza del 35%.

A) 25 y 65 *B) 27 y 63* *C) 33 y 67* *D) 40 y 60* *E) N.A.*

Resolución:

Sean x = peso necesario del mineral de 40%

$100 - x$ = peso necesario del mineral de 25%

40% de x + 25% de $(100 - x)$ = 35% del Peso total.

$$0,4\,x + 0,25\ (100 - x) = 0,35\ (100)$$

Resolviendo : $x = 67$; $100 - x = 33$ RPTA. C

15.- Si ha mezclado 200 litros de vino de 5 soles el litro con 30 litros de vino de mayor precio, obteniéndose una mezcla con un precio medio de 6,5 soles el litro. El costo por litro del vino de mayor precio es :

A) 8,5 *B) 16,5* *C) 14,0* *D) 16,0* *E) 8,0*

Resolución:

Sea x el costo del vino de mayor precio : $200\ (5) + 30\,x = 230\ (6,5)$

$$1\ 000 + 30\,x = 1\ 495$$

$x = 16,5$ RPTA. B

16.- Se han mezclado vinos de 100 soles y 40 soles el litro para vender a 75 soles el litro. ¿En qué relación debe hacerse la mezcla?

A) En la relación de 7 a 9 B) de 5 a 4 C) de 3 a 4 D) de 7 a 5 E) de 5 a 4

Resolución:

Sea "x" la cantidad del vino de mayor precio, e, "y" la del menor precio.

$$100x + 40y = 75(x + y)$$
$$100x - 75x = 75y - 40y$$
$$25x = 35y$$
$$\frac{x}{y} = \frac{7}{5}$$

RPTA. D

17.- Un químico tiene "m" onzas de agua salada, es decir que contiene el m% de sal. ¿Cuántas onzas de sal debe agregar para obtener una solución que tenga 2m % de sal?

A) $\frac{m}{100 + m}$ ***B)*** $\frac{2m}{100 - 2m}$ ***C)*** $\frac{m^2}{100 - 2m}$ ***D)*** $\frac{m^2}{100 + 2m}$ ***E)*** $\frac{2m}{100 + 2m}$

Resolución:

Sea x la cantidad de sal que se debe agregar.

Sal en la solución final = $m\%$ de $m + x = \frac{m^2}{100} + x$

Cantidad de mezcla = $m + x$

Por condición del problema : $\frac{m^2}{100} + x = 2m\ \%$ de $(m + x)$

Resolviendo : $x = \frac{m^2}{100 - 2m}$ RPTA. C

18.- En un litro de agua se diluyen 10 gramos de azúcar; en otro litro de agua se diluyen 5 gramos de azúcar. Qué cantidad de azúcar tiene una mezcla de 100 mililitros de la primera solución más 20 centilitros de la segunda solución?

A) 0,2 g B) 2 g C) $\frac{20}{7}$ ***g D) 5 g E) N.A.***

Resolución:

La 1ª está concentrada al $\frac{10}{1\,000} = 1\%$ y la segunda al $\frac{5}{1\,000} = 0,5\%$

Azúcar en la mezcla final = 1% de (100) = 0,5% de (200)

$= 1 + 1$

$= 2\ gramos$ RPTA. B

19.- Si se funde 50 gramos de oro con 450 gramos de una aleación, la ley de la aleación aumenta en 0,02. ¿Cuál es la ley de la aleación primitiva?

A) 0,900 B) 0,850 C) 0,800 D) 0,750 E) N.A.

Resolución:

La ley del oro puro es 1 ó 100% y la de la aleación es x

$$1\,(50) + x\,(450) = (x + 0{,}02)\,(500)$$

$$50 + 450x = 500x + 10$$

$$x = 0{,}8$$ RPTA. C

20.- Habiendo agregado 30 gramos de oro puro a una aleación de oro de 18 kilates, que pesa 30 gramos. ¿Qué ley de oro se obtendrá, expresada en kilates?

A) 23 kilates B) 21 kilates C) 19 kilates D) 20,6 kilates E) 24 kilates

Resolución:

En *kilates*, la ley del oro puro es 24 k.

Sea x la ley resultante : $(30 + 30)\,(x) = 30\,(24k) + 30\,(18k)$

$$2x = 24k + 18k$$

$$x = 21k$$ RPTA. B

21.- Los 3/4 de un barril, más 7 litros son de H_2O. Y 1/3 menos 20 litros son de petróleo; si se saca 39 litros de la mezcla, ¿Cuál es la diferencia de los volúmenes que quedan de H_2O y petróleo respectivamente?

A) 60 B) 55 C) 69 D) 59 E) 70

Resolución:

Si solo hay agua y petróleo, y "x" es la capacidad de barril : $\frac{3}{4}x + 7 + \frac{1}{3}x - 20 = x$

$$\frac{1}{12}x = 13 \Rightarrow x = 156$$

Volumen de agua : $\frac{3}{4}\,.156 + 7 = 124$ *lts.*

Volumen de petróleo : $\frac{1}{3}\,.\,156 - 20 = 32$ *lts.*

Entonces : $\frac{\text{agua}}{\text{petróleo}} = \frac{124}{32} = \frac{31}{8}$

ó : $\frac{\text{agua}}{\text{mezcla}} = \frac{31}{39}$

Entonces al retirar 39*lts*. de mezcla, retiramos : $\frac{31}{39} \cdot 39 = 31$*lts*. de agua y el resto de petróleo (8)

$\therefore$ Quedan : $124 - 31 = 93$ *lts* de agua.

Y : $32 - 8 = 24$ *lts* de petróleo

Diferencia : $93 - 24 =$ **69** RPTA. C

22.- Se tiene vino puro de 6 soles el litro. Se le agrega agua, resultando 42 litros de mezcla, los cuales se vendieron a 210 soles. ¿Cuántos litros de agua se agregaron?

A) 5 *B) 7* *C) 3* *D) 6* *E) N.A.*

Resolución:

Sean x los litros de vino; $42 - x$ los de agua.

Cada litro de vino cuesta S/. 6 y cada litro de agua S/.0 (cero)

$$\therefore \quad 6x + (42 - x) \cdot 0 = 210$$

$$x = 35$$

Los litros de agua son : $42 - 35 =$ **7** RPTA. B

23.- Si 20 litros de agua contiene 15% de sal, ¿Cuánto de agua se debe evaporar para que la nueva solución contenga 20% de sal?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución:

Si se evaporan x litros de agua la cantidad de sal no varía :

En el 1^er^ caso : cantidad de sal = 15% (20)

En el 2^do^ caso : cantidad de sal = 20% (20 - x)

Igualando y resolviendo : $15\,(20) = 20\,(20 - x)$

$$x = 5$$

RPTA. E

24.- A 80 litros de alcohol de 60º se le agrega 40 litros de agua. ¿Cuántos litros con alcohol de 100º se debe agregar a esta mezcla para obtener la concentración inicial?

A) 40 *B) 20* *C) 50* *D) 60* *E) 30*

Resolución:

Tenemos 80 *litros* de alcohol de 60°

Agregamos 40 *litros* de agua (0°)

Agregamos x litros de alcohol puro (100°)

Si la mezcla debe tener la misma concentración inicial (60°) :

$$\frac{80 \cdot 60 + 40 \cdot 0 + x \cdot 100}{80 + 40 + x} = 60$$

$$4800 + 100x = 4800 + 2400 + 60x$$

$$x = 60$$ RPTA. D

25.- La cantidad de onzas de agua que debe añadirse a 9 onzas de una mezcla de alcohol y agua al 50%, para que resulte una concentración al 30% de alcohol es :

A) 8 *B) 6* *C) 9* *D) 7* *E) 5*

<u>Resolución</u>:

Anotamos los datos en la tabla :

	Cantidad	Concentración
1^{ra}	9	50%
2^{da}	$9 + x$	30%

La cantidad de alcohol no varía : $(0{,}50)\ (9) = (0{,}30)\ (9 + x)$

$$x = 6$$ RPTA. B

26.- De la mesa de un laboratorio se toma un recipiente que contiene 40 litros de alcohol al 10% y se vierte todo el contenido en un segundo recipiente que contenía 10 litros de alcohol al 20%. Si luego se agregó 38 litros de alcohol puro, ¿Qué tanto por ciento de la mezcla final no es alcohol puro?

A) 50% *B) 60%* *C) 70%* *D) 80%* *E) 90%*

<u>Resolución</u>:

Inicialmente : 40 *litros* al 10% $\Rightarrow$ alcohol puro = 4 *litros*

Luego : 10 *litros* al 20% $\Rightarrow$ alcohol puro = 2 *litros*

Finalmente : 38 *litros* de alcohol puro.

De los 40 + 10 + 38 = 88 *litros* ; 4 + 2 + 38 = 44 *litros* son de alcohol puro.

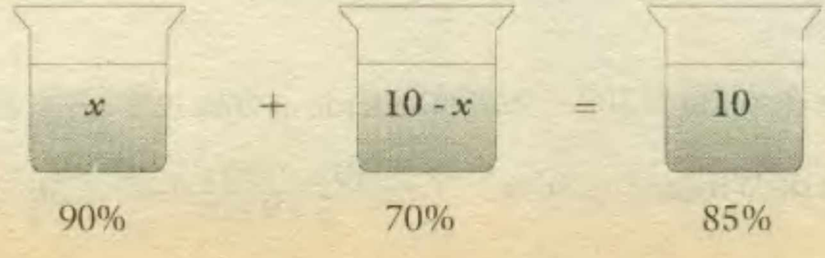
$\therefore$ 88 - 44 = 44 no es alcohol puro.

En porcentaje : $\frac{44}{88} \cdot 100 = 50\%$ RPTA. A

27.- ¿Cuántos litros de alcohol al 90% habrá que mezclar con alcohol al 70% para obtener 10 litros de alcohol al 85%?

A) 6 *B) 8* *C) 6,5* *D) 7* *E) 7,5*

<u>Resolución</u>:



$0.90x + 0.70\,(10 - x) = 0{,}85\,(10)$

$0{,}2\,x = 1{,}5 \;\Rightarrow\; x = 7{,}5$ RPTA. E

28.- De una mezcla de tres clases de maíz, 20 kg de maíz de S/. 14,25 el kg con maíz de S/. 14,5 el kg, y 50 kg de maíz de S/. 14,0 el kg. Se sabe que se ganó 7% vendiendo el kg de la mezcla a S/. 15,194. ¿Cuántos kg de maíz hay en la mezcla?

A) 150 *B) 200* *C) 100* *D) 300* *E) 250*

Resolución:

$$\frac{20(14{,}25) + x.(14{,}5) + 50(14{,}0)}{20 + x + 50} \cdot (1{,}07) = 15{,}194$$

En la ecuación planteada, x es la cantidad de maíz de la 2[da] clase y el factor 1,07 representa el 7% de ganancia.

Resolviendo, obtenemos : $x = 30$

En resumen : 20 *kg* de la 1[ra] clase, 30 de la 2[da] y 50 de la 3[ra], hacen en total : **100 *kg***

RPTA. C

29.- ¿Qué cantidad de agua se debe agregar a una mezcla de 400 litros de vino de 6 soles el litro con 1 400 litros de vino de 5 soles el litro para obtener una mezcla de 4 soles el litro?

A) 400 *B) 450* *C) 500* *D) 550* *E) 600*

Resolución:

Tenemos : 400 *litros* de 6 *soles* el litro.

1 400 *litros* de 5 *soles* el litro.

Se agrega : x litros de agua (sin valor)

Si el promedio es 4 soles : $\dfrac{400 \cdot 6 + 1400 \cdot 5 + x \cdot 0}{400 + 1400 + x} = 4$

Resolviendo : $x = 550$ RPTA. D

30.- Si mezclo 3 litros de un ácido al 30% con 9 litros al 70% y al resultado le agrego un diluyente, obtengo una concentración al 50%. ¿Cuántos litros de diluyente empleé?

A) 2 *B) 3* *C) 2,4* *D) 3,1* *E) 4,5*

Resolución:

Se mezclan : 3 *litros* de ácido al 30% ; 9 *litros* de ácido al 70% y "x" litros de diluyente (0%)

Si la concentración de la mezcla es 50% : $\dfrac{3 \cdot 30 + 9 \cdot 70 + x \cdot 0}{3 + 9 + x} = 50$

$\therefore \quad 90 + 630 = 600 + 50x \Rightarrow \boxed{x = 2{,}4}$ RPTA. C

31.- Dos recipientes A y B contienen vino; el recipiente A está lleno en su mitad, el de B en un tercio de su volumen. Se completan las capacidades de A y B con agua, vertiéndose las mezclas en un tercer recipiente C; sabiendo que la capacidad de B es el triple de la de A, determinar el porcentaje de vino que contiene la mezcla en C.

A) 35,7% *B) 37,5%* *C) 35,5%* *D) 37,7%* *E) N.A.*

Resolución:

Capacidad de A : x $\begin{cases} \text{vino} : \dfrac{x}{2} \\ \text{agua} : \dfrac{x}{2} \end{cases}$

Capacidad de B : $3x$ $\begin{cases} \text{vino} : x \\ \text{agua} : 2x \end{cases}$

En C tendremos : $\begin{cases} \text{vino} : \dfrac{x}{2} + x = \dfrac{3x}{2} \\ \text{agua} : \dfrac{x}{2} + 2x = \dfrac{5x}{2} \end{cases}$

$\therefore$ % de vino en C : $\dfrac{\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2} + \frac{5x}{2}} = \dfrac{3}{8} \cdot 100 = \boxed{37{,}5\%}$ RPTA. B

32.- Un depósito contiene 75 litros de alcohol puro del cual se extrae 1/3 de su contenido y se reemplaza por agua, enseguida se extrae 1/5 de la mezcla y también se reemplaza por agua y por último se extrae 1/4 de la nueva mezcla y también se reemplaza por agua. ¿Qué relación de alcohol puro y agua quedan en el depósito?

A) $\frac{1}{3}$ *B)* $\frac{3}{2}$ *C)* $\frac{2}{3}$ *D)* $\frac{3}{1}$ *E)* $\frac{2}{1}$

Resolución:

Se ha extraído consecutivamente : $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{4}$ del alcohol puro.

Entonces la cantidad de alcohol puro que aún queda es :

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$$

Y la cantidad de agua es : $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

La relación es : $\dfrac{2/5}{3/5} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$ RPTA. C

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- ¿Qué cantidad de agua se requiere para diluir 15 *litros* de una solución que es una tintura al 12%, de modo que se obtenga una solución de tinte al 5%?

A) 10 *l* B) 12 *l* C) 21 *l*

D) 20 *l* E) 15 *l*

2.- ¿Cuánta agua debe evaporarse de 15 *litros* de solución de tintura al 12% para obtener una solución al 20%?

A) 6 *l* B) 5 *l* C) 4 *l* D) 3 *l* E) 2 *l*

3.- Una aleación contiene 80% de oro y otra 55% de oro. ¿Cuántos *gramos* de cada una deben combinarse para obtener 40 *gramos* de una aleación que contengan 70% de oro?

A) 20 y 20 B) 24 y 16 C) 25 y 15

D) 30 y 10 E) N.A.

4.- El número de *onzas* de agua que se necesitan para rebajar al 30% el contenido de alcohol de una loción de afeitar de 9 *onzas* que contiene 50% de alcohol es :

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5.- ¿Qué cantidad de carbón con 4% de humedad se debe mezclar con carbón de 8% de humedad para obtener 164 *kg* de carbón con 7% de humedad?

A) 63 B) 23 C) 52 D) 30 E) 41

6.- ¿Cuál debe ser la pureza del alcohol que debe añadirse a 80 *litros* de alcohol de 96% de pureza para obtener un *hectolitro* de alcohol de 90% de pureza?

A) 72% B) 60% C) 80%

D) 66% E) 75%

7.- Se desea reducir la ley de una barra de oro de 0,96 a 0,90. ¿Qué cantidad de cobre debe fundirse con cada *kilogramo* de cada barra?

A) $44\frac{4}{9}\,g$ B) $62{,}5\,g$ C) $40\,g$

D) $66\frac{6}{9}\,g$ E) $60\,g$

8.- Se ha fundido un lingote de plata de 1 200 *gramos* y 0, 850 de ley con otro de 2 000 *gramos* de 0,920 de ley. ¿Cuál es la ley de la aleación obtenida?

A) 0,980 B) 0,893 C) 0,775

D) 0,820 E) 0,920

9.- Se han mezclado 100 *decímetros cúbicos* de cemento con 0,3 *metros cúbicos* de arena. ¿Qué cantidad de arena debe añadirse para que el cemento sea $\frac{1}{6}$ de la mezcla?

A) $0{,}02\,m^3$ B) $0{,}2\,m^3$ C) $0{,}03\,m^3$

D) $0{,}3\,m^3$ E) $0{,}25\,m^3$

10.- ¿Qué cantidad de cobre debe añadirse a una barra de plata que pesa 635 *gramos* y tiene 0,920 de ley para que resulte una aleación de 0,835 de ley?

A) 68,25 *g* B) 46,64 *g* C) 35,36 *g*

D) 65,24 *g* E) 64,64 *g*

11.- Un químico tiene dos soluciones de ácido al 80% y 30% respectivamente. ¿Qué cantidad de cada una se necesita para formar 200 *litros* de una solución de ácido al 62%?

A) 150 - 50 B) 120 - 80 C) 124 - 76

D) 128 - 72 E) 112 - 88

12.- Una solución de 280 *ml* de sal al 20%, se agrega agua y se obtiene una solución de sal al 14%. ¿Qué cantidad de agua se agregó?

A) 90*ml* B) 120*ml* C) 80*ml*

D) 160*ml* E) 100*ml*

13.- Si se mezclan 45 *kg* de arroz de 5,80 *soles* el *kilo*, con 60 *kg* de arroz de 7,20 *soles* el *kilo* y con 80 *kg* de a 8 *soles*. ¿A cómo resultará el *kg* de arroz mezclado?

A) 7,5 B) 7,4 C) 7,0 D) 7,2 E) 5,8

14.- Una moneda de oro pesa 40 *gramos* y está acuñada con una ley de 900 milésimas. ¿Cuántos *gramos* de oro puro contiene?

A) 30*g* B) 45*g* C) 40*g* D) 30*g* E) 36*g*

15.- Sobre 20 *litros* de agua a 25° se ha vertido 40 *litros* de agua a 75°. ¿A qué temperatura resulta el agua de la mezcla?

A) 60° B) 56° C) 56,7° D) 54,5° E) 58,3°

NIVEL B

16.- Un perfume que se ha de vender a 80 dólares la *onza* va a ser obtenido de un perfume que se vende a 104 dólares la *onza* y de otro que se vende a 50 dólares la *onza*. Si se desean 270 *onzas* de mezcla. ¿Qué cantidad del perfume más caro se debe utilizar?

A) 135 *onzas* B) 90 *onzas* C) 180 *onzas*

D) 120 *onzas* E) 150 *onzas*

17.- Un comerciante tiene vinos de dos precios: de 90 y 75,60 *soles* el *litro*. Los mezcla en la proporción de 5 partes del más barato por siete partes del más caro. Se quiere ganar un 25% en la venta de la mezcla. ¿A cómo debe venderse el *litro*?

A) S/.82,8 B) S/.94 C) S/.104

D) S/.98 E) S/.105

18.- En una mezcla A de concreto por cada *kg* de cemento hay 2 de arena y 3 de piedra; en otra mezcla B por cada *kg* de cemento hay 4 de arena y 5 de piedra. ¿Cuántas *toneladas* de A y de B respectivamente hay que utilizar para obtener 56 *toneladas* de una mezcla que tenga por cada *kg* de cemento 3 de arena y 4 de piedra?

A) 21 y 35 B) 20 y 36 C) 26 y 30

D) 24 y 32 E) N.A.

19.- Se quiere hacer una medalla de oro de 21 *kilates* agregando oro puro a un anillo de 30 *gramos* de oro de 18 *kilates*. ¿Cuántos *gramos* de oro puro debería agregar?

A) 30 *g* B) 24 *g* C) 36 *g*

D) 18 *g* E) 21 *g*

20.- Un depósito contiene 60 *litros* de vino y 20 *litros* de agua; sacamos 20 *litros* de esta mezcla y se reemplaza por agua; se vuelve a sacar 32 *litros* de la nueva mezcla y se reemplaza por agua. ¿Cuántos *litros* de vino quedan en el depósito?

A) 25 B) 27 C) 29 D) 30 E) 32

21.- Una aleación de plomo y estaño pesa 65 *kg*; cuando se sumerge en el agua pesa solo 57,5 *kg*. ¿Cuánto pesa el plomo sabiendo que la densidad del plomo es 11,4 y la del estaño 7,3?

A) 28,5 B) 38,5 C) 36,5 D) 21,5 E) 35,5

22.- Un barril lleno de agua pesa 99 *kg* y lleno de aceite pesa 94 *kg*. Si la densidad de dicho aceite es 0,92. ¿Cuál es el peso del barril vacío?

A) 36,5 *kg* B) 40 *kg* C) 27,5 *kg*

D) 30 *kg* E) 7 *kg*

23.- Se venden 12 *litros* de leche adulterada con un peso de 12,42 *kg* si la densidad de la leche pura es 1,04. ¿Cuánta agua se empleó en la adulteración?

A) 2 *litros* B) 3.5 *litros* C) 3 *litros*

D) 1.5 *litros* E) 2.5 *litros*

24.- Un lingote contiene 5 *kg* de plata pura y 3 *kg* de cobre. ¿Qué cantidad de plata pura es preciso agregar a este lingote para fabricar monedas de plata cuya ley sea 0,900?

A) 22,50 *kg* B) 22,55 *kg* C) 22,00 *kg*

D) 23,00 *kg* E) 23,25 *kg*

25.- Si en 120 *kg* de aceite comestible hay 5 *kg* de aceite puro de pescado y el resto de aceite de soya. ¿Cuánto aceite de soya hay que agregar a estos 120 *kg* para que en cada 5 *kg* de la mezcla haya tan solo 1/8 de *kg* de aceite de pescado?

A) 80 *kg* B) 40 *kg* C) 8 *kg*

D) 4 *kg* E) 25 *kg*

26.- Pedro mezcla 40 *litros* de alcohol de S/.6 el litro, con 60 *litros* de alcohol de S/. 11 el litro. ¿Cuál será el precio promedio de la mezcla?

A) S/. 7 B) S/. 8.5 C) S/. 9

D) S/.9.5 E) N.A.

27.- Se mezclan 20 *litros* de alcohol de S/. 2 con 30 *litros* de otro alcohol, obteniendo una mezcla cuyo costo unitario es S/. 5. ¿Cuál es el costo por litro del segundo tipo de alcohol?

A) S/. 7 B) S/. 7.5 C) S/. 7.8

D) S/.8 E) N.A.

28.- Se mezclan 40 *litros* de alcohol al 50% con 50 *litros* de alcohol al 20% con 10 *litros* de alcohol puro. ¿Cuál es el costo por litro del segundo tipo de alcohol?

A) 40% B) 35% C) 30%

D) 46.6% E) N.A.

29.- Se mezclan 18 *litros* de alcohol al 60% con 17 *litros* de alcohol al 40% con 15 *litros* de agua. ¿Cuál es la concentración de la mezcla?

A) 28% B) 32,6% C) 34,5%

D) 35,2% E) N.A.

30.- ¿Cuántos kilogramos de lentejas de 1,60 *soles* el *kg* y lentejas de 0.90 *soles* el *kg* necesito para obtener una mezcla de 600 *kg* de lentejas de 1,25 *soles* el *kg*?

A) 200 y 400 B) 180 y 420 C) 250 y 350

D) 300 y 300 E) 340 y 260

NIVEL C

31.- De un tonel lleno de vino puro se utiliza la tercera parte, luego se le llena de agua; más tarde se vende la quinta parte y se le vuelve a llenar de agua. Finalmente se vende la mitad. ¿Qué cantidad de vino puro queda aún en el tonel?

A) $\frac{2}{15}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{3}{15}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

32.- Dos clases diferentes de vino se han mezclado en los depósitos A y B. En el depósito A la mezcla está en la proporción de 1 a 3 respectivamente y en el depósito B la proporción de la mezcla es de 1 a 5. ¿Qué cantidad de vino debe extraerse en cada depósito para formar una mezcla que contenga 7 *litros* de vino de la primera clase y 21 *litros* de la otra clase?

A) 12 y 16 B) 13 y 15 C) 10 y 18

D) 15 y 13 E) 18 y 10

33.- Se disuelve 2 *gramos* de cloruro de sodio en 1,25 *litros* de agua, por otra parte de disuelven 3 *gramos* de cloruro de sodio en 1.5 *litros* de agua. ¿Cuántos *gramos* de cloruro de sodio se deben agregar a 1 000 *centímetros cúbicos* de la primera solución para obtener la misma concentración que en la segunda solución?

A) 0,4 B) 0,2 C) 0,6 D) 0,8 E) 1,0

34.- Dos recipientes A y B contienen vino. El recipiente A está lleno en su mitad, el B en un tercio de su volumen. Se completan las capacidades de A y B con agua, vertiéndose las mezclas en un tercer recipiente C. Sabiendo que la capacidad de B es el doble de la de A, determinar el % de vinoque contiene la mezcla en C.

A) 36 B) 54 C) 39 D) 51 E) 64

35.- Un *litro* de mezcla formado de 75% de alcohol y 25% de agua pesa 960 *gramos*. Sabiendo que el litro de agua pesa 1 *kg*. Se pide calcular el peso de un *litro* de la mezcla que contiene 48% de alcohol y 52% de agua.

A) 972,6 *g* B) 980,4 *g* C) 974,2 *g*

D) 974,4 *g* E) 900 *g*

36.- Se tienen dos recipientes de 10 *litros* cada uno. El primero contiene 6 *litros* de vino y el resto de agua, el segundo contiene 8 *litros* de vino y el resto de agua. ¿Cuántos litros deben intercambiarse para que las mezclas resultantes tengan la misma cantidad de agua?

A) 4 *l* B) 5 *l* C) 6 *l* D) 7 *l* E) 8 *l*

37.- Se tiene 3 mezclas alcohólicas, la segundo y la tercera en cantidades iguales y con 60% y 20% de pureza respectivamente. Si el agua y el alcohol de la primera lo echamos en la segunda y en la tercera respectivamente, estas dos últimas resultaría con 50% de pureza. Entonces el porcentaje de pureza de la primera es :

A) 70% B) 75% C) 80%

D) 85% E) 65%

38.- En un recipiente lleno se tiene una mezcla de 20 *litros* de agua con 30 *litros* de vino. Si se extrae 1/3 del contenido y se vuelve a llenar con agua; luego se extrae 1/2 de la nueva mezcla y vuelve a llenar con agua; y finalmente se extrae 1/5 del contenido y se llena con agua. ¿Cuántos litros de vino quedan finalmente en la mezcla resultante, y qué cantidad de vino contiene 1 *litro* de esta mezcla?

A) 7 ; 0,16 B) 8 ; 0,20 C) 8 ; 16

D) 8 ; 0,16 E) 7 ; 0,26

39.- Se ha disuelto sal de cocina en agua pura a 4°C, obteniéndose una disolución que pesa 15 *kg* y contiene el 9% de su peso en sal. Se debe saber, ¿Cuántos litros de agua en las mismas condiciones se debe agregar a la disolución para que 4 *kg* de la nueva disolución contenga 120 *g* de sal?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

40.- Dos depósitos contiene 30 *litros* y 20 *litros* de vino de diferentes calidades, se intercambian *x* litros y entonces los dos depósitos contienen vino de la misma calidad. Hallar "*x*".

A) 12 B) 15 C) 6 D) 2 E) 5

41.- ¿Cuál fue la utilidad en la venta de tres tipos de café : 50 *kilos* de café de S/. 42.0 el *kilo*, 60 *kilos* de café de S/. 43.0 el *kilo* y 20 *kilos* de café de 48,0 el *kilo*, si en total se obtuvo S/. 6 373.2?

A) 10% B) 12% C) 11%

D) 13% E) 15%

42.- Se tienen dos mezclas alcohólicas de 60° y 80° respectivamente, de la primera se toma un cuarto y se mezcla con un quinto de la segunda obteniéndose alcohol de 65°. ¿Cuál será la pureza del alcohol que resulta al mezclar los contenidos restantes?

A) 60° B) 65° C) 66,15°

D) 70,15° E) 75°

CURIOSIDADES NUMERICAS

1.- Productos sin repetir cifras

Los siguientes productos tienen la curiosa particularidad de expresarse con igualdades en las que entran sólo una vez cada una de las nueve primeras cifras significativas; no se pone como problema encontrar estos productos, puesto que no hay principios generales para ello. Se les puede encontrar consultando pacientemente Tablas como la de CRELLE, que presentan los productos de dos factores hasta 999 × 999. Por ejemplo :

483 × 12 = 5 796	157 × 28 = 4 396	159 × 48 = 7 632
297 × 18 = 5 346	186 × 39 = 7 254	1 738 × 4 = 6 952
198 × 27 = 5 346	138 × 42 = 5 796	1 963 × 4 = 7 852

(Pueden ser útiles para comprobar si lucen bien todas las cifras de una calculadora).

2.- Productos que se escriben con una sola cifra

A) Una propiedad muy conocida del número:

12 345 679 , es que al multiplicarlo por 9 da un producto que se escribe con sólo la cifra 1, esto es el número 111 111 111. Por lo tanto, al multiplicarlo por 18 (que es 9 × 2), por 27 (que es 9 × 3), por 36, etc., se obtienen también productos notables, a saber:

12 345 679 × 9 = 111 111 111
12 345 679 × 18 = 222 222 222
12 345 679 × 27 = 333 333 333
. . . . .
. . . . .
12 345 679 × 81 = 999 999 999

B) De no conocer este multiplicando, podríamos haber intentado hallarlo sin más que dividir por 9 el número 1111 .... bajando después de cada resto un uno, en vez de un cero, hasta que la división fuese exacta. Del mismo modo vamos ahora a investigar cuál es el número que multiplicado por 7, da un producto escrito con sólo las cifras 1:

```
11  | 7
 41   15 873
  61
   51
    21
     0
```

Por consiguiente, resultará:

15 873 × 7 = 111 111
15 873 × 14 = 222 222
15 873 × 21 = 333 333
....
....
15 873 × 63 = 999 999

C) Requiere ya más paciencia contestar a esta pregunta: *¿Cuál es el número que, multiplicado por 49 da un producto que se escribe con sólo la cifra 1?*

En efecto, procediendo como antes, se encuentra:

2 267 573 696 145 124 716 553 287 981 859 410 430 839

nada menos.

21 Áreas y Perímetros

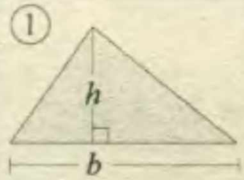
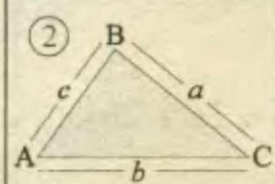
Las figuras geométricas son un motivo permanente en la creación y formulación de acertijos y problemas del Razonamiento Matemático, por lo tanto su estudio debe hacerse detalladamente y dentro de sus amplias posibilidades de cálculo. Las cuestiones sobre *áreas* y *perímetros* plantean el reto mayor, pues en su desarrollo, se requiere la aplicación coordinada de los teoremas y postulados básicos de la Geometría, así como de las fórmulas correspondientes a las áreas y perímetros de cada tipo de figura, que enseguida resumimos.

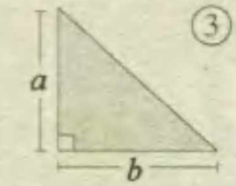
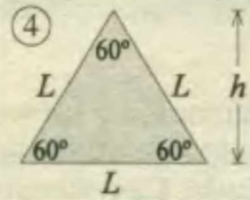
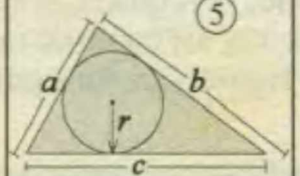
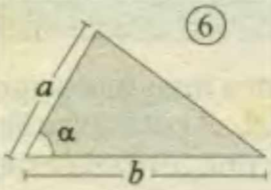
I) PERIMETRO

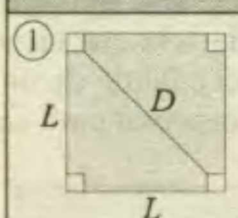
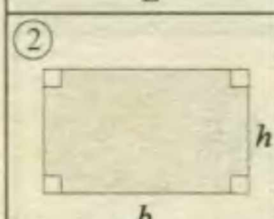
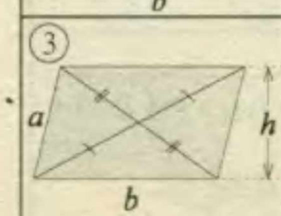
El *perímetro* de una figura indica la longitud total de la línea imaginaria que rodea al interior de la región de interés. Cuando esta región es polígonal, el perímetro se determina sumando las longitudes de todos sus lados. No se requiere una fórmula especial para cada caso, pues el modo de calcularlo es simple y directo.

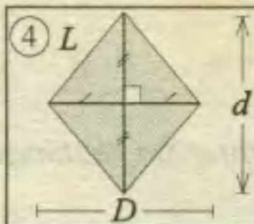
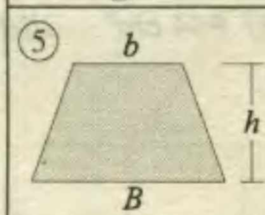
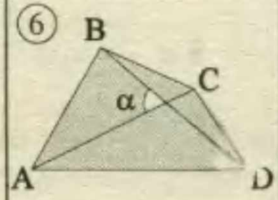
II) AREA

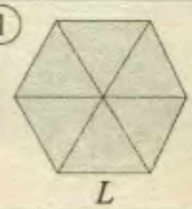
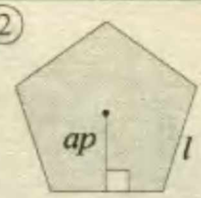
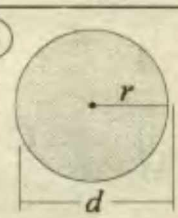
El *área de una región* es la medida de su superficie; es necesario reconocer que a cada región le corresponde un típico modo de calcular esta medida, a la que en adelante *-para abreviar-* simplemente llamaremos *área*. En contraste con el cálculo de un perímetro, para calcular un área, es necesario disponer de una fórmula especial para cada caso.

<table>
<tr><th colspan="3">TRIANGULOS</th></tr>
<tr><td>①

</td><td>En función de la base y su altura.</td><td>$A = \frac{b \cdot h}{2}$</td></tr>
<tr><td>②

</td><td>En función del semiperímetro (p) y sus lados.</td><td>$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
donde : $p = \frac{a+b+c}{2}$</td></tr>
</table>

	Si es un triángulo rectángulo, en función de sus catetos.	$A = \frac{cateto \cdot cateto}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$
	Δ equilátero, en función de su lado L ó altura h.	$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$
	En función de su *semiperímetro* y el *inradio*.	$A = p \cdot r$ $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$
	En función de los lados y el *ángulo* comprendido.	$A = \frac{1}{2}\, ab \text{ sen } \alpha$

CUADRILATEROS		
	Area del cuadrado en función de su lado, o su diagonal.	$A = L^2$ $A = \frac{D^2}{2}$ *Perímetro* = $4L$
	Area del rectángulo en función de sus dos dimensiones.	$A = b \cdot h$ *Perímetro* = $2b + 2h$
	Paralelogramo: sus diagonales se bisecan entre sí.	$A = b \cdot h$ *Perímetro* = $2a + 2b$

④ 	Rombo: sus diagonales se bisecan en ángulo recto.	$A = \dfrac{D \cdot d}{2}$ *Perímetro* $= 4L$
⑤ 	Trapecio: sus bases son paralelas.	$A = \left(\dfrac{B+b}{2}\right) \cdot h$
⑥ 	Area de un cuadrilátero cualquiera en función de sus diagonales y del ángulo que forman.	$A = \dfrac{AC \cdot BD}{2}$ sen α

POLIGONOS Y CIRCUNFERENCIA		
① 	Exágono regular: se divide en seis Δs equiláteros.	$A = 6\ \Delta$s equiláteros $A = 6 \cdot \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3L^2\sqrt{3}}{2}$
② 	Polígono regular cualquiera en función de su perímetro y apotema.	n : # de *lados* *perímetro* $= n \cdot l$ *Area* $= \dfrac{perím \cdot ap}{2}$
③ 	Longitud de la circunferencia (C) y área del círculo (A).	$C = 2\pi r = \pi d$ $A = \pi r^2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$

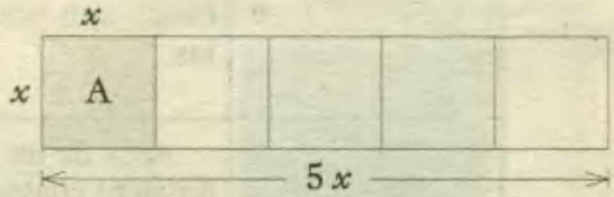
PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Cinco cuadrados iguales se colocan lado a lado hasta formar un rectángulo cuyo perímetro es 372 cm. Hallar el área de cada cuadrado.

A) 324 cm^2 B) 72 cm^2 C) 961 cm^2 D) 900 cm^2 E) 984 cm^2 UNMSM - 96

Resolución:

Designemos con x al *lado* de cada cuadrado, así de acuerdo a la figura y al dato sobre su perímetro, planteamos la siguiente ecuación:



$$2(5x) + 2(x) = 372$$

$$12x = 372 \Rightarrow x = 31\ cm$$

Ahora podemos hallar el *área* de uno de los cuadrados:

$$A = x^2 = 31^2$$

$$A = 961\ cm^2$$ RPTA. C

2.- El perímetro de un triángulo isósceles es 16 m, siendo AB = BC. Calcular el área del triángulo ABC, si BM = 4 m.

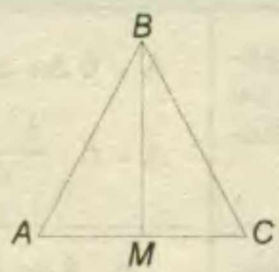
A) 15 m^2

B) 10 m^2

C) 14 m^2

D) 16 m^2

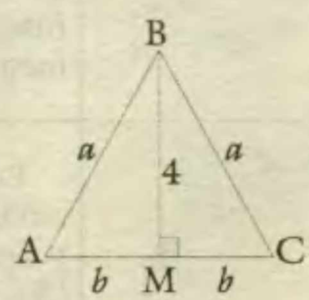
E) 12 m^2



UNMSM - 97

Resolución:

Como se trata de un triángulo isósceles, hacemos: AB = BC = a. Además, por el mismo motivo, M es punto medio de AC y BM es la altura del triángulo ABC relativa al lado AC.



AM = MC = b

Si el perímetro es 16 : $2a + 2b = 16$, ó , $a + b = 8$ ... (1)

Por el Teorema de Pitágoras en el ◺ BMC: $a^2 - b^2 = 4^2$, ó , $(a+b)(a-b) = 16$ ... (*)

De (1) en (*) : $8(a - b) = 16 \Rightarrow a - b = 2$ ... (2)

De (1) y (2) obtenemos fácilmente : $a = 5$; $b = 3$

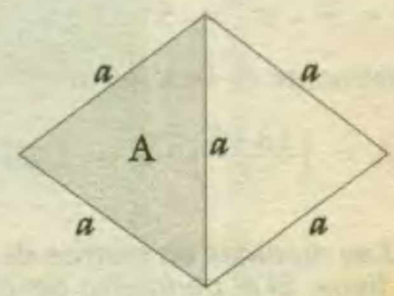
Y para hallar el área aplicamos : $A = \frac{AC \cdot BM}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2}$

$\therefore$ $A = 12$ RPTA. E

3.- Un rombo tiene una diagonal igual a uno de sus lados que mide "a". El área del rombo es:

A) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$ *B)* $a^2\sqrt{3}$ *C)* $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ *D)* $2a^2$ *E)* $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ ***PUCP 97 - I***

Resolución:



Si una diagonal del rombo mide lo mismo que uno de sus lados, el rombo está formado por dos triángulos equiláteros, tal como lo indica la figura adjunta. Sea A, el área de uno de los Δs equiláteros, luego:

$$\Rightarrow \quad A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Así el *área* del rombo es: $2A = \frac{2 \cdot a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ RPTA. E

4.- En el cuadrado PQRS ; hallar la relación t/u.

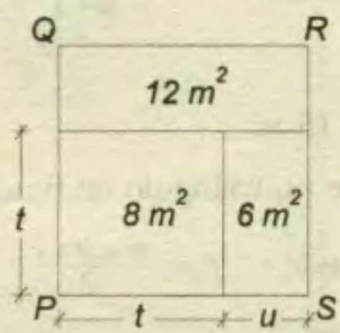
A) 3/2

B) 5/3

C) 3/4

D) 4/3

E) 3/5



UNFV - 96

Resolución:

Expresemos las *áreas* de los rectángulos en función de los lados "t" y "u", cuyas medidas son 8 m^2 y 6 m^2 :

$$t \cdot t = 8 \quad ... (1)$$
$$t \cdot u = 6 \quad ... (2)$$

Dividiendo miembro a miembro : $\frac{t \cdot t}{t \cdot u} = \frac{8}{6}$

Y simplificando "t" : $\therefore$ $\frac{t}{u} = \frac{4}{3}$ RPTA. D

5.- Los lados de un trapecio isósceles miden 5; 5; 5 y 13 respectivamente. ¿Cuál es el área del trapecio?

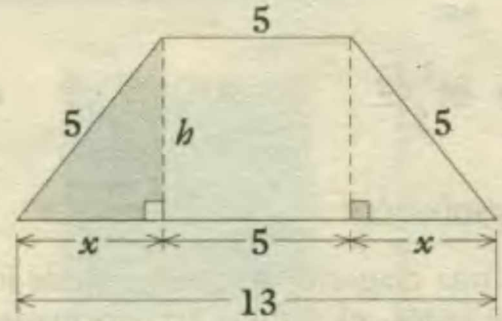
A) *26 m^2* ***B)*** *15 m^2* ***C)*** *27 m^2* ***D)*** *39 m^2* ***E)*** *65 m^2*

<u>Resolución</u>:

Tratándose de un trapecio isósceles, éste tendrá iguales dos de sus *lados* no paralelos, es decir, cada uno mide 5 y las bases del trapecio serán las dos medidas restantes : 5 y 13.

Luego, de trazar las alturas descubrimos que :

$2x + 5 = 13 \Rightarrow x = 4$



A continuación aplicamos Pitágoras en el triángulo sombreado:

$h^2 = 5^2 - x^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow h = 3$

Finalmente el área del trapecio es :

$$A = \left(\frac{13+5}{2}\right) \cdot 3 = \boxed{27\ m^2}$$

RPTA. C

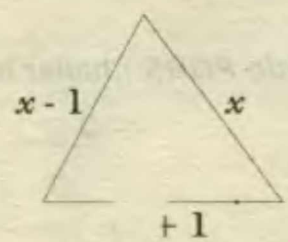
6.- Las medidas en metros de los lados de un triángulo son tres números enteros consecutivos. Si el perímetro del triángulo mide 42 m, hallar su área en metros cuadrados.

A) *84* ***B)*** *42* ***C)*** *48* ***D)*** *76* ***E)*** *98*

<u>Resolución</u>.-

Como el perímetro mide 42 *m*, planteamos :

$(x - 1) + x + (x + 1) = 42$



De donde : $x = 14\ m$

Luego, los lados miden : 13 *m*, 14 *m* y 15 *m*.

Sólo queda aplicar la fórmula del área de un triángulo en función de sus lados:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad ; \quad \text{donde : } p = \frac{a+b+c}{2}$$

En nuestro caso: $p = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$

$$A = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$$

$$A = \sqrt{21(8)(7)(6)} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{7^2 \cdot 3^2 \cdot 16}$$

$$A = 7 \cdot 3 \cdot 4 = \boxed{84\ m^2}$$

RPTA. A

7.- La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 10 m y su hipotenusa 8 m. ¿Cuál es el valor de su área?

A) *18 m^2* ***B)*** *9 m^2* ***C)*** *12 m^2* ***D)*** *16 m^2* ***E)*** *20 m^2*

Resolución:

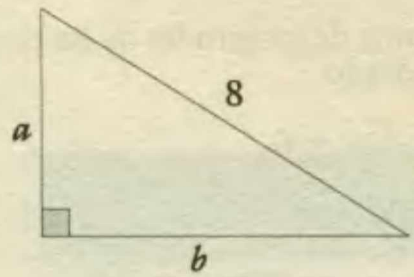
De los datos, se sabe que :

$a + b = 10$ ... (1)

$a^2 + b^2 = 64$ ... (2)

Como se trata de hallar el área :

$A = \frac{a \cdot b}{2}$ ... (3)



Buscaremos relacionar (1) y (2) para hallar *ab*, que es lo que necesitamos en (3).

Para esto, recordamos del Algebra elemental la siguiente identidad:

$$\underbrace{(a+b)^2}_{10} = \underbrace{a^2 + b^2}_{64} + 2ab$$

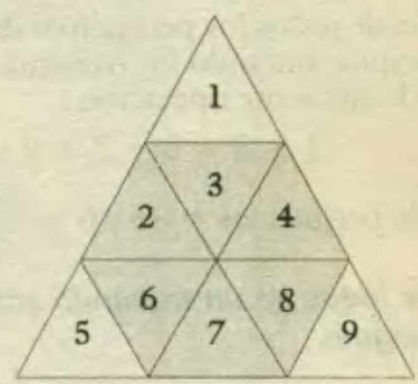
De aquí : $100 = 64 + 2ab \Rightarrow ab = 18$ ...(*)

Sustituyendo (*) en (3) : $A = \frac{18}{2} =$ **$9\ m^2$** RPTA. B

8.- Si el área de un triángulo equilátero es 27 m^2, hallar el área del exágono regular inscrito en el triángulo.

A) 24 m^2 *B) 15 m^2* *C) 21 m^2* *D) 16 m^2* *E) 18 m^2*

Resolución:

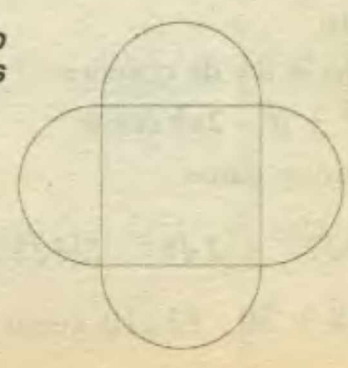


En la figura adjunta mostramos cómo el exágono queda *inscrito* en el triángulo.

Las nueve (9) partes en que ha quedado dividido el triángulo son iguales y equivalen a 27 m^2, por tanto, cada parte es igual a 3 m^2, y ya que el exágono contiene 6 de estas partes, su área vendrá dada así :

$A_{\hexagon} = 6 \cdot 3 =$ **$18\ m^2$** RPTA. E

9.- La siguiente figura está compuesta de un cuadrado cuya área es 36 m^2 y cuatro semicírculos. ¿Cuál es el perímetro de la figura?



A) $\pi + 4$

B) $4\pi + 12$

C) 12π

D) 36π

E) 18π

Resolución:

El perímetro será la suma de longitudes de las cuatro semicircunferencias; cuyo radio es la mitad del lado del cuadrado.

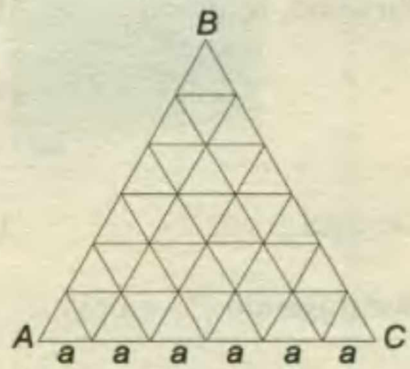
Lado del cuadrado $= \sqrt{36} = 6$

Radio de cada semicírculo $= \frac{6}{2} = 3$

Longitud de una semicircunferencia $= \frac{2\pi r}{2} = \pi r = 3\pi$

Longitud pedida $= 4(3\pi) =$ **12π** RPTA. C

10.- El perímetro del triángulo equilátero ABC es 36 cm. Al desagregar según los cortes mostrados, la suma de los perímetros de los triángulos pequeños es en cm:



A) 36 *D) 108*

B) 547 *E) 216*

C) 72

Resolución:

Cada lado mide : $6a$; luego el perímetro del ΔABC será :

$$18a = 36\,cm \quad \Rightarrow \quad a = 2\,cm.$$

Cada triángulo pequeño tiene un perímetro $= 2 + 2 + 2 = 6\,cm$.

La suma de todos los perímetros depende del # de triángulos pequeños, el cual se obtiene en principio contando los triángulos que hay en cada fila horizontal y a continuación efectuando la siguiente operación :

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

Suma de perímetros $= 36 \cdot 6 =$ **$216\,cm$** RPTA. E

11.- Los lados de un triángulo acutángulo miden $3\sqrt{2}$; $\sqrt{26}$ y $2\sqrt{5}$. Calcular el área del triangulo.

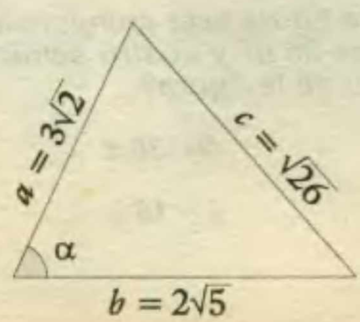
A) $6\sqrt{3}$ *B) 9* *C) $2\sqrt{13}$* *D) 6* *E) N.A* ***UPCH - 96***

Resolución:

Recordando la ley de cosenos :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

Reemplazamos datos:



$$\sqrt{26}^2 = (3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{5})^2 - 2(3\sqrt{2})(2\sqrt{5})\cos\alpha$$

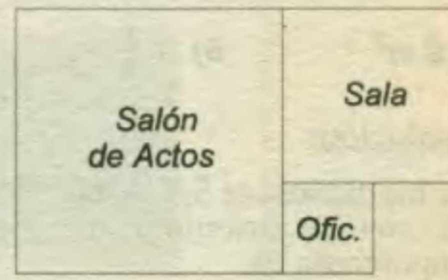
$$26 = 18 + 20 - 12\sqrt{10}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Ahora, aplicamos la fórmula del área en función de dos lados y el seno del ángulo comprendido :

$$A = \frac{1}{2}\,ab\,\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad A = 9 \qquad \text{RPTA. B}$$

12.- El área de la sala es 27 m²; el área de la oficina es 12 m². Si todas las habitaciones son cuadradas. ¿Cuál es el área del salón de actos?



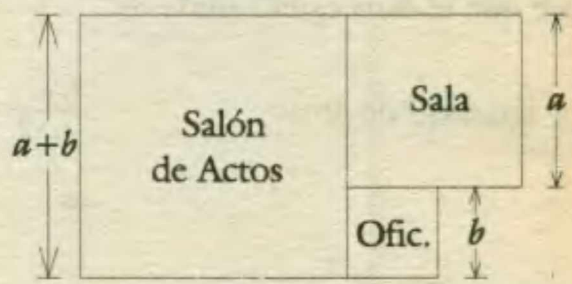
A) 78 m² *D) 45 m²*

B) 75 m² *E) 72 m²*

C) 54 m²

PUCP 96 - I

Resolución:



En base al gráfico adjunto, diremos que el área de la sala es :

$a^2 = 27 \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$

Asimismo el área de la oficina es:

$b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$

Como el salón de actos es un cuadrado de lado: $a + b = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$, tendremos, que su área estará dada así :

$$A = \left(5\sqrt{3}\right)^2 = 25\cdot 3 = 75\ m^2 \qquad \text{RPTA. B}$$

13.- La siguiente figura está compuesta de 6 cuadrados, cada uno de lado x cm. Si el número de centímetros del perímetro de la figura es igual al número de centímetros cuadrados del área, ¿Cuál es el valor de x?

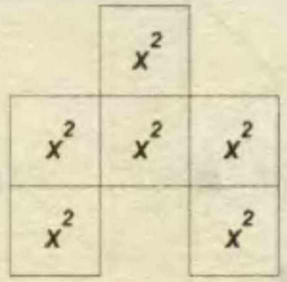
A) 1

B) 5/3

C) 2

D) 5/2

E) 7/3



Resolución:

Es evidente que el área de la figura es : $6x^2$ *centímetros cuadrados* y su correspondiente perímetro resulta ser : $14x$ *centímetros.*

Por condición del problema estos valores son iguales, luego :

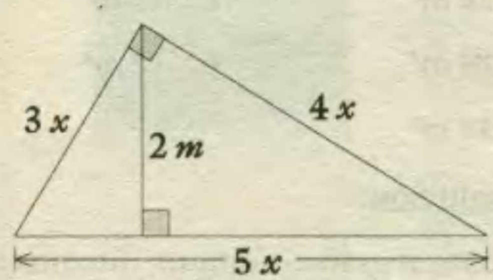
$$6x^2 = 14x$$

$$\therefore \quad x = \frac{7}{3} \qquad \text{RPTA. E}$$

14.- En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa mide 2 m y la hipotenusa es $\frac{5}{4}$ de uno de los catetos. Hallar el área del triángulo.

A) $9\ m^2$ *B) $4\frac{1}{6}\ m^2$* *C) $2\frac{1}{3}\ m^2$* *D) $6\ m^2$* *E) $3\ m^2$*

Resolución:



Si la hipotenusa es 5/4 de uno de los catetos, a este cateto le atribuímos una longitud $4x$ y a la hipotenusa $5x$.

Por tratarse de un triángulo Pitagórico se deduce que el otro cateto mide $3x$.

Por igualdad de áreas : $\dfrac{5x\ .\ 2}{2} = \dfrac{3x\ .\ 4x}{2}$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{6}$$

Luego el área del triángulo será : $A = \dfrac{5x\ .\ 2}{2} = 5.\dfrac{5}{6}$

$$\Rightarrow \quad A = 4\frac{1}{6} \qquad \text{RPTA. B}$$

15.- En la figura, si el perímetro del cuadrado ABCD es $16\sqrt{2}$ unidades, el área del cuadrado MNRS es :

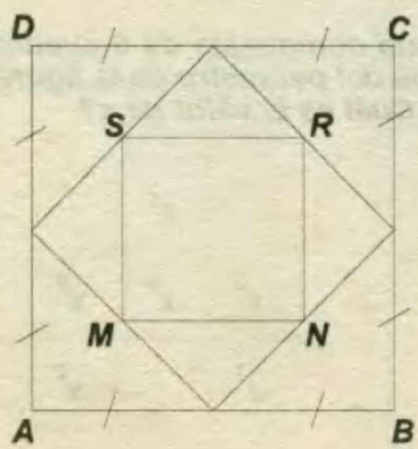
A) $32\ u^2$

B) $16\ u^2$

C) $8\ u^2$

D) $6\sqrt{2}\ u^2$

E) N.A.



UNFV - 87

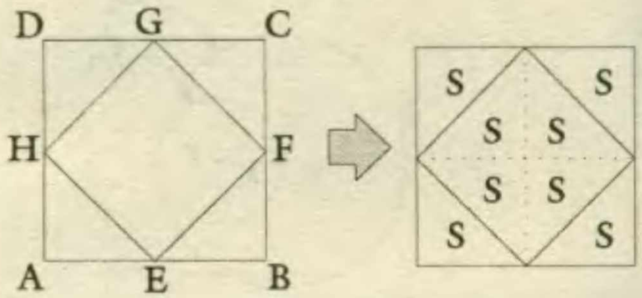
Resolución:

Sea a el lado del cuadrado original, entonces por condición del problema:

$$4a = 16\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad a = 4\sqrt{2}\ ,$$

Entonces el área del cuadrado original es : $a^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$.

Ahora haremos una sencilla demostración de la siguiente propiedad: *"Al unir los puntos medios de los lados de un cuadrado, se obtiene otro cuadrado cuya área es la mitad del primer cuadrado."*

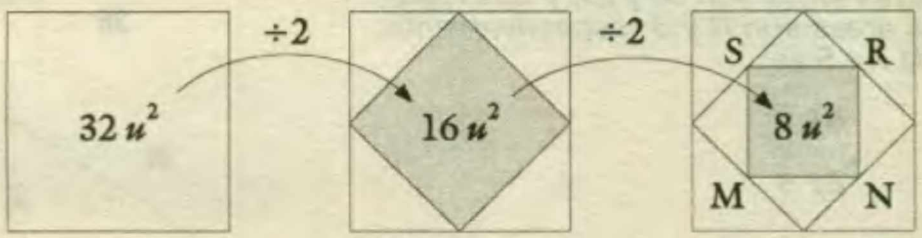


□ EFGH = 4 S

□ ABCD = 8 S

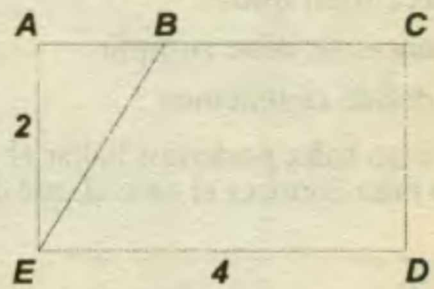
$$\therefore \quad \frac{\text{Area EFGH}}{\text{Area ABCD}} = \frac{4S}{8S} = \frac{1}{2}$$

Ahora, en el problema aplicamos esta propiedad dos veces, porque cada cuadrado se obtiene uniendo los puntos medios del cuadrado anterior; así :



$\therefore$ Area del cuadrado MNRS = **$8\,u^2$** RPTA. C

16.- ¿Cuánto debe medir $\overline{AB}$ para que el área del triángulo BAE sea la mitad del área del trapecio BCDE?



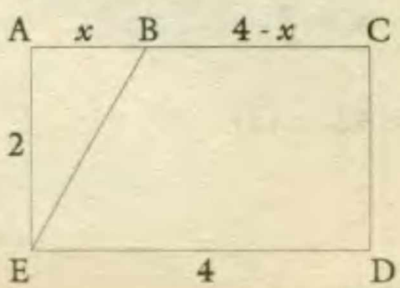
A) 4 *D) 3*

B) 8/3 *E) 8/5*

C) 7/3 ***PUCP 92 - II***

Resolución:

Hagamos AB = x ; BC = 4 - x, de este modo nuestro problema será determinar el valor de x. Veamos:



$$\text{Area } (\Delta BAE) = \frac{2 \cdot x}{2} = x$$

$$\text{Area } (\triangle BCDE) = \left(\frac{4 + 4 - x}{2}\right) \cdot 2 = 8 - x$$

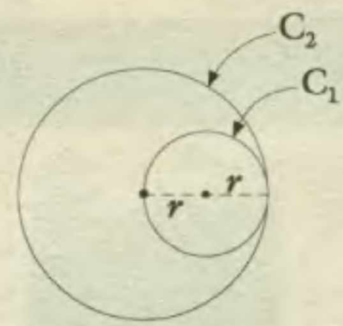
Por condición del problema :

$$x = \frac{1}{2}(8 - x) \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$ RPTA. B

17.- Un círculo C_1 es tangente interiormente a otro círculo C_2 y además pasa por el centro de éste. Si el área del círculo C_1 es 4 m^2, entonces el área del círculo C_2 en cm^2 es :

A) 8 *B) $8\sqrt{2}$* *C) $8\sqrt{\pi}$* *D) 16* *E) $16\sqrt{2}$*

<u>Resolución</u>:

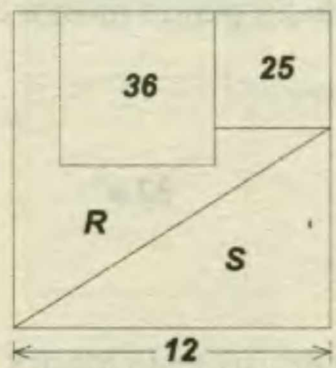


De acuerdo a los datos, se obtiene la figura mostrada, en la cual se distingue que el radio del círculo C_2 es el doble del radio del círculo C_1.

Area $C_1 = \pi r^2 = 4$

Area $C_2 = \pi (2r)^2 = 4\underbrace{\pi r^2} = 4 \cdot 4 =$ **16** RPTA. D

18.- El cuadrado de lado 12 está dividido en cuadrados cuyas áreas son 36 y 25; y dos regiones cuyas áreas son R y S respectivamente. El valor de R - S es:



A) 1 *D) 4*

B) 2 *E) 5*

C) 3

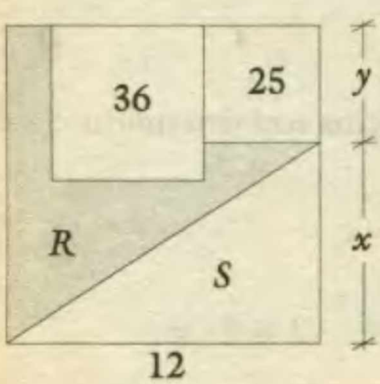
<u>Resolución</u>:

El área total mide : $12^2 = 144$

Entonces se debe cumplir : $36 + 25 + R + S = 144$

De donde obtenemos : $R + S = 83$ ...(1)

Por otro lado, podemos hallar el área *S*del triángulo , puesto que uno de sus catetos es 12 y sólo falta conocer el otro al que designaremos con *x*.



En la figura, el lado *y* del cuadrado cuya área es 25, se obtiene así:

$y^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad y = 5.$

Luego : $x + 5 = 12 \Rightarrow x = 7$

Y así : área $S = \dfrac{12 \cdot 7}{2} = 42$ ...(2)

De (2) en (1) : $R + 42 = 83 \Rightarrow R = 41$

La diferencia solicitada es : $R - S = 42 - 41 =$ **1** RPTA. A

19.- Un terreno rectangular tiene el doble de largo que de ancho y está completamente rodeado por x metros de cerca. La superficie del terreno en términos de x es:

A) $\frac{1}{x}$ B) $2x^2$ C) $\frac{2x^2}{9}$ D) $\frac{x^2}{18}$ E) $\frac{x^2}{72}$

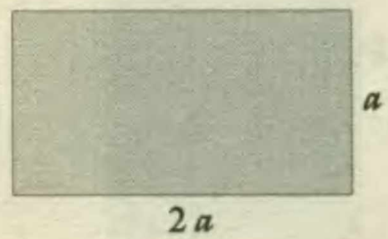
Resolución:

Sean a y $2a$ las medidas de los lados del terreno.

Como el perímetro mide x, tendremos:

$$2(2a + a) = x$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{x}{6}$$



A continuación el área será :

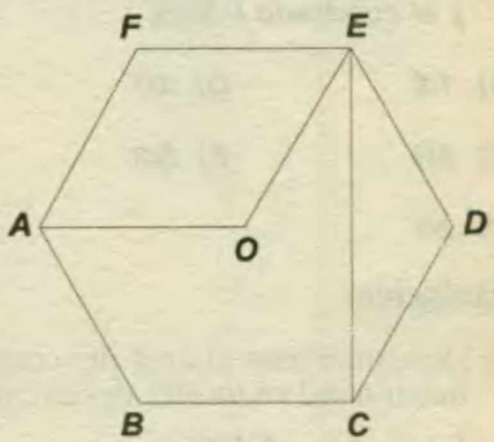
$$\text{Area del terreno} = 2a \cdot a$$

$$= 2\,\frac{x}{6} \cdot \frac{x}{6}$$

$$= \frac{x^2}{18}$$

RPTA. D

20.- En la figura se presenta un exágono regular de lado "a", entonces el área del polígono ABCEOA es :



A) $\frac{\sqrt{3}\,a^2}{2}$ D) $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$

B) $\frac{4a^2}{3\sqrt{3}}$ E) $\frac{3\sqrt{3}\,a^2}{4}$

C) $\sqrt{3}\,a^2$

Resolución:

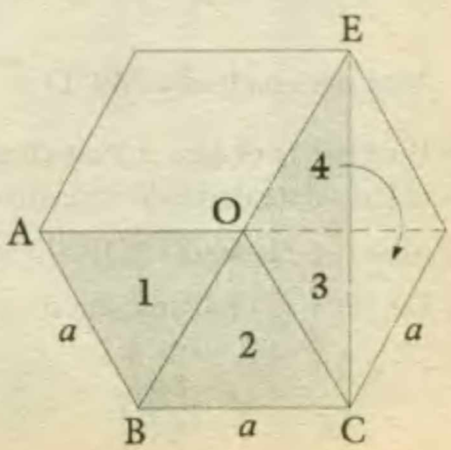
Luego de efectuar los trazos auxiliares que se indican, y trasladando la región 4, se obtienen 3 triángulos equiláteros de lado "a".

Area del polígono ABCEOA

= Area de 3 Δs equiláteros

$$= \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

RPTA. E



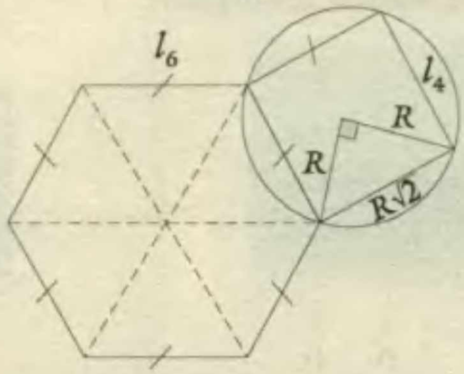
21.- Calcular el área de un exágono regular cuyo lado es igual al lado de un cuadrado inscrito en un círculo de 2m de radio.

A) $18\sqrt{3}$ *B)* $16\sqrt{2}$ *C)* $20\sqrt{3}$ *D)* $18\sqrt{2}$ *E)* $12\sqrt{3}$

Resolución:

Debemos recordar que el lado del cuadrado inscrito en un círculo de radio R es igual a $R\sqrt{2}$, siendo $R = 2$, tal como se aprecia en la figura. De este modo deducimos que:

Lado del □ : $l_4 = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$



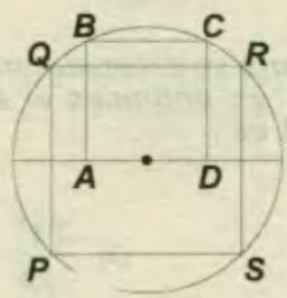
Por condición del problema :

Lado del exágono : $l_6 = l_4 = 2\sqrt{2}$

Area del exágono : $A_6 = \dfrac{3(2\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{2}$

$A_6 = \boxed{12\sqrt{3}}$ RPTA. E

22.- Hallar la relación entre las áreas del cuadrado ABCD y el cuadrado PQRS.



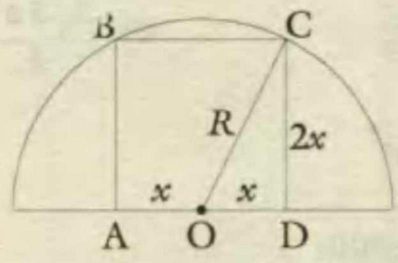
A) 1/8 *D) 3/7*

B) 3/8 *E) 8/3*

C) 2/5

Resolución:

1°) Determinemos el área del cuadrado ABCD en función del *radio* (R) del círculo.



En el ◺ ODC :

$x^2 + (2x)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{R^2}{5}$

Area del cuadrado ABCD = $(2x)^2 = 4x^2 = \dfrac{4R^2}{5}$ ... (1)

2°) Para hallar el área del cuadrado PQRS en función del radio R, debemos recordar que el lado del cuadrado inscrito en un círculo de radio R , es $R\sqrt{2}$, entonces :

Area del cuadrado PQRS = $(R\sqrt{2})^2 = 2R^2$ ... (2)

3°) De (1) y (2) hallamos la relación entre las áreas:

$\dfrac{4R^2/5}{2R^2} = \dfrac{4R^2}{10R^2} = \boxed{\dfrac{2}{5}}$ RPTA. C

23.- Se tiene un pentágono ABCDE tal que :

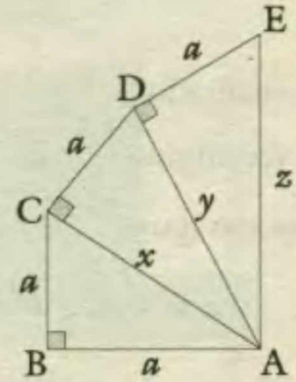
$$AB = BC = CD = DE = a$$

$$m\measuredangle ABC = m\measuredangle ACD = m\measuredangle ADE = 90^{\circ}$$

Calcular el perímetro del pentágono ABCDE.

A) $5a$ ***B)*** $6a$ ***C)*** $4a + a\sqrt{3}$ ***D)*** $4a + a\sqrt{6}$ ***E)*** $a\sqrt{3} + 5a$

Resolución:



La figura mostrada se ha elaborado cumpliendo con todas las condiciones del problema. A partir de ella y progresivamente hallaremos las medidas de los lados : AC, AD y AE.

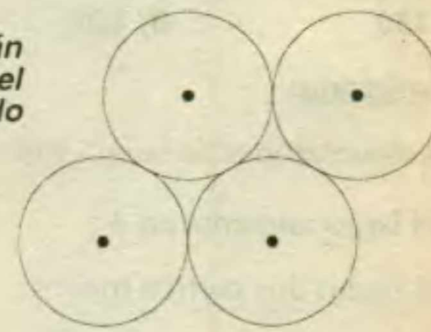
$x^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow x^2 = 2a^2$

$y^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow y^2 = 3a^2$

$z^2 = a^2 + y^2 = 4a^2 \Rightarrow z = 2a$

$\therefore$ perímetro del pentágono $= a + a + a + a + 2a =$ **$6a$** **RPTA. B**

24.- Cuatro círculos, tienen cada uno 9π de área y están colocados tal como se muestra en la figura. Hallar el perímetro de la figura convexa obtenida conectando los cuatro centros.

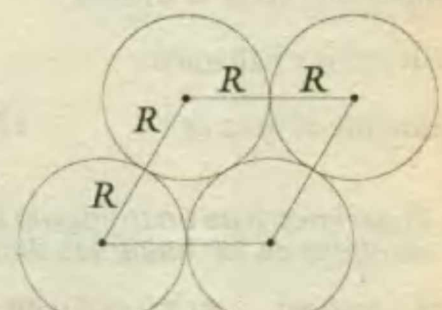


A) 30 ***D) 20***

B) 24 ***E) 18***

C) 36

Resolución:



La figura convexa que se obtiene al unir los centros es un paralelogramo, cuyos lados son iguales y miden: $2R$.

Perímetro $= 4\,(2R) = 8R$ ...(*)

Por condición : $\pi R^2 = 9\pi \Rightarrow R = 3$

Finalmente en (*) : perímetro $= 8 \cdot 3 =$ **24**

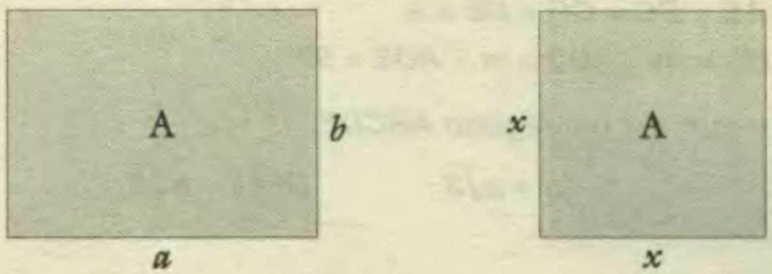
RPTA. B

25.- Los perímetros de un cuadrado y un rectángulo de áreas iguales miden 8 m y 10 m respectivamente. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

A) 3 m ; 2m ***B) 6 m ; 4 m*** ***C) 4 m ; 1 m***

D) 2,5 m ; 2,5 m ***E) N.A.***

Resolución:



Perímetro del cuadrado : $4x = 8 \Rightarrow x = 2$

Perímetro del rectángulo : $2(a + b) = 10 \Rightarrow a + b = 5$ ... (1)

Como las áreas son iguales : $ab = x^2 \Rightarrow a \cdot b = 4$ ... (2)

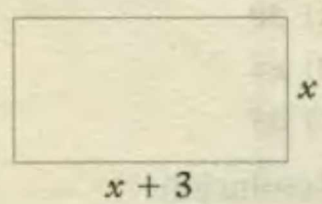
De (1) y (2) : $a = 4\,m$; $b = 1\,m$ RPTA. C

26.- Una sala tiene 3 metros de largo que de ancho. Si el largo fuese 3 metros más de lo que es y el ancho fuese dos metros menos; la superficie del piso sería la misma. Hallar el área de dicha superficie.

A) 150 B) 160 C) 170 D) 180 E) 190

Resolución:

Las dimensiones de la sala son : $x + 3$ y x , tal como se indica en la figura.



Si el largo aumenta en 3 : $x + 3 + 3$

Y el ancho dos metros menos : $x - 2$

La superficie sería la misma : $x(x + 3) = (x + 6)(x - 2)$

Resolvemos y hallamos : $x = 12$

Finalmente el área es : $12(12 + 3) = 180$ RPTA. D

27.- El perímetro de un triángulo isósceles es 200 metros. Si uno de los lados iguales es un múltiplo de 25; hallar las dimensiones del triángulo.

A) 75 ; 75 y 50 B) 71 ; 74 y 60 C) 70 ; 75 y 55 D) 65 ; 70 y 60 E)70 ; 85 y 40

Resolución:

1) La suma de los tres lados debe ser 200.

2) Los múltiplos de 25 son : 25 ; 50 ; 75 ; 100 ; ...... entonces tenemos las siguientes opciones para los lados del Δ.

a) $25 + 25 + 150 = 200$

b) 50 + 50 + 100 = 200

c) 75 + 75 + 50 = 200

d) 100 + 100 + 0 = 200

Las opciones a. y b. se descartan, ya que el lado mayor no excede a la suma de los otros dos. También se descarta d. Sólo queda c y así los lados son : 75 ; 75 y 50.

RPTA. A

28.- Un cuadrado y un Δ equilátero tienen perímetros iguales. El área del triángulo es $9\sqrt{3}$ metros cuadrados. ¿Cuánto medirá la diagonal del cuadrado?

A) $5,3\sqrt{2}$ B) $4,3\sqrt{2}$ C) $4,5\sqrt{2}$ D) $5,3\sqrt{4}$ E) $4,5\sqrt{3}$

<u>Resolución:</u>

El área de un triángulo equilátero está dada por $A = \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}$, luego :

$$\frac{L^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad L = 6$$

Este triángulo tiene perímetro 3L = 18 , que es igual al del cuadrado ,cuyo lado será :

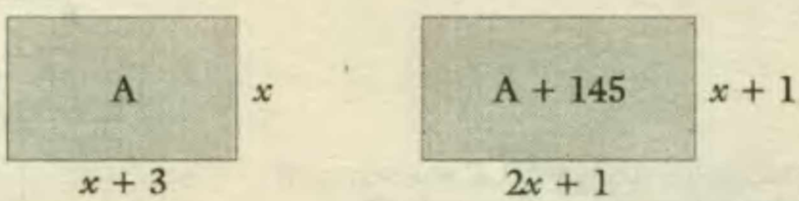
$$18 \div 4 = 4{,}5$$

Luego la diagonal del cuadrado es : $l\sqrt{2} = \mathbf{4{,}5\sqrt{2}}$ **RPTA. C**

29.- Un rectángulo tiene una dimensión doble que la otra; si cada dimensión aumenta un metro, el área aumenta 145 m². Hallar el área del rectángulo original.

A) 5 600 m² B) 4 600 m² C) 4 800 m² D) 3 700 m² E) 4 608 m²

<u>Resolución:</u>



$A = 2x \cdot x$ $\qquad$ $A + 145 = (2x + 1)(x + 1)$

Resolviendo : $2x^2 + 145 = 2x^2 + 3x + 1$

$$x = 48$$

$A = 2x \cdot x = 96 \cdot 48 = \mathbf{4\,608\ m^2}$ **RPTA. E**

30.- Con los datos de la figura, determine el área del trapecio :

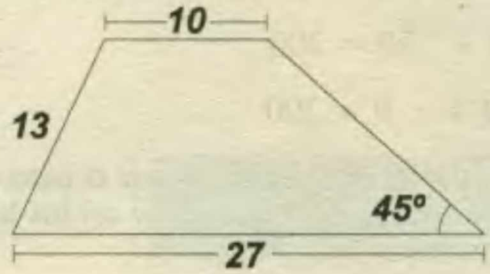
A) 220 m^2

B) 221 m^2

C) 222 m^2

D) 223 m^2

E) 224 m^2



Resolución:

Trazamos dos alturas y aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo de la izquierda :

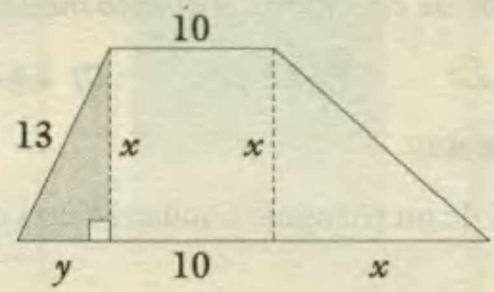
Como : $y + 10 + x = 27$

$y = 17 - x$

Luego : $(17 - x)^2 + x^2 = 13^2$

De donde : $x = 5$,ó, 12

Hay dos soluciones :



$$A_1 = \frac{27+10}{2} \cdot 5 = 92{,}5\ m^2$$

$$A_2 = \frac{27+10}{2} \cdot 12 = 222\ m^2$$

RPTA. C

31.- Hallar el área del cuadrado ABCD, si el área del triángulo AMP es 50m².

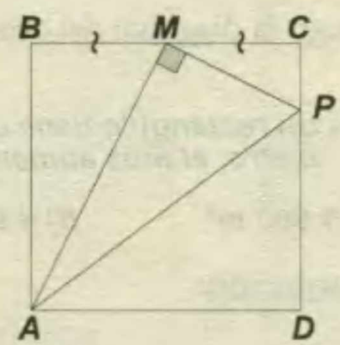
A) 150

B) 160

C) 170

D) 180

E) 190



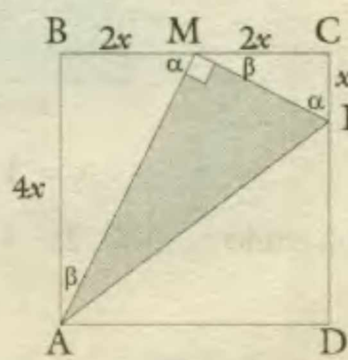
Resolución:

Los triángulos rectángulos ABM y MCP son semejantes, luego sus catetos están en la misma relación.

De la figura : $AM = 2x\sqrt{5}$

$MP = x\sqrt{5}$

Por dato : $\dfrac{2x\sqrt{5} \cdot x\sqrt{5}}{2} = 50$



$$\Rightarrow\ x = \sqrt{10}\ \Rightarrow\ A_{(ABCD)} = \left(4\sqrt{10}\right)^2 = 160$$

RPTA. B

32.- En la siguiente figura, calcular el perímetro de la región sombreada, si AB = 24 cm.

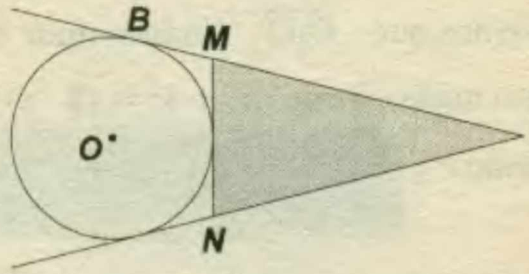
A) 48

B) 45

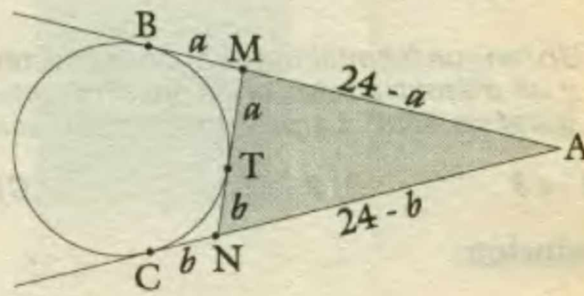
C) 50

D) 45

E) 40



Resolución:



Por propiedad de tangentes:

BM = MT ; TN = NC

Igualmente : AB = AC = 24

P (Δ ABC) = 24 - a + a + b + 24 - b

= 24 + 24

= **48** RPTA. A

33.- ABCH y GDEF son dos cuadrados congruentes BC = 4 y GC = 7cm; hallar el perímetro de la región sombreada.

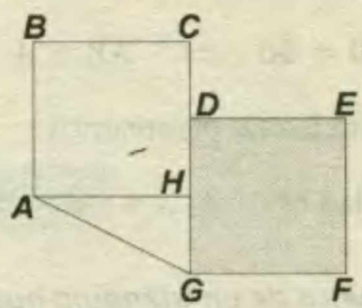
A) 21

B) 30

C) 25

D) 23

E) 28



Resolución:

En el ⊿ AHG, tenemos que AH = 4 ; HG = CG - CH = 3 ; luego : AG = $\sqrt{4^2+3^2}$ = 5

Perímetro = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA

= 4 + 4 + (7 - 4) + 4 + 4 + 4 + 5

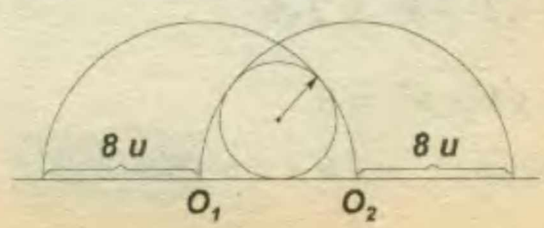
= **28** RPTA. E

34.- Calcular la longitud de la circunferencia mostrada, si O_1 y O_2 son centros de otras circunferencias.

A) 2π *D) 6π*

B) 5π *E) 8π*

C) 7π



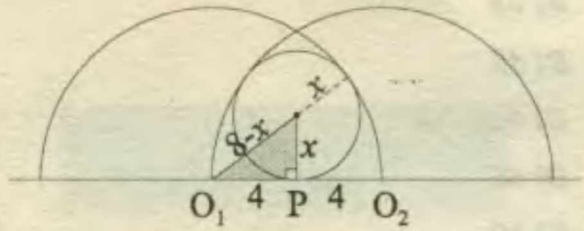
Resolución:

Reconocemos que : $\overline{O_1O_2}$ también mide 8.

P es punto medio, luego : $x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$

Resolviendo : $x^2 + 16 = 64 - 16x + x^2$

$\Rightarrow \; x = 3$

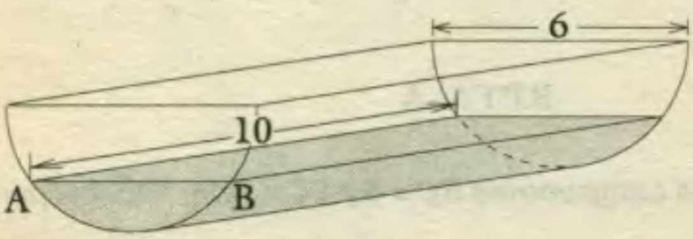


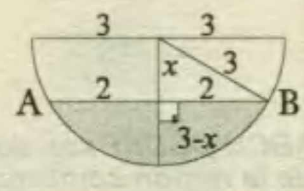
Longitud de la circunferencia : $2\pi x =$ **6π** RPTA. D

35.- Un tanque (semicilíndrico) de aceite, tendido horizontalmente tiene una longitud de 10m y un diámetro interior de 6m. El aceite que contiene determina una superficie rectangular de 40m². La profundidad del aceite es :

A) $2 - \sqrt{3}$ *B) $3 - \sqrt{3}$* *C) $3 - \sqrt{5}$* *D) $7 - \sqrt{5}$* *E) N.A.*

Resolución:





Por datos : AB . 10 = 40 $\Rightarrow$ AB = 4

Con ayuda de la vista lateral planteamos : $x^2 + 2^2 = 3^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{5}$

Luego la profundidad es : $3 - x =$ **$3 - \sqrt{5}$** RPTA. C

36.- Hallar el perímetro de un triángulo cuyos vértices están en : (4 ; 5) , (6 ; 1) , (2 ; 4)

A) $3 + 5\sqrt{5}$ *B) $5 + 3\sqrt{5}$* *C) $6 + 3\sqrt{5}$* *D) $3 + 7\sqrt{5}$* *E) N.A.*

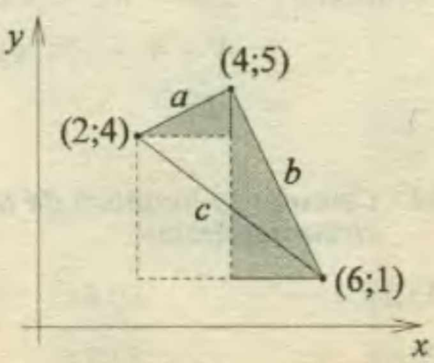
Resolución:

Luego de señalar los puntos en un sistema de coordenadas, aplicamos Pitágoras :

$a = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$b = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

$c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

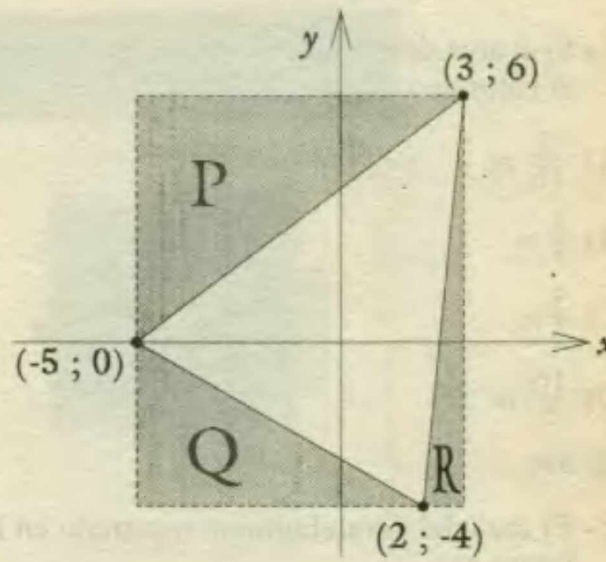


Perímetro : $a + b + c =$ **$5 + 3\sqrt{5}$** RPTA. B

37.- Juanito posee un terreno de forma triangular determinado por los puntos (-5 : 0), (2 ; -4) y (3 ; 6) en el cual deberá sembrar pasto para alimentar a su ganado. Hallar el área total que deberá trabajar.

A) 35 *B) 40* *C) 43* *D) 37* *E) 45*

Resolución:



El área del terreno se podrá hallar si al área del rectángulo se le quitan las áreas de los tres triángulos sombreados :

A (rectángulo) = 8 . 10 = 80

A (Δ P) = 6 . 8 ÷ 2 = 24

A (Δ Q) = 7 . 4 ÷ 2 = 14

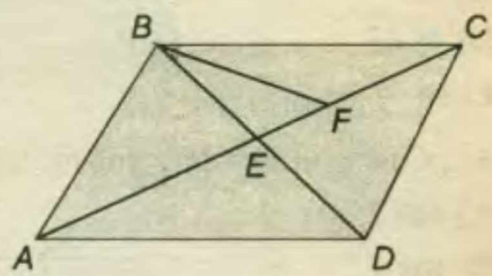
A (Δ R) = 1 . 10 ÷ 2 = 5

∴ A (terreno) = 80 - (24 + 14 + 5)

= 80 - 43 = **37**

RPTA. D

38.- En la figura, el área del triángulo BFC es 10 m², $EF = \frac{FC}{2}$. Hallar el área del paralelogramo ABCD.

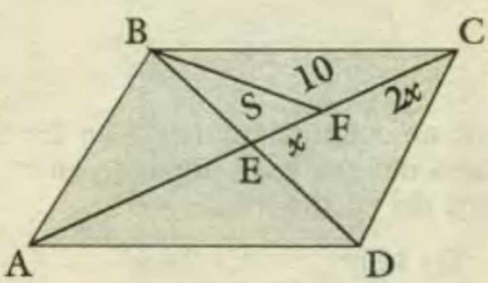


A) 60 m² *B) 120 m²* *C) 80 m²*

D) 90 m² *E) 40 m²*

Resolución:

En la figura se verifica la siguiente proporción :



$$\frac{S}{x} = \frac{10}{2x}$$

de donde : $S = 5\ m^2$

El área del Δ BEC = 10 + 5 = 15 m^2.

Esta área es la cuarta parte de la del paralelogramo, entonces:

Area del paralelogramo = 4 (15) = **60 m^2**

RPTA. A

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Si el área del rectángulo mostrado es 1 m^2, el valor de x es:

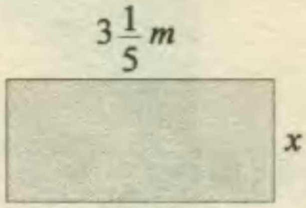
A) $\frac{5}{16}\ m$

B) $\frac{3}{5}\ m$

C) $\frac{5}{3}\ m$

D) $\frac{16}{5}\ m$

E) $5m$



2.- El área del paralelogramo mostrado en la figura es:

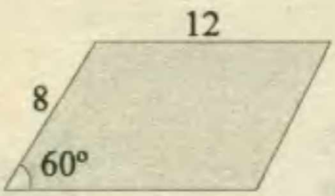
A) 40

B) $24\sqrt{3}$

C) 72

D) $48\sqrt{3}$

E) 96



3.- ¿Cuál es el área del siguiente trapecio?

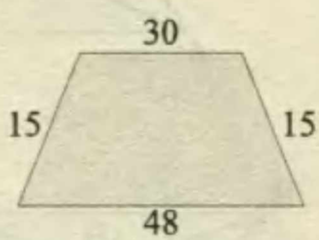
A) 468

B) 108

C) 585

D) 234

E) N.A.

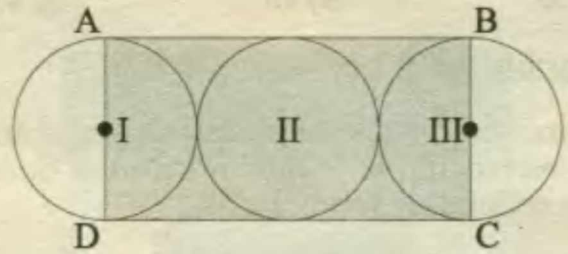


4.- Si el lado de un cuadrado aumenta en 2 *metros*, el área del cuadrado aumenta en 20 m^2. El área del cuadrado es:

A) $20m^2$ B) $12m^2$ C) $24m^2$

D) $36m^2$ E) $16m^2$

5.- Los lados AD y BC del rectángulo ABCD pasan a través de los centros de los círculos I y III. Si la circunferencia de cada círculo mide 7π. ¿Cuál es el área del rectángulo ABCD?



A) $24\frac{1}{2}$ B) 35 C) 49 D) 63 E) 98

6.- Hallar el área de la estrella, si el área del triángulo equilátero ABC es 36 m^2.

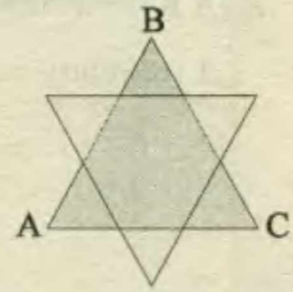
A) 24 m^2

B) 32 m^2

C) 36 m^2

D) 48 m^2

E) 40 m^2



7.- Un rectángulo tiene un área de 108 m^2. Su largo mide 3 m más que el ancho, luego sus dimensiones serán :

A) 27 y 4 m D) 8 y 36 m

B) 18 y 6 m E) 6 y 10 m

C) 12 y 9 m

8.- La relación en que están las áreas de los círculos de menor y mayor tamaño es:

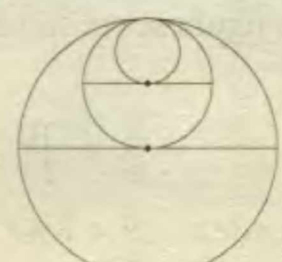
A) 1 : 9

B) 1 : 25

C) 1 : 12

D) 1 : 16

E) 1 : 4



9.- Si la base de un triángulo es dos veces el lado de un cuadrado de igual área, entonces la razón o relación entre la altura del triángulo y el lado del cuadrado es:

A) 4 : 1 B) 1 : 1 C) 1 : 2

D) 2 : 1 E) 1 : 4

10.- ¿Cuál es el *área* de un triángulo equilátero, sabiendo que el radio del círculo inscrito mide 2 m?

A) $6\sqrt{3}\ m^2$ B) $12\sqrt{3}\ m^2$ C) $8\sqrt{3}\ m^2$

D) $9\sqrt{5}\ m^2$ E) $10\sqrt{3}\ m^2$

NIVEL B

11.- En la figura mostrada el triángulo ABC está dividido en cuatro pequeños triángulos. Si el perímetro del triángulo ABC es 12, ¿Cuál es el área del rectángulo DEFG?

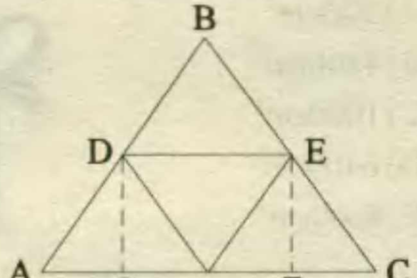
A) 3

B) $2\sqrt{3}$

C) 4

D) $4\sqrt{3}$

E) $6\sqrt{3}$



12.- Si el perímetro de un rectángulo es p y su diagonal es d, entonces la diferencia entre el largo y el ancho del rectángulo es:

A) $\sqrt{8d^2 - p^2}/2$ D) $\sqrt{6d^2 + p^2}/2$

B) $\sqrt{8d^2 + p^2}/2$ E) $\sqrt{8d^2 - p^2}/2$

C) $\sqrt{6d^2 - p^2}/2$

13.- En el diagrama mostrado, las áreas de los cuadrados son 289 ; 225 ; x. Si el área del triángulo es "y", el valor de $x - y$ será:

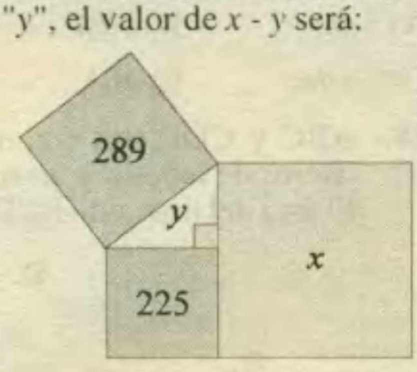
A) 469

B) 496

C) 271

D) 127

E) 217



14.- El área de un rectángulo es 1 230 m^2. Si el largo aumenta en 9 m y el ancho en 20 m, resulta un cuadrado. Calcular el perímetro del rectángulo original.

A) 140 m B) 142 m C) 150 m

D) 152 m E) 160 m

15.- La base de un triángulo isósceles mide $32\sqrt{3}$ y su altura 80 m. Hallar el área del triángulo equilátero inscrito que tiene un vértice en el punto medio de dicha base.

A) 600 B) 300 C) $300\sqrt{3}$

D) $120\sqrt{3}$ E) N.A

16.- En la figura ABCD es un cuadrado de lado 1. Además E, Q y P son los puntos medios de $\overline{AQ}$, $\overline{DC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. ¿Cuál es el área del triángulo APE?

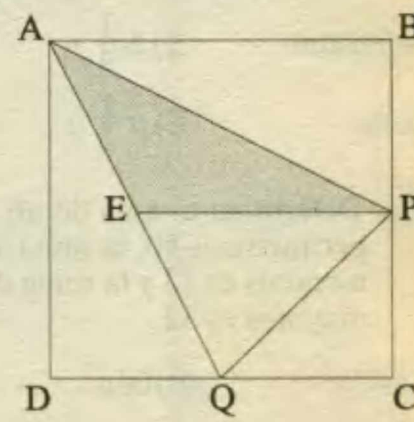
A) $\frac{1}{4}l^2$

B) $\frac{1}{8}l^2$

C) $\frac{3}{14}l^2$

D) $\frac{5}{16}l^2$

E) $\frac{3}{16}l^2$



17.- Si el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles es $2p$, su área es:

A) $(2 + \sqrt{2})\,p^2$ D) $(1 + 2\sqrt{2})\,p^2$

B) $(2 - \sqrt{2})\,p^2$ E) $(3 + 2\sqrt{2})\,p^2$

C) $(3 - 2\sqrt{2})\,p^2$

18.- En la figura, todos los ángulos son rectos, y las longitudes de sus lados están indicadas. ¿Cuál es el área de la figura?

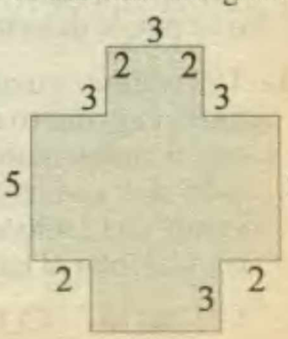
A) 64

B) 66

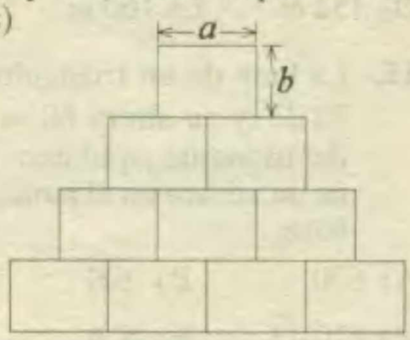
C) 70

D) 75

E) 82



19.- ¿Cuál es el perímetro de esta figura en función de a y b? (Todas las piezas son rectángulos)



A) $6a+8b$

B) $8a+6b$

C) $8a+8b$

D) $6a+10b$

E) $6a+6b$

20.- Se dibuja un triángulo equilátero de lado a. Si se unen los puntos medios de los lados se forma otro triángulo equilátero. Al efectuar la misma operación indefinidamente, el límite de la suma de los perímetros de todos los triángulos dibujados es:

A) infinito B) $5\frac{1}{4}a$ C) $2a$

D) $6a$ E) $4\frac{1}{2}a$

21.- Determine el área de un triángulo cuyo perímetro es 40, la suma de sus dos lados menores es 23 y la suma de sus dos lados mayores es 32.

A) $48u^2$ B) $60u^2$ C) $30u^2$

D) $72u^2$ E) $80u^2$

22.- Si un cuadrado y un rectángulo tienen el mismo perímetro. ¿Cuál de ellos tiene mayor área?

A) El rectángulo

B) El cuadrado

C) El de mayor base

D) Son iguales

E) No se puede determinar

23.- Un terreno cuadrado se vende en dos lotes, el primero es un rectángulo uno de cuyos lados mide $30m$. y el otro 3/5 del lado del cuadrado, el segundo lote se vende en 12 400*soles* a razón de S/. 2,50 el m^2. Calcular el lado del cuadrado.

A) 20 B) 16 C) 18 D) 24 E) 25

24.- Se divide un terreno rectangular en parcelas, lográndose 108 parcelas cuadradas de $121m^2$ cada uno y en cada esquina de las parcelas se coloca un poste. Como se necesitan 130 postes, encontrar la diferencia entre el largo y el ancho del terreno rectangular.

A) 11 B) 12 C) 33 D) 44 E) 55

25.- En la figura se muestra un paquete cúbico que ha sido envuelto con una cinta de $175cm$. de longitud. Si en el nudo se han utilizando $15cm$. de dicha cinta, ¿Cuál es el volumen del paquete?

A) $900cm^3$

B) $4800cm^3$

C) $1000cm^3$

D) $6400cm^3$

E) $8000cm^3$



NIVEL C

26.- Un triángulo equilátero y un exágono regular tienen el mismo perímetro. Si la suma de sus áreas es 100 *metros cuadrados*. ¿Cuál es su diferencia?

A) $20m^2$ B) $40m^2$ C) $30m^2$

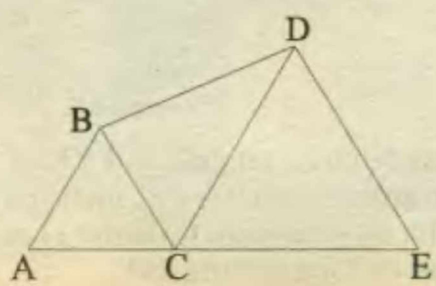
D) $10m^2$ E) Otro valor

27.- Un cuadro de 8 *dm* por 12 *dm*, se coloca en un marco de ancho uniforme. Hallar dicha anchura sabiendo que el área del cuadro es igual a la del marco.

A) 3 *dm* B) 2 *dm* C) 1,5 *dm*

D) 2,5 *dm* E) N.A.

28.- ABC y CDE son dos triángulos equiláteros de lados a y $2a$ respectivamente. El área del triángulo BCD es:



A) $2a^2\sqrt{3}$ D) $a^2\sqrt{3}/4$

B) $a^2\sqrt{3}/2$ E) $3a^2\sqrt{3}$

C) $a^2\sqrt{3}$

29.- La altura AH divide a la base BC de un triángulo en dos segmentos BH = 9 y HC = 3,5. ¿A qué distancia BX = x, medida sobre la base BC se debe trazar una perpendicular que divida el área del triángulo en dos partes iguales?

A) 6,0 m B) 8,0 m C) 6,4 m

D) 7,5 m E) 4,5 m

30.- La base de un triángulo es 80 y uno de los ángulos de la base mide 60°. La suma de las longitudes de los otros dos lados es 90. El lado más corto es:

A) 45 B) 40 C) 36 D) 17 E) 12

31.- Calcular el perímetro de la región sombreada. Si ABCD es un cuadrado de lado $l = 2\sqrt{2}$



A) 20,25

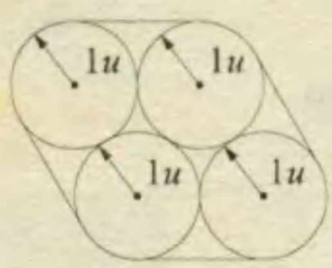
B) 15,16

C) 17,14

D) 14,40

E) 16,20

32.- Calcular la longitud total de la cuerda que envuelve a los 4 cilindros idénticos, cada uno de radio $1u$.



A) $4\pi + 6$

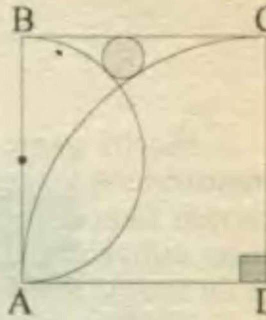
B) $6\pi + 4$

C) $2\pi + 8$

D) $3\pi + 8$

E) $2\pi + 2$

33.- Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide $(2\sqrt{2} + 3)$ m ; hallar el área del círculo sombreado.



A) π D) 4π

B) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

C) $\frac{\pi}{2}$

34.- Hallar el perímetro de la región sombreada si el radio de la circunferencia es R.



A) $2R(\pi + 1)$

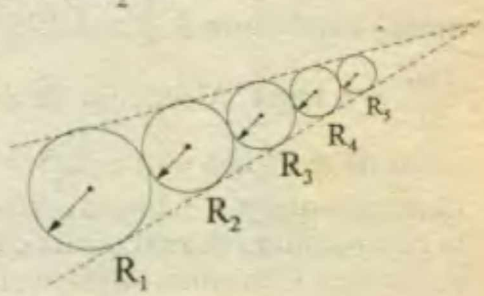
B) $4R(\pi + 2)$

C) $1R(\pi + 2)$

D) $3R(\pi + 2)$

E) $5R(\pi + 2)$

35.- Hallar la suma de las áreas de los círculos, si : $R_1 = 8$; $R_2 = 2$



A) $\frac{1024}{15}\pi$

B) 8π

C) 3π

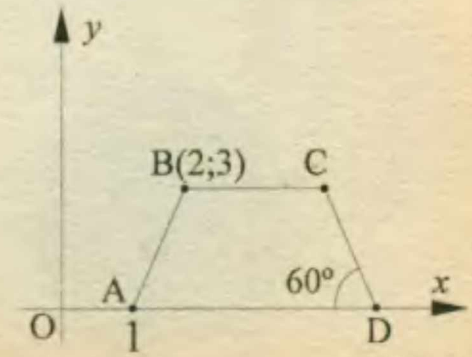
D) 5π

E) N.A.

36.- Calcular el área de un polígono cuyos vértices son : (2 ; 6), (4 ; 5), (0 ; 0), (3 ; 1)

A) $9u^2$ B) $12u^2$ C) $10u^2$ D) $16u^2$ E) N.A.

37.- ABCD es un trapecio de área igual a : $\frac{3(7+\sqrt{3})}{2} m^2$; hallar la abscisa del vértice "C".



A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

EL CIRCULO

Mucha gente ha estado interesada en el círculo y sus propiedades desde los tiempos prehistóricos, y han tratado de expresar a la circunferencia y el área en términos del radio. Uno de los más famosos problemas griegos antiguos era el de "*la cuadratura del círculo*", esto es, el trazo, utilizando sólo una regla sin graduar y compás, de un cuadrado cuya área fuera igual a la de un círculo dado. Los matemáticos lucharon con este problema por más de 2000 años, y fue hasta 1882 en el que un matemático alemán, F. Lindemann, *demostró que era imposible* "cuadrar al círculo" haciendo uso de esas únicas herramientas. En la actualidad puede resolverse este problema recurriendo a nuevos instrumentos de dibujo y sobre todo usando los diagramadores en computadoras, en los que el lado del cuadrado deberá ser $l = r\sqrt{\pi}$.

Los babilonios, como los antiguos egipcios, sabían que la circunferencia de un círculo es un número constante de veces su diámetro. Los griegos emplearon la letra π (pi) para designar esa constante; lo anterior se expresa como :

$$C = \pi d = 2\pi r$$

donde C es la longitud de la circunferencia, d es la longitud del diámetro y r es la longitud del radio.

Aproximadamente en 2000 A.C. los babilonios le daban a π el valor de 3 ; y posteriormente emplearon $3\frac{1}{8} = 3{,}125$. De acuerdo con el papiro de Rhind, los egipcios utilizaban $\frac{256}{81} \approx 3{,}1604$. Alrededor de 240 A.C., el matemático griego Arquímedes demostró que el valor de π estaba entre $\frac{223}{71} \approx 3{,}1408$ y $\frac{22}{7} \approx 3{,}1429$. La demostración de Arquímedes mostraba que π = 3,14 era correcto con dos cifras decimales. En épocas recientes, con el uso de la computadora digital, se ha calculado el valor de π con varios centenares de miles de cifras decimales. Con cinco cifras decimales correctas tendríamos:

$$\pi = 3.14159$$

Mediante la inscripción sucesiva de polígonos con más y más lados en un círculo dado, se observa que la diferencia entre los perímetros de los polígonos y la circunferencia del círculo decrece muy rápidamente. Utilizando esta idea, los matemáticos han demostrado que el área de la región encerrada por un círculo está dada por la fórmula:

$$A = \pi r^2$$



22 Areas de Regiones Sombreadas

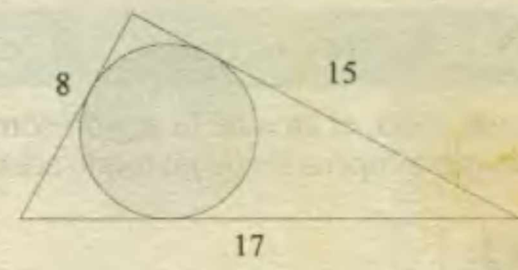
En el cálculo de estas áreas, es necesario considerar las fórmulas para las principales figuras, cuyo resumen hemos presentado en el capítulo anterior, pero este conocimiento solo es la base; luego hay que practicar hasta dominar los diversos tipos de problemas que se suelen proponer. Para este fin haremos una clasificación con sus correspondientes ejemplos y sugerencias.

I) PRIMER CASO .- CALCULO DIRECTO

En este caso, la región sombreada corresponde a una figura cuya fórmula se conoce y solo es necesario aplicarla para conocer su área, aunque es pertinente advertir que el desarrollo puede exigir el conocimiento de las fórmulas adecuadas y esto implicará un buen dominio de las técnicas que se estudian en Geometría.

Ejemplo 1:

Calcular el área de la región sombreada que se indica en la figura.



Resolución:

Primero notamos que la región sombreada corresponde a un círculo de *radio* r desconocido, el mismo que se puede determinar con los datos de la figura.

$$\text{Area del circulo} = \pi r^2 \qquad ...\ (1)$$

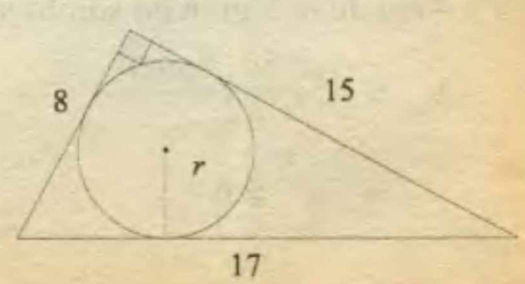
La medida del *radio* podrá determinarse a partir de los lados del triángulo si logramos establecer de qué clase de triángulo se trata.

Al verificar que: $8^2 + 15^2 = 17^2$, deducimos que el triángulo es rectángulo y por este motivo, es posible hallar el *radio* por aplicación del Teorema de Poncelet, que se cumple en este tipo de triángulo:

$$radio = \frac{suma\ de\ catetos - hipotenusa}{2}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{8+15-17}{2}$$

$$\therefore \quad r = \frac{6}{2} = 3 \qquad ...\ (2)$$



Finalmente, de (2) en (1):

Area de la región sombreada = $\pi \cdot 3^2 =$ **9π**

Otro método:

También se puede hallar el área del círculo sin necesidad de conocer de qué clase de triángulo se trata, para esto necesitamos dos fórmulas:

$$A_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad ; \quad A_{\triangle} = p \,.\, r$$

donde : $p = \dfrac{a+b+c}{2} = 20$

Igualando las expresiones para las áreas, obtenemos :

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \frac{(20-8)(20-15)(20-17)}{20}$$

$$r^2 = \frac{12 \cdot 5 \cdot 3}{20} = 9 \quad \Rightarrow \quad r = 3$$

Entonces el área de la región sombreada se calcula directamente así :

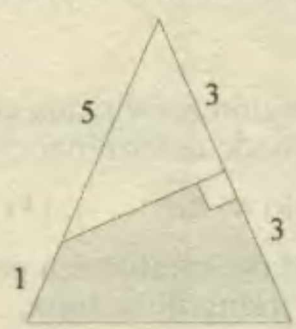
$A = \pi r^2 = \mathbf{9\pi}$ **Rpta .**

II) SEGUNDO CASO .- CALCULO INDIRECTO

En este caso, el área de la región sombreada se determina, por suma o diferencia de otras áreas que al operarlas de un modo adecuado, nos permite obtener el resultado deseado.

Ejemplo 2:

Hallar el área de la región sombreada, limitada por un cuadrilátero, según como se indica en la figura.



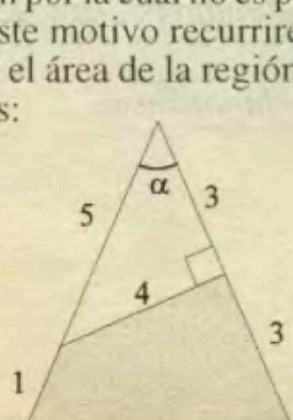
Resolución:

Nótese que el cuadrilátero es irregular, razón por la cual no es posible aplicar una fórmula directa para hallar el área solicitada; por este motivo recurriremos a una *diferencia*: Al área total (región triangular) le sustraemos el área de la región no sombreada (triángulo rectángulo). Los cálculos son los siguientes:

1°) Area de la región no sombreada :

$$A_{NS} = \frac{cateto \,.\, cateto}{2}$$

$$= \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$



2°) Area total .- Utilizamos la fórmula en la que se conocen dos lados y el seno del ángulo comprendido:

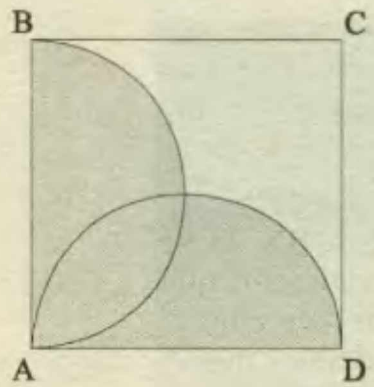
$$A_T = \frac{1}{2}ab \text{ sen } \alpha = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 14{,}4$$

3°) Ahora restamos las áreas encontradas :

A. sombreada = 14,4 - 6,0 = **8,4** **Rpta.**

Ejemplo 3:

Hallar el área de la región sombreada, sabiendo que el lado del cuadrado ABCD, mide 4 *m*.



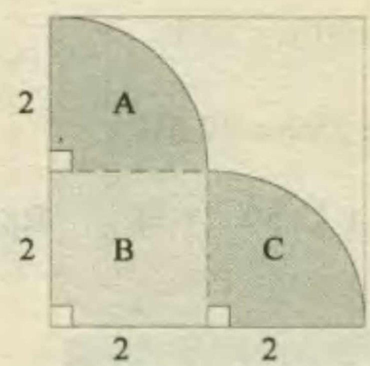
Resolución:

Haciendo algunos trazos auxiliares, logramos descomponer la región dada en tres partes cuyas áreas se pueden calcular fácilmente :

1°) $A = \text{cuadrante} = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi . 2^2}{4} = \pi$

2°) $B = \text{cuadrado} = 2^2 = 4$

3°) $C = A = \pi$



Entonces el área de la región sombreada se obtinene sumando la de las tres partes:

Area buscada = A + B + C

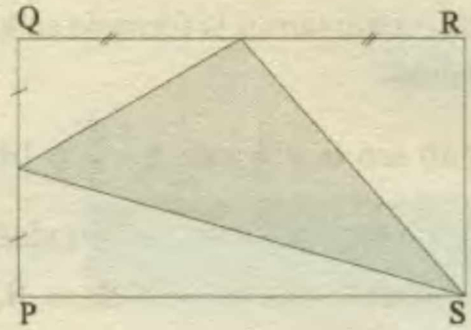
Area buscada = $\pi + 4 + \pi = \mathbf{2\pi + 4}$ **Rpta.**

III) TERCER CASO .- TRASLACION DE REGIONES

En este caso, luego de realizar algunos trazos auxiliares en la figura original del problema, se logra reconocer que algunas regiones sombreadas pueden trasladarse hacia otras no sombreadas pero de áreas equivalentes, de manera que se logra ensamblar una nueva figura cuya área será más fácil de calcular.

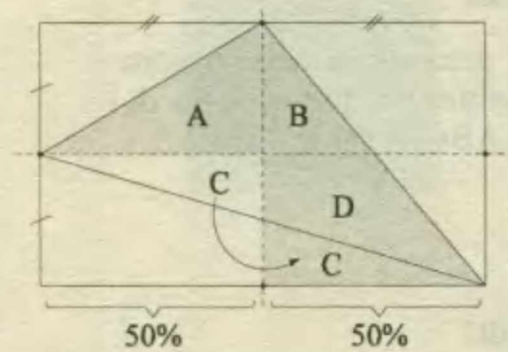
Ejemplo 4:

¿Qué % del área total es el de la región sombreada? (ABCD es un rectángulo)



Resolución:

Por los puntos medios, trazamos ejes perpendiculares que dividen la región dada en diversas partes que analizaremos.



La región C se puede trasladar para que junto con B y D se obtenga una región triangular que es la mitad del 50% del rectángulo original. También se deduce que A es la mitad de un rectángulo que es la cuarta parte ó 25% del área total. Luego :

$$B + D + C = \frac{1}{2} \text{ de } 50\% = 25\%$$

$$A = \frac{1}{2} \text{ de } 25\% = 12{,}5\%$$

Area total = 25% + 12,5% ⇒ **Rpta : 37,5%**

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Si el área del cuadrado ABCD mide 40 m^2. ¿Cuál será el área de la figura sombreada?

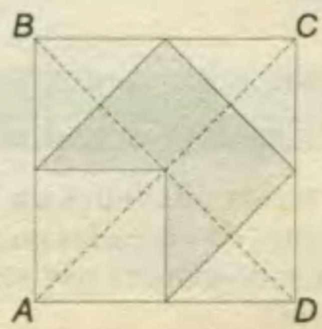
A) 20 m^2

B) 12 m^2

C) 15 m^2

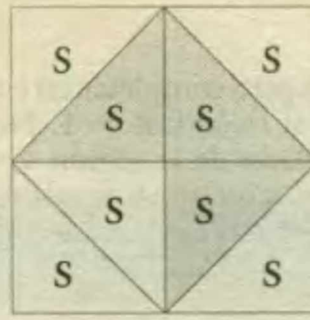
D) 10 m^2

E) 25 m^2



UNMSM - 94

Resolución:



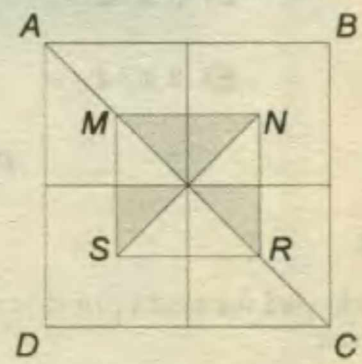
Luego de dividir al cuadrado en 8 regiones triangulares equivalentes de área S, igualamos las ocho partes al área del cuadrado, a fin de hallar S :

$$8S = 40$$
$$S = 5\ m^2$$

Ahora, como el área de la región sombreada está formada por 3 de estas partes, tendremos que:

Area solicitada = 3S = 3 (5) = **$15\ m^2$** RPTA. C

2.- El cuadrado ABCD tiene lado L, y , el cuadrado MNRS tiene una diagonal : $MR = \frac{AC}{2}$. Hallar el área de la región sombreada.



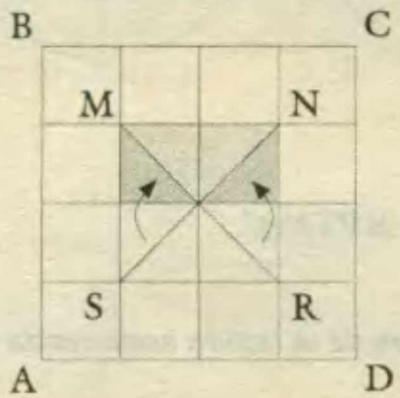
A) $\frac{3}{4}\ L^2$ *D)* $\sqrt{2}\ L^2$

B) $L^2/8$ *E)* $\frac{\sqrt{2}}{2}\ L^2$

C) $L^2/4$ ***UNMSM 97 - UNFV 90***

Resolución:

Tracemos algunas líneas paralelas para luego trasladar las dos regiones triangulares sombreadas inferiores y poder completar un rectángulo.

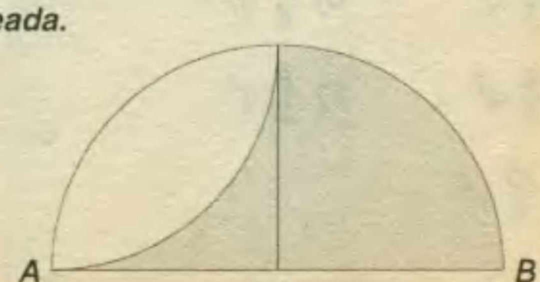


A partir de esta figura podemos reconocer que el área total de la región cuadrada ABCD es L^2.Asimismo el área total está formada por 16 cuadraditos, de modo que el área solicitada (rectángulo) viene dada por el área de estos cuadraditos.Por este motivo se puede establecer que :

$$\text{Area solicitada} = \frac{2}{16}\ \text{Area total}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot L^2$$ RPTA. B

3.- En la figura, calcular el área de la zona sombreada.



A) 16π

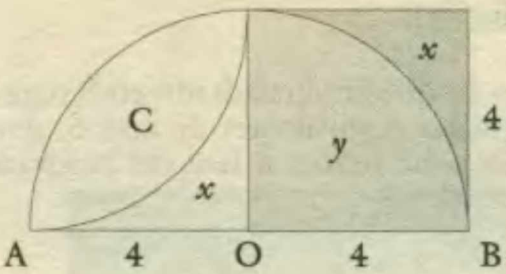
B) $8 + 4\pi$

C) 8π

D) 6π

E) 16 ***UNMSM - 95***

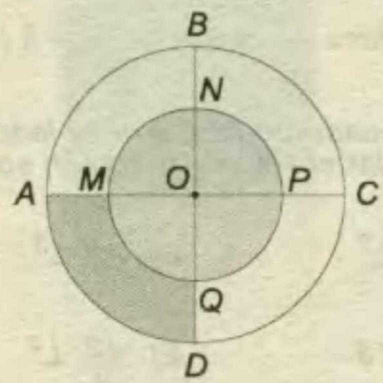
Resolución:



Agregamos dos líneas para completar un cuadrado de lado igual al *radio* OB = 4. Después de hacer el traslado de la región *x*, se observa que las partes *x* e *y* que formaban la región sombreada, forman ahora el área del cuadrado.

Area sombreada = Area del cuadrado = 4^2 = **16** RPTA. E

4.- El diámetro AC mide 4 m y M, N, P y Q son puntos medios. Hallar el área de la región sombreada.

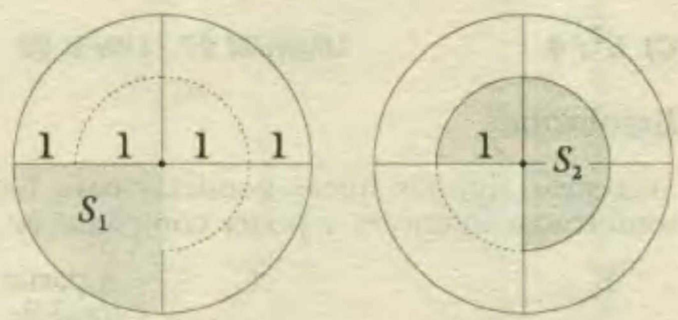


A) 9 π / 2 *D) 3 π / 2*

B) 9 π / 4 *E) 3 π / 4*

C) 7 π / 4 *PUCP 92 - I*

Resolución:



La región dada está formada por dos sectores circulares:

S_1, cuyo ángulo es 90° y *radio* 2 *m* y S_2 cuyo ángulo es 270° y *radio* 1 *m*..

Luego :

$$S_1 = \frac{90°}{360°}.\pi.(2)^2 = \pi \; ; \quad S_2 = \frac{270°}{360°} . \pi\,(1)^2 = \frac{3\pi}{4}$$

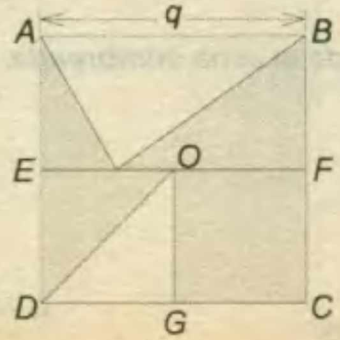
Area solicitada = $S_1 + S_2 = \pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ RPTA. C

5.- Si O es el centro del cuadrado de lado q, entonces, el área de la región sombreada es:

A) $\frac{3}{8}q^2$ *D)* $\frac{5}{8}q^2$

B) $\frac{8}{5}q^2$ *E)* $\frac{8}{3}q^2$

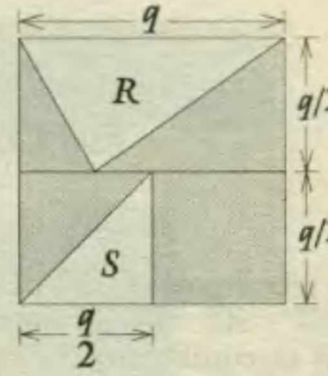
C) $\frac{10}{9}q^2$



UNMSM - 97

Resolución:

En este caso el área de la región sombreada se puede hallar indirectamente calculando primero las áreas de las regiones no sombreadas R y S para luego restarlas del área de la región cuadrada, que es: q^2.



$$R = \frac{base \,.\, altura}{2} = \frac{q \,.\, ^{q}/_{2}}{2} = \frac{q^2}{4}$$

$$S = \frac{^{q}/_{2} \,.\, ^{q}/_{2}}{2} = \frac{q^2}{8}$$

Finalmente, de acuerdo al planteo inicial :

$$\text{Area solicitada} = q^2 - (R + S) = q^2 - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{q^2}{8}\right) = \boxed{\frac{5}{8}q^2}$$ RPTA. D

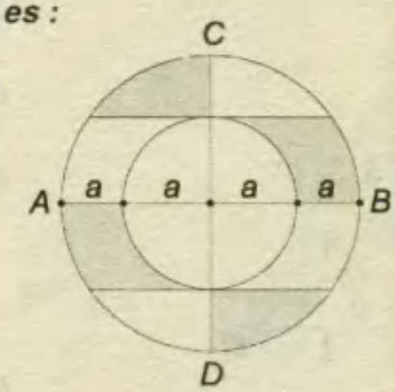
6.- En la figura mostrada, el área sombreada es :

A) πa^2 *D)* $\frac{5}{2}\pi a^2$

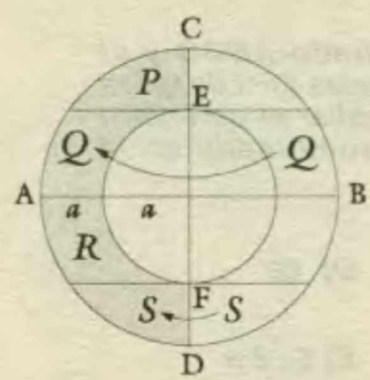
B) $\frac{3}{2}\pi a^2$ *E)* $\frac{2}{5}\pi - a^2$

C) $\frac{2}{3}\pi a^2$

UNFV - 95



Resolución:



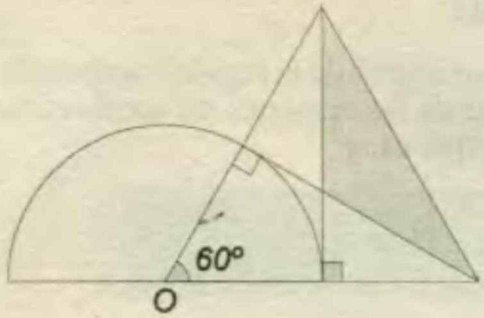
Efectuando los traslados de las regiones Q y S según como se muestra en la figura adjunta ,obtenemos una región sombreada que se puede calcular por una diferencia:

Area solicitada = semicírculo de *radio* $2a$

- semicírculo de *radio* a

$$= \frac{\pi \,.\, (2a)^2}{2} - \frac{\pi\,(a)^2}{2} = \boxed{\frac{3\pi}{2}a^2}$$ RPTA. B

7.- Calcular el área de la figura sombreada si el radio de la circunferencia mide 1m.



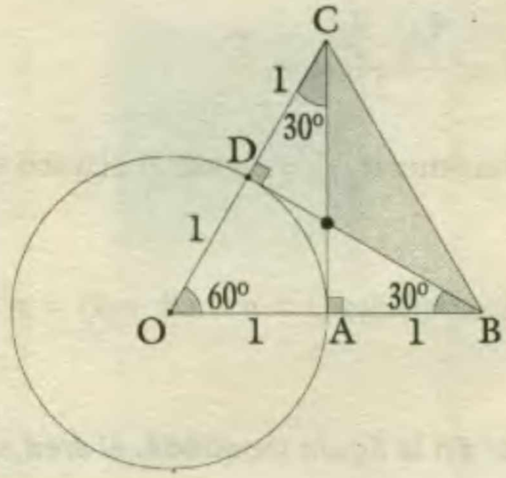
A) $\sqrt{3}/4\ m^2$ *D)* $\sqrt{5}/2\ m^2$

B) $\sqrt{3}/3\ m^2$ *E)* $\sqrt{2}/5\ m^2$

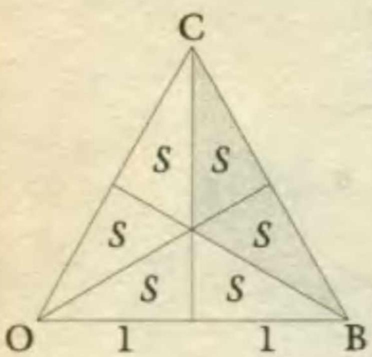
C) $\sqrt{2}/3\ m^2$

PUCP 96 - I

Resolución:



Los triángulos rectángulos ODB y OAC son notables (30° - 60° - 90°). Luego, el triángulo OCB es equilátero, el cual se puede dividir en 6 partes al trazar la tercera altura (que también es la tercera mediana), a continuación debemos recordar que las 3 medianas dividen a un triángulo en 6 triángulos de áreas equivalentes. De este modo se tiene :



$$6\,S = \Delta \text{ equilátero OCB}$$

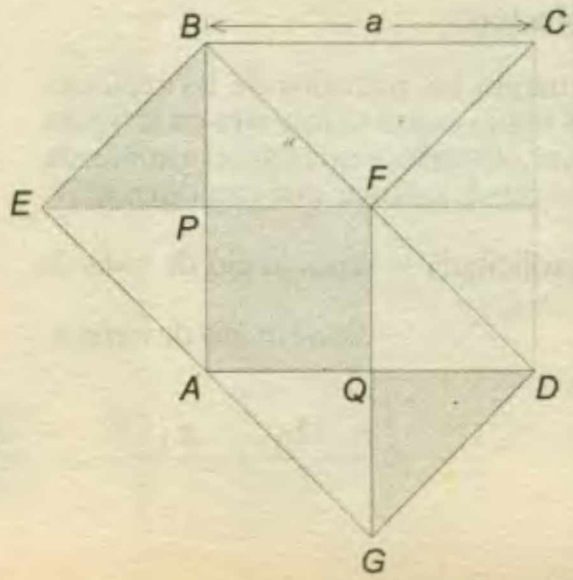
$$6\,S = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$A_{R.S.} = 2\,S = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

RPTA. B

8.- Dado el cuadrado ABCD y el triángulo isósceles EFG de lados EF = FG = a, hallar el perímetro de la región sombreada en la figura.



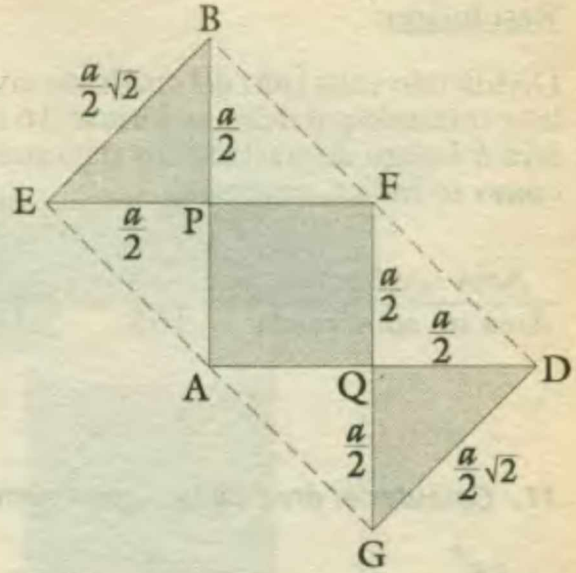
A) $(4-\sqrt{2})a$ *D)* $8a$

B) $(1+\sqrt{2})a$ *E)* $5\sqrt{2}\,a$

C) $(4+\sqrt{2})a$

UNMSM - 96

<u>Resolución</u>:



Podemos reconocer que EF = FG = AB = AD = a

Asimismo : EB = GD = $\frac{a}{2}\sqrt{2}$

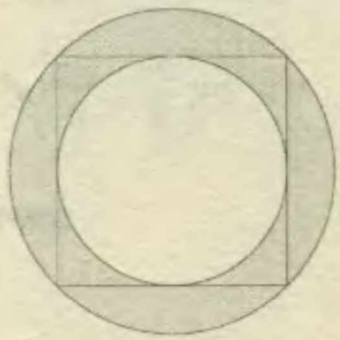
Luego, se puede reconocer que el perímetro de la región sombreada viene dado por :

$$P_x = 4\ EF + 2\ EB$$

$$P_x = 4\,(a) + 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\therefore$ $P_x = (4+\sqrt{2})\,a$ **RPTA. C**

9.- En la figura : Si el lado del cuadrado mide 12 cm; el área de la región sombreada es:



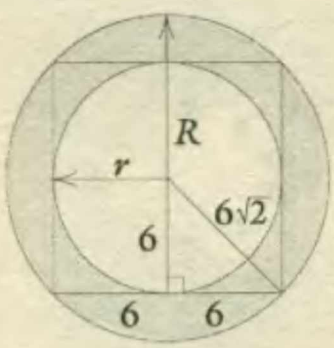
A) 24 π cm² *D) 48 π cm²*

B) 36 cm² *E) 36 π cm²*

C) 72 cm²

UNFV - 87

<u>Resolución</u>:



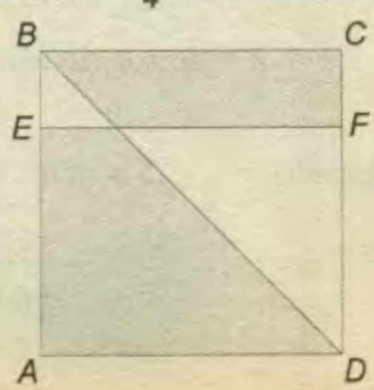
Si el lado del cuadrado mide 12, el *radio* del círculo menor es: $r = 6$ y el *radio* del círculo mayor es: $R = 6\sqrt{2}$.

El área solicitada está dada por la diferencia de las áreas de los dos círculos:

$$A_{R.S.} = \pi\,(6\sqrt{2}\,)^2 - \pi\,.\,6^2$$

$A_{R.S.} = 36\,\pi$ **RPTA. E**

10.- Dado el cuadrado de la figura, sabiendo que EF // BC y CF = $\frac{1}{4}$ AD, determine la razón entre el área de la región sombreada y el área de la región no sombreada.

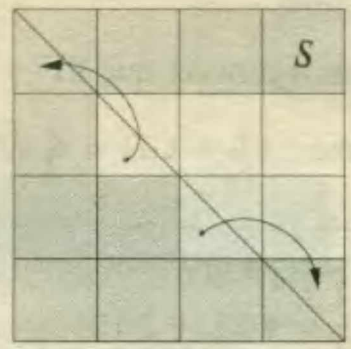


A) 11/5 *D) 16/11*

B) 5/11 *E) 4/3*

C) 11/16

UNMSM - 92



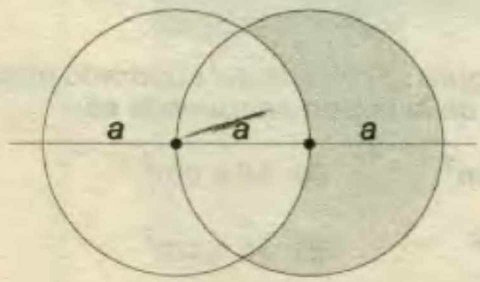
Resolución:

Dividiendo cada lado del cuadrado en cuatro partes iguales y trazando paralelas, se forman 16 cuadraditos de igual área S. Luego de trasladar las regiones triangulares según como se indica, tenemos:

$$\frac{\text{Area sombreada}}{\text{Area no sombreada}} = \frac{11S}{16S} = \frac{11}{16}$$

RPTA. C

11.- Calcular el área de la región sombreada :



A) $\frac{\pi a^2}{3}$

B) $\frac{\pi a^2}{3} + \sqrt{3}\,a^2$

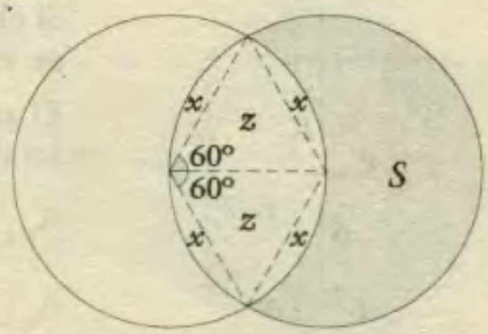
C) $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2$

D) $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2$

E) $\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)a^2$

UNFV - 95

Resolución:



En la gráfica observamos la siguiente relación de áreas :

$S + 2z + 4x = \pi a^2$

$S + 4(x+z) - 2z = \pi a^2$

$\Rightarrow S = \pi a^2 + 2z - 4(x+z)$

Para la última igualdad, reconocemos que :

$$z = \text{triángulo equilátero} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

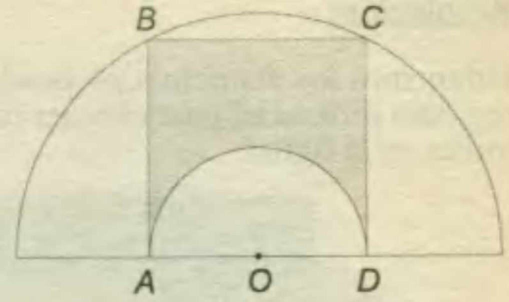
$$x + z = \text{sector circular de } 60^\circ = \frac{1}{6}\cdot \pi a^2$$

Reemplazando : $\quad S = \pi a^2 + 2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 4\cdot\frac{1}{6}\cdot\pi a^2$

$$S = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2$$

RPTA. C

12.- Calcular el área de la región sombreada en la figura sabiendo que ABCD es un cuadrado inscrito en el semicírculo de centro O y radio R.

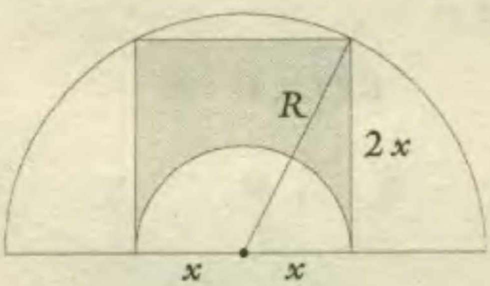


A) $\frac{R^2}{10}(5\pi - 8)$ *D)* $\frac{R^2}{10}(5\pi - 1)$

B) $\frac{4R^2}{5}(8 + \pi)$ *E)* $\frac{4R^2}{5}(\pi + 1)$

C) $\frac{R^2}{10}(8 - p)$ ***UNFV - 95***

Resolución:



Hallemos la medida del lado del cuadrado en función de R; para lo cual aplicaremos el Teorema de Pitágoras :

$$x^2 + (2x)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{5}}$$

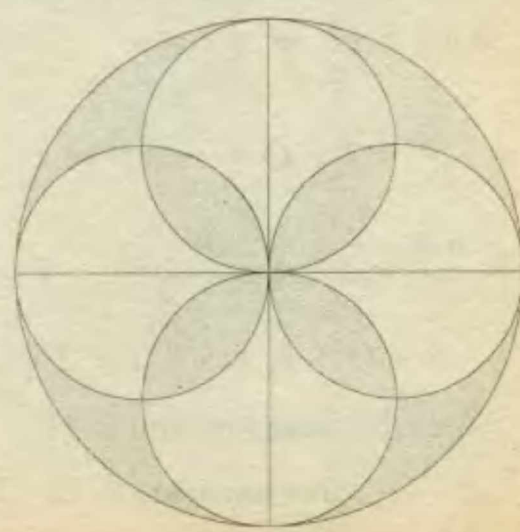
Lado del cuadrado : $L = 2x$

Area solicitada = Area del □ - Area del semicírculo

$$= L^2 - \frac{\pi x^2}{2} = \left(\frac{2R}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$= \frac{R^2}{10}(8 - \pi)$$ **RPTA. C**

13.- En un círculo de 1 m radio, se trazan dos diámetros perpendiculares. Tomando como diámetro los radios se construyen cuatro círculos. El área de la región sombreada es:



A) $(\pi - 3)\ m^2$ *D)* $(2\pi - 7)\ m^2$

B) $(2\pi - 5)\ m^2$ *E)* $(\pi - 2)\ m^2$

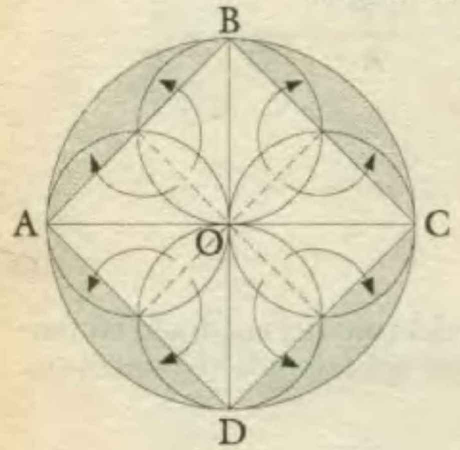
C) $2\pi\ m^2$

UNMSM - 97

Resolución:

Dibujemos los diámetros perpendiculares AC y BD, luego realizamos los "traslados de las regiones indicadas" para obtener una figura que tenga un área más fácil de calcular, como se indica en la figura.

Area de la región sombreada = círculo - cuadrado



Nótese en la figura que el ***radio*** del círculo mide 1 (OC = 1) y de ahí se puede determinar que el lado del cuadrado es :

$$BC = OC\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

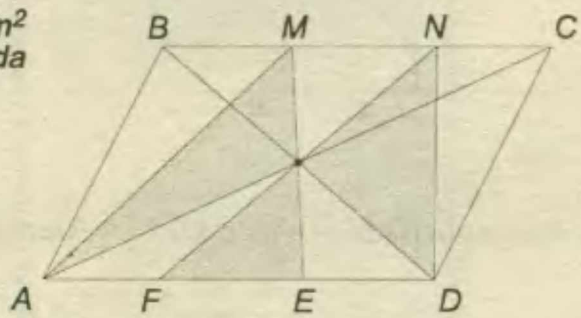
Luego al reemplazar en (*):

$$A = \pi\,(1)^2 - (\sqrt{2}\,)^2$$

$$A = \pi - 2$$

RPTA. E

14.- En la figura, si el área del paralelogramo es 12 cm^2 y BM = MN = NC, el área de la región sombreada es:



A) 5 cm^2 *D) 6 cm^2*

B) 4 cm^2 *E) 5,5 cm^2*

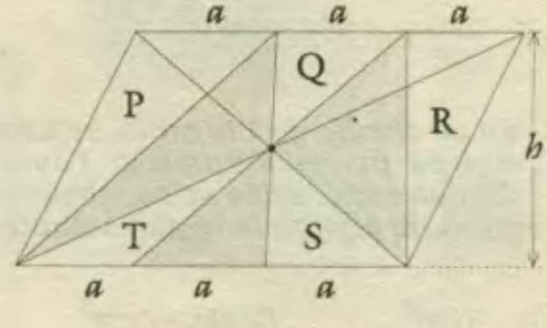
C) 4,5 cm^2 *UNFV - 88*

Resolución:

Hallaremos primero el área de la región no sombreada. Para esto asumiremos que la base del paralelogramo es $3a$, y su altura es h.

Sabiendo que el área del paralelogramo es :

$$3\,a\,h = 12 \Rightarrow a\,h = 4$$



$$P = \frac{a\,h}{2} = 2 \;;\; Q = \frac{a\,.\,h/2}{2} = 1$$

$$R = \frac{a\,h}{2} = 2 \;;\; S = \frac{a\,.\,h/2}{2} \;;\; T = \frac{a\,.\,h/2}{2} = 1$$

$$\therefore \quad P + Q + R + S + T = 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 7$$

Area del paralelogramo = 12

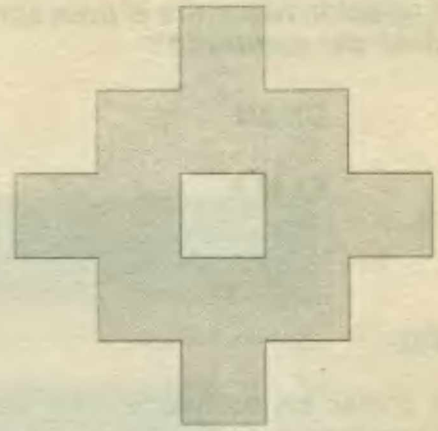
Area solicitada = 12 - 7 = $5\ cm^2$ **RPTA. A**

15.- En la figura mostrada, el perímetro de la región sombreada mide 12 cm, entonces el área sombreada (en cm²) es igual a :

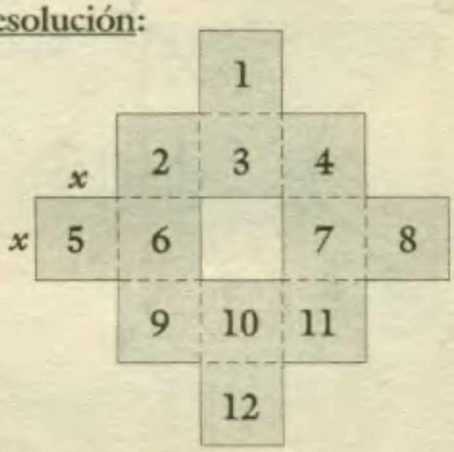
A) 3 *D) 6*

B) 4 *E) N.A.*

C) 5



Resolución:



Perímetro de la figura sombreada = $24x$

$24x = 12 \Rightarrow x = 0{,}5\ cm$

$A_{R.S.} = 12$ cuadraditos

$A_{R.S} = 12x^2$

$A_{R.S} = 12\,(0{,}5)^2$

$A_{R.S} =$ **$3\ cm^2$** RPTA. A

16.- El área del paralelogramo ABCD de la figura es 100 cm². Se prolonga la base de modo que BE = AB. El área de la región trapezoidal que se forma es (en cm²) :

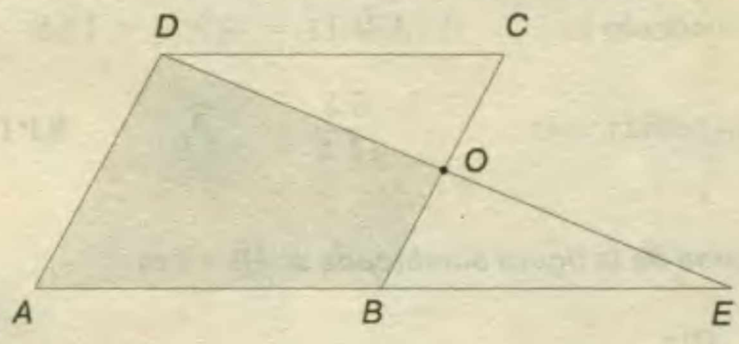
A) 25

B) 100

C) 50

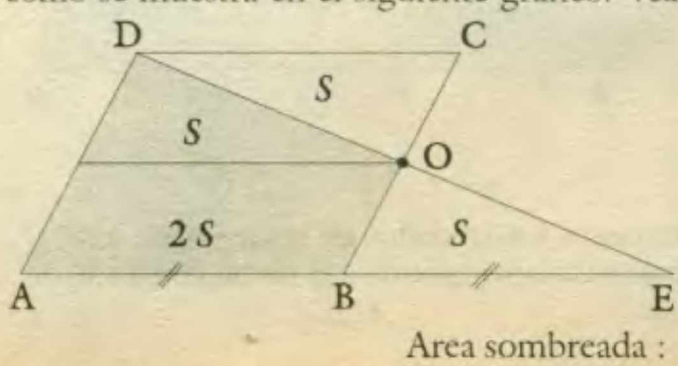
D) 75

E) 66,7



Resolución:

Si AB = BE, podemos deducir que O es punto medio de BC. Esto nos permite obtener varios triángulos congruentes cuando trazamos una paralela a AB que pase por O , tal como se muestra en el siguiente gráfico. Veamos :



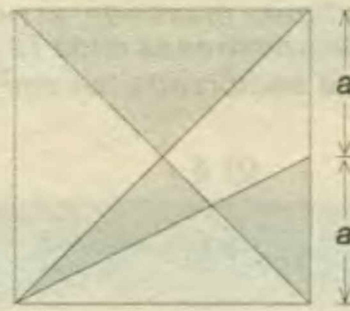
Area del paralelogramo :

$4\,S = 100$

$\Rightarrow\ S = 25$

Area sombreada : $3\,S = 3(25) =$ **75** RPTA. D

17.- ¿Qué relación hay entre el área sombreada y el área del cuadrado?

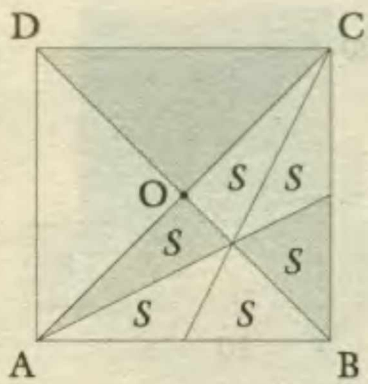


A) 3/5 *D) 3/4*

B) 5/12 *E) N.A.*

C) 1/6

<u>Resolución</u>:



Luego de trazar las medianas en el triángulo ABC, reconocemos que por la propiedad de las medianas, se forman 6 regiones triangulares de áreas equivalentes e iguales a S.

Asimismo podemos establecer que la superficie limitada por el ΔDOC es equivalente a la del ΔOBC,tal que cada uno posee un área 3 S.

Entonces, el área de la región sombreada ($A._{R.S}$) es:

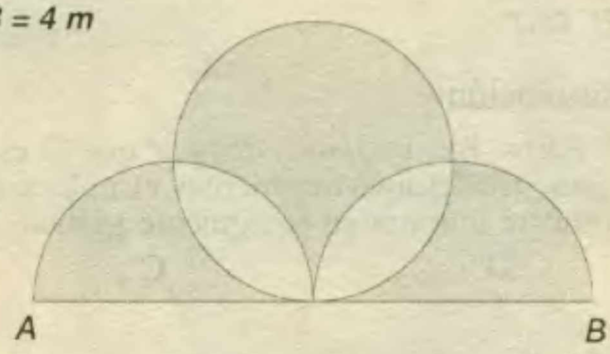
$A._{R.S} = A\,(\Delta\,DOC) + S + S$

$A._{R.S} = 3\,S + 2\,S = 5\,S$

Pero el área del cuadrado es : $A\,(ABCD) = 4(3\,S) = 12\,S$

Luego la relación pedida, será : $\dfrac{5\,S}{12\,S} = \dfrac{5}{12}$ **RPTA. B**

18.- Calcular el área de la figura sombreada si AB = 4 m



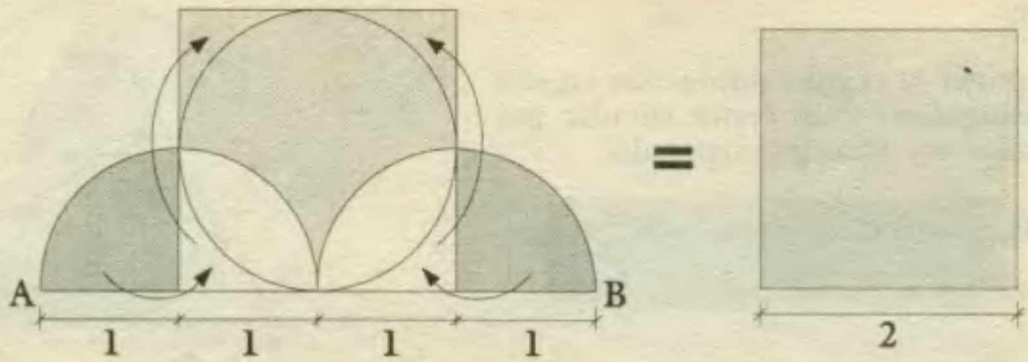
A) π - 2 *D) π*

B) 4 *E) 4 π*

C) π + 2

<u>Resolución</u>:

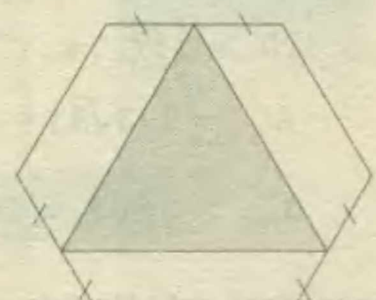
Después de trazar algunas líneas auxiliares, efectuamos los traslados de las regiones indicadas en la figura, donde se observa que el área resultante corresponde a la de un cuadrado de lado 2.



$\therefore$ Area sombreada = Area del cuadrado

$= 2^2 =$ **4** RPTA. B

19.- ¿Qué % del área del exágono es el área de la región sombreada?



A) 25% *D) 50%*

B) 37,5% *E) 62,5%*

C) 40%

Resolución:

Sabemos que la región limitada por un exágono regular puede descomponerse en 6 regiones definidas por triángulos equiláteros y éstos a su vez en más triángulos equiláteros, tal como se indica en la figura. Luego será suficiente con plantear una Regla de Tres para hallar el porcentaje:

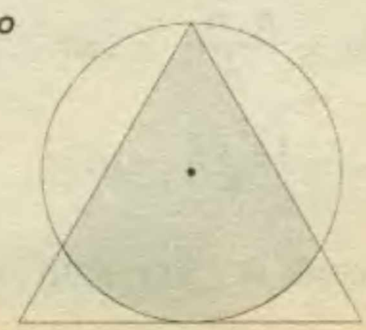


Area total : 24 A ... 100%

Area sombreada : 9 A ... x

$$x = \frac{9\cancel{A}\,.\,100}{24\cancel{A}} = 37,5\%$$ RPTA. B

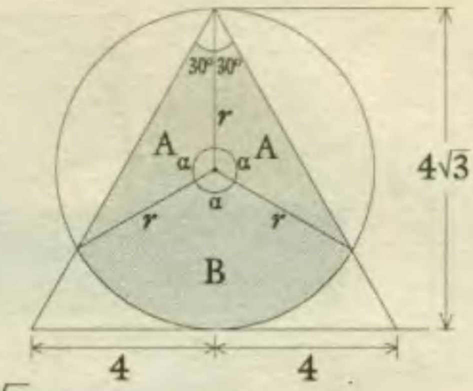
20.- Hallar el área de la región sombreada, si el triángulo es equilátero de lado 8.



A) $6\sqrt{3} + 4\pi$ *D) $3\sqrt{3} + 8\pi$*

B) $2\sqrt{3} + 6\pi$ *E) N.A.*

C) $4\sqrt{3} + 3\pi$



Resolución:

Al descomponer la región sombreada en dos regiones triangulares y un sector circular, podemos calcular sus áreas por separado.

Previamente, calculamos la altura del triángulo equilátero con la fórmula : $h = \frac{L}{2}\sqrt{3}$.

$\therefore \quad h = \frac{8}{2}\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = 2r$; de donde : $r = 2\sqrt{3}$

Area de la región sombreada = 2 A + B ... (*)

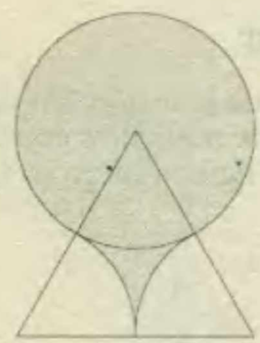
$A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2 \cdot \text{sen}\,120^o = \frac{1}{2}\cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$B = \text{sector circular de } 120^o = \frac{120^o}{360^o} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 4\pi$

En (*) : $A_{\cdot R.S} = 2(3\sqrt{3}) + 4\pi$

$A_{\cdot R.S} =$ **$6\sqrt{3} + 4\pi$** RPTA. A

21.- En la figura, los vértices del triángulo equilátero de lado 12 son centros de círculos de radio 6. El área de la región sombreada es:



A) *$18\pi + 9\sqrt{3}$*

B) *$36\pi + 9\sqrt{3}$*

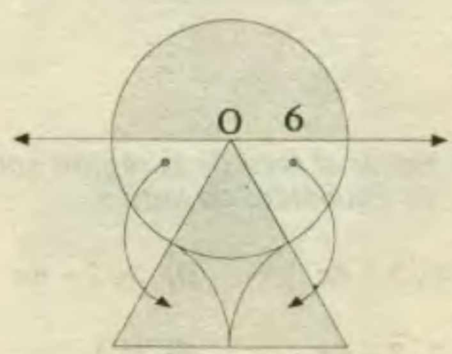
C) *$18\pi + 36\sqrt{3}$*

D) *42π*

E) *N.A.*

Resolución:

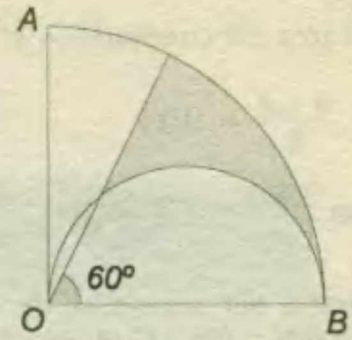
Al trazar un diámetro horizontal y trasladar las regiones indicadas ,descomponemos la región sombreada en un semicírculo y en una región triangular equilátera, cuyas áreas son :



$$\text{Semicírculo} = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} = 18\pi$$

$$\text{Triángulo} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$$

Area sombreada = **$18\pi + 36\sqrt{3}$** RPTA. C



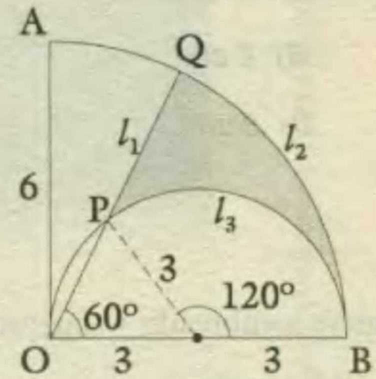
22.- En la figura, O es el centro del cuadrante y OB es el diámetro de la circunferencia. Si OB = 6; hallar el perímetro de la región sombreada.

A) $3+2\pi$ *D) $6+\pi$*

B) $3(1+\pi)$ *E) 4π*

C) $3+4\pi$

Resolución:



Perímetro $= l_1 + l_2 + l_3$

$$l_1 = OQ - OP = 6 - 3 = 3$$

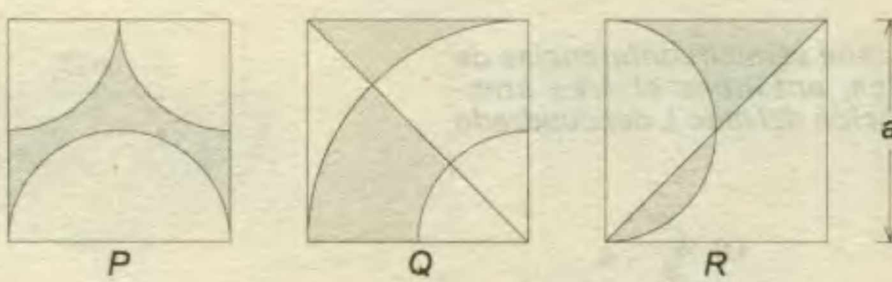
$$l_2 = \frac{60^o}{360^o} \cdot (2\pi \cdot 6) = 2\pi$$

$$l_3 = \frac{120^o}{360^o} \cdot (2\pi \cdot 3) = 2\pi$$

$\therefore$ perímetro = $3 + 2\pi + 2\pi$

RPTA. C

23.- Ordene de menor a mayor las áreas de las regiones sombreadas de las siguientes figuras: (Todos los cuadrados son de lado a)



A) P, Q, R *B) R, Q, P* *C) R, P, Q* *D) P, R, Q* *E) Q, R, P*

Resolución:

Haciendo uso de la técnica del traslado de regiones, tendremos :

1°) P = Area del cuadrado - Area de un círculo

$$P = a^2 - \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \cdot \left(\frac{4-\pi}{4}\right)$$

2°) Q = $\frac{1}{2}$ del cuadrado - sector de 45°

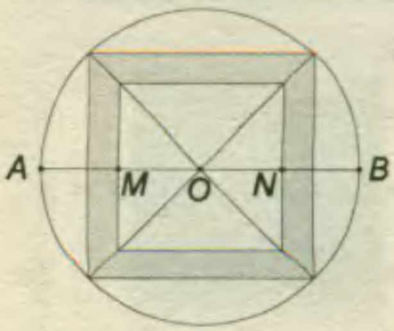
$$= \frac{a^2}{2} - \frac{45^o}{360^o} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{4} = a^2\left(\frac{16-\pi}{32}\right)$$

3°) $R = \frac{1}{4}$ del área del cuadrado $= a^2 . \frac{1}{4}$

Desde que : $\frac{4-\pi}{4} = 0{,}21$; $\frac{16-\pi}{32} = 0{,}40$; $\frac{1}{4} = 0{,}25$

Concluimos con : **P < R < Q** RPTA. D

24.- Si el perímetro del círculo es 4π cm y AM = MO = ON = NB ¿Cuál es el área de la región sombreada?



A) 8 cm² *B) 6 cm²*

C) 4 cm² *D) 3 cm²*

E) N.A.

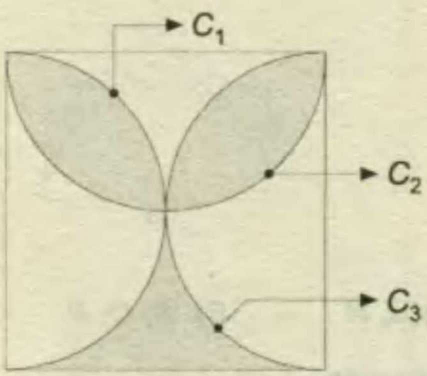
Resolución:

Area de la región sombreada = cuadrado mayor - cuadrado menor

Se sabe que : $2\pi r = 4\pi \Rightarrow r = 2$

$$A_{\cdot R.S} = \left(r\sqrt{2}\right)^2 - \frac{\left(r\sqrt{2}\right)^2}{2} = 8 - 2 = \boxed{6}$$ RPTA. B

25.- Si C_1, C_2 y C_3 son semicircunferencias de radios iguales, entonces el área sombreada en función del lado L del cuadrado es:



A) $\frac{L^2}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)L^2$ *D)* $\frac{L^2}{8} . \pi$

B) $\frac{L^2}{2}\left(1-\frac{\pi}{8}\right)L$ *E)* $\frac{L^2}{4} . \pi$

C) $\frac{L^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

Resolución:

Al trasladar la región inferior hacia la parte superior, se completa un semicírculo de *radio* igual a la mitad del lado del cuadrado.

$$A_{\cdot R.S} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} = \boxed{\frac{\pi L^2}{8}}$$ RPTA. D

26.- Hallar el área de la región sombreada, si ABCD es un rectángulo de área = 36 cm².

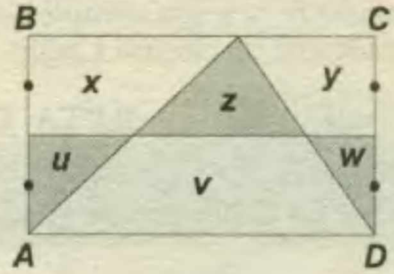
A) 18

B) 19

C) 20

D) 21

E) 22



Resolución:

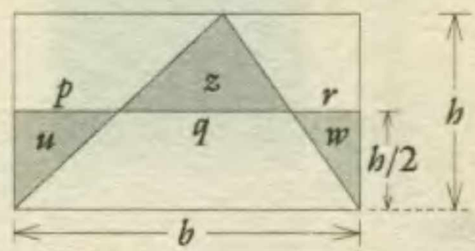
Por dato : $b \cdot h = 36$

$A_{R.S} = u + z + w$

$= p \cdot \frac{h}{2} + q \cdot \frac{h}{2} + r \cdot \frac{h}{2}$

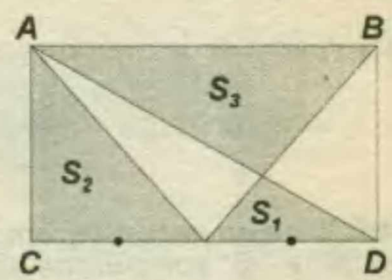
$= \frac{h}{2}(p + q + r)$

$= \frac{b.h}{2} = \frac{36}{2} = \boxed{18}$



RPTA. A

27.- Sabiendo que ABCD es un rectángulo , calcular : S_3 ; si : $S_1 + S_2 = 10cm^2$



A) 5 cm² *B) 10 cm²* *C) 9cm²*

D) 12 cm² *E) 7 cm²*

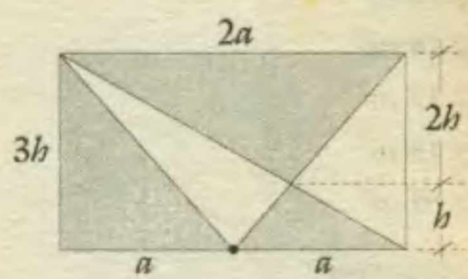
Resolución:

Deducimos las siguientes relaciones :

$\frac{S_1}{S_3} = \frac{1}{4}$; $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3}$

Luego : $S_1 + S_2 = 4S_1 = 10$

Pero : $S_3 = 4S_1 = \boxed{10cm^2}$ RPTA. B



28.- Hallar el área de la región sombreada del siguiente gráfico :

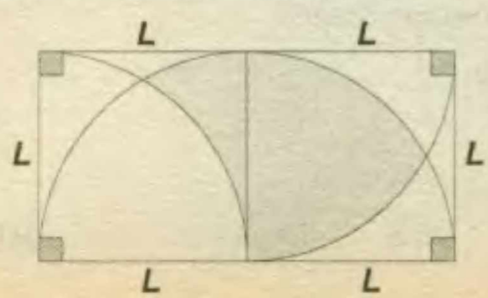
A) $\pi L^2/5$

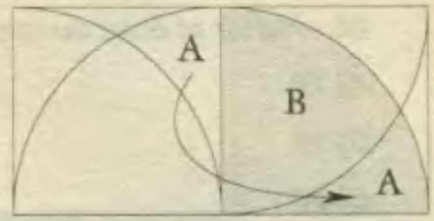
B) $3\pi L^2/4$

C) $\pi L^2/4$

D) $\pi L^2/5$

E) $5\pi L^2/3$



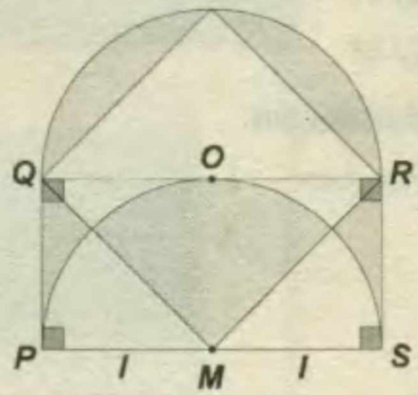


Resolución:

Trasladando la región A, se logra completar entre A y B un cuadrante de círculo. Luego:

$A + B = \pi L^2 / 4$ RPTA. C

29.- Calcular el área de la región sombreada :



A) $\frac{\pi \cdot r}{2}$

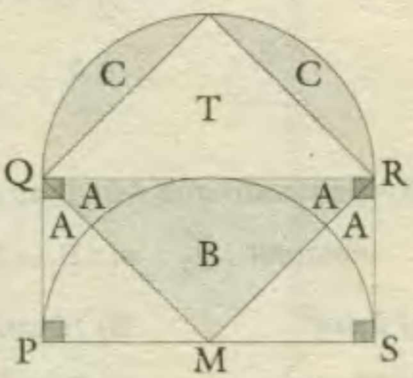
B) $\frac{\pi \cdot r^2}{3}$

C) $\frac{\pi}{3}$

D) $\frac{\pi \cdot r^2}{2}$

E) N.A.

Resolución:



Trasladando las regiones adecuadamente ,se obtiene :

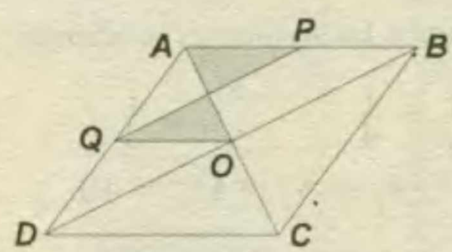
2A + B = región triangular QMR

= T

Luego, el área de la región sombreada es :

$2C + T = \text{semicírculo} = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$ RPTA. D

30.- ABCD es un paralelogramo cuya área es 120 m^2; hallar el área de la región sombreada si "P" y "Q" son puntos medios.



A) 15 m^2

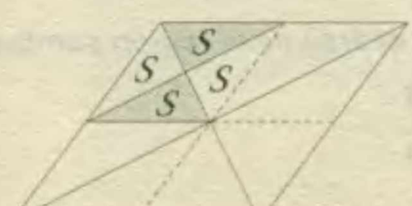
B) 16 m^2

C) 17 m^2

D) 18 m^2

E) 19 m^2

Resolución:



Las cuatro regiones de área S forman la cuarta parte de la región total, luego :

$$4S = \frac{120}{4}$$

De donde : $S = 7{,}5$

Asi el área buscada es : $2\,S = 15\ m^2$ RPTA. A

31.- ¿Qué fracción representa la región sombreada de "II", respecto de la región no sombreada de "I", si el área total de la figura "I" es los 3/2 del área total de la figura "II"?

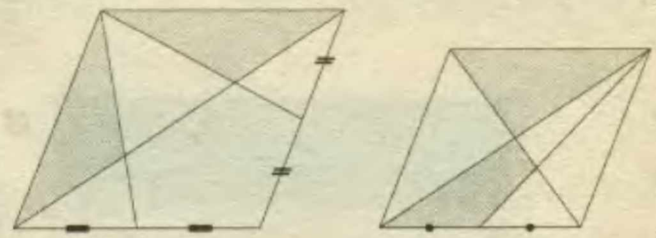
A) 12 / 5

B) 5 / 15

C) 5 / 12

D) 3 / 6

E) 7 / 5

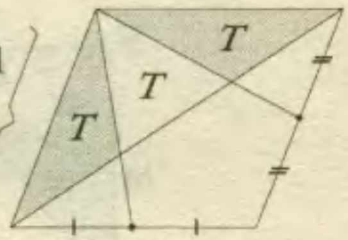


(I) (II)

Resolución:

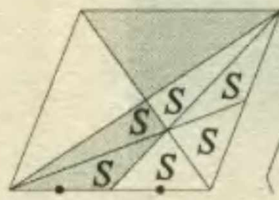
La diagonal determina 3 partes

(I)



$A_1 = 6T$

(II)



$A_2 = 12\,S$

Las medianas determinan 6 Δs equivalentes.

Se sabe que : $A_1 = \frac{3}{2}\,A_2 \quad \Rightarrow \quad 6\,T = \frac{3}{2}\,.\,12\,S \quad \Rightarrow \quad T = 3\,S$

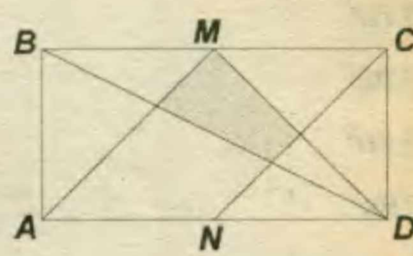
Area sombreada en (I) $= 2\,T$ $\rightarrow$ Area no sombreada en (I)$= 4T$

Area sombreada en (II) $= 5\,S$

$$\frac{A_{SOMBREADA}\ (II)}{A_{No\,SOMREADA}\ (I)} = \frac{5S}{4T} = \frac{5}{4}\cdot\frac{S}{3S} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

RPTA. C

32.- En el gráfico ABCD es un rectángulo donde M y N son puntos medios. Si AB = 4m y AD = 10m ;calcular el área de la región sombreada.



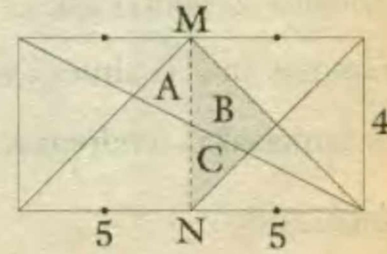
A) 1 *B) 2*

C) 3 *D) 4*

E) 5

Resolución:

Los triángulos A y C son congruentes, por tanto :



$A_{R.S} = A + B$

$= C + B$

$= \frac{1}{4}$ de $5\ .\ 4$

$= \boxed{5}$ RPTA. E

33.- El área del cuadrado ABCD es igual a 20 m² siendo M y N puntos medios. Hallar el área del triángulo sombreado.

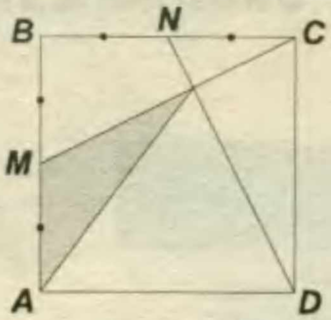
A) $1m^2$

B) $2m^2$

C) $3m^2$

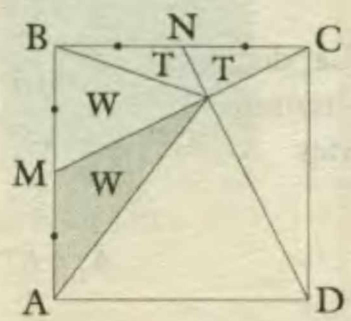
D) $4m^2$

E) $5m^2$



Resolución:

$$2T + W = A\ (\Delta\ BMC)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot A\ (\square\ ABCD)$$
$$= 5\ m^2$$



Además, debemos reconocer que T es $\frac{1}{5}$ del Δ BMC

Es decir : $T = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1m^2$

$\therefore\ 2\ (1) + W = 5 \Rightarrow W = 3m^2$

$A_{R.S.} = 3m^2$ RPTA. C

34.- Hallar el área de la región sombreada BMP, si PM = 4 y AP = 6.

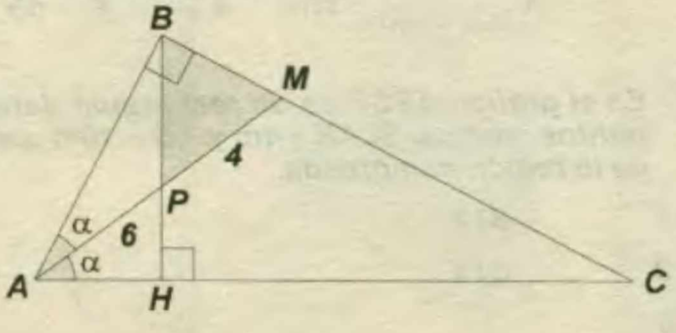
A) $5u^2$

B) $7u^2$

C) $8u^2$

D) $6u^2$

E) $9u^2$



Resolución:

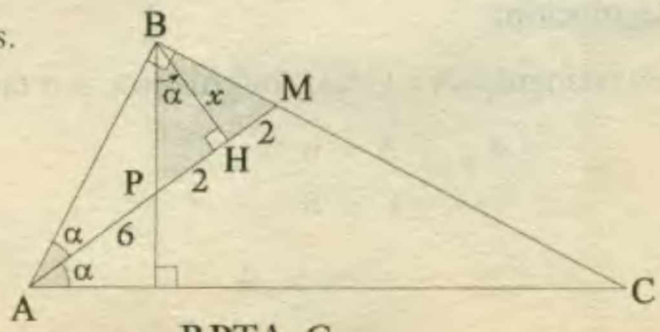
Debemos reconocer que el Δ PBM es isósceles.

Trazamos en él la altura x relativa a PM.

Por semejanza, tendremos : $\frac{x}{6+2} = \frac{2}{x}$

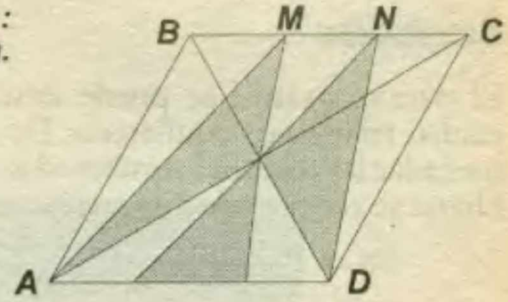
Resolviendo : $x = 4$

Area del Δ sombreado : $\frac{4 \cdot 4}{2} = 8u^2$



RPTA. C

35.- El área del paralelogramo es igual a 60 u², si : BM = MN = NC; hallar el área de la región sombreada.



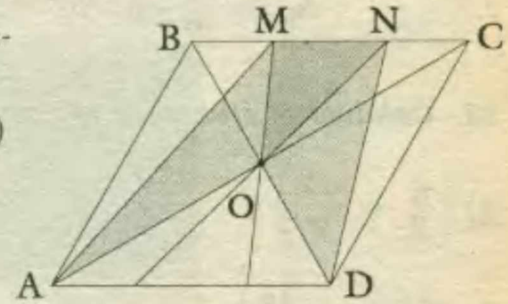
A) $25u^2$ *D)* $40u^2$

B) $30u^2$ *E)* $45u^2$

C) $35u^2$

Resolución:

Al trasladar el Δ sombreado inferior hacia arriba, obtenemos una región cuya área es más fácil de determinar :

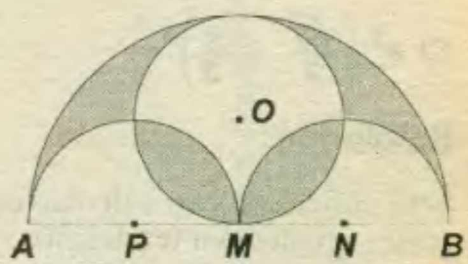


$$A_{R.S.} = \text{Area total} - (\Delta\ ABM + \Delta\ NCD + \Delta\ AOD)$$

$$= 60 - \left(\frac{1}{6}\cdot 60 + \frac{1}{6}\cdot 60 + \frac{1}{4}\cdot 60\right)$$

$$= \boxed{25u^2}$$ RPTA. A

36.- Hallar el perímetro de la región sombreada si AB = 10 y M , P, O, N ; son centros.



A) 5π *D)* 20π

B) 10π *E)* 25π

C) 15π

Resolución:

El perímetro de la región sombreada está conformado por :

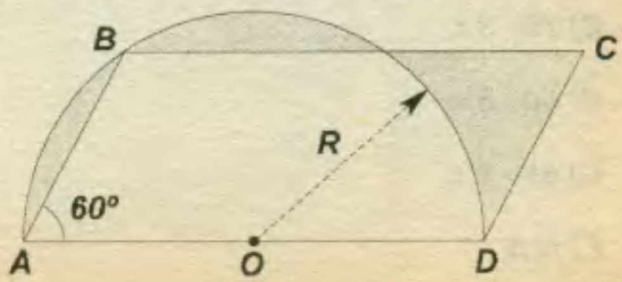
1) La circunferencia de centro "O" : $2\pi r = 2\pi \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = 5\pi$

2) Semicircunferencia de diámetro AB : $\pi \cdot \frac{AB}{2} = 5\pi$

3) 2 semicircunferencias de diámetro 5 : $2.\pi^2 \cdot \frac{5}{2} = 5\pi$

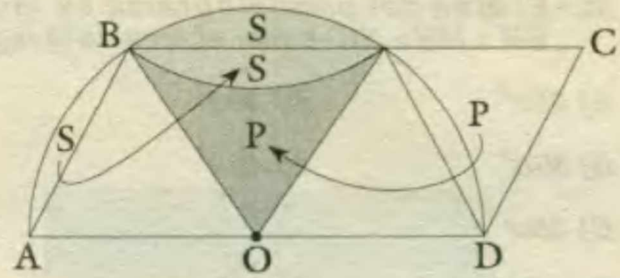
$\therefore$ Perímetro = $5\pi + 5\pi + 5\pi = \boxed{15\pi}$ RPTA. C

37.- En la figura hallar el área de la región sombreada, si ABCD es un paralelogramo y "O" es centro del semicírculo.



A) $\frac{\pi R^2}{5}$ *B)* $\frac{\pi R^2}{3}$ *C)* $\frac{\pi R^2}{6}$

D) $\frac{\pi R^2}{2}$ *E)* N.A.



Resolución:

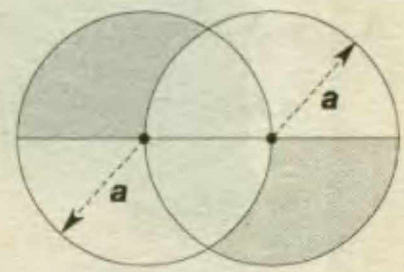
El paralelogramo se puede descomponer en cuatro triángulos equiláteros. De este modo al trasladar las regiones sombreadas, nuestro problema se reduce a lo siguiente :

$$2S + P = \text{sector de } 60^o.$$

$$\therefore \qquad A_{R.S} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{\pi R^2}{6}$$

RPTA. C

38.- Calcular el área de la región sombreada :



A) $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

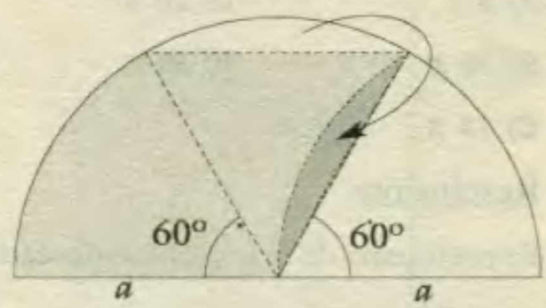
B) $a^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C) $a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

D) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

E) N.A.

Resolución:



Será suficiente con calcular una de las dos partes iguales. Asi tendremos :

$$A = \text{Sector de } 60^o + \Delta \text{ equilátero}$$

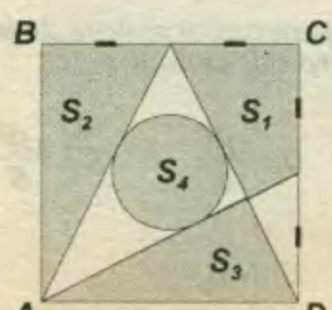
$$A = \frac{1}{6} \cdot \pi\, a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Como son dos partes : $A_{R.S.} = 2A = \frac{\pi\, a^2}{3} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$$A_{R.S.} = a^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

RPTA. B

39.- Si el lado del cuadrado ABCD es 10 u ; hallar : $S_1 + S_2 + S_3 - S_4$.



A) $45 - 5\pi$

B) $75 - 3\pi$

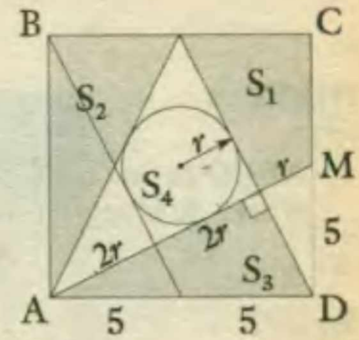
C) $50 - 5\pi$

D) $65 - 5\pi$

E) N.A.

Resolución:

Del ⊿AMD calculamos r : $(5r)^2 = 10^2 + 5^2 \Rightarrow r = \sqrt{5}$



Luego : $S_2 = \dfrac{10 \cdot 5}{2} = 25$

$S_3 = \dfrac{4r \cdot 2r}{2} = 20$

$S_1 = S_3 = 20$

$S_4 = \pi r^2 = 5\pi$

$\therefore \quad S_1 + S_2 + S_3 - S_4 = \boxed{65 - 5\pi}$ RPTA. D

40.- En el cuadrado, hallar el área de la figura sombreada, si el radio de las circunferencias menores son iguales a "r" metros.

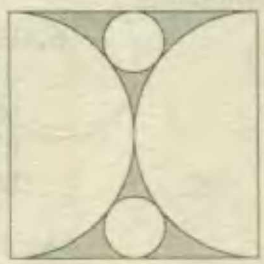
A) r^2 (64 - 20 π)

B) r^2 (64 + 18 π)

C) r^2 (64 - 18 π)

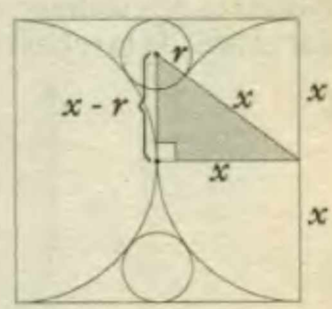
D) r^2 (18 - 64 π)

E) r^2 (65 + 15 π)



Resolución:

Al unir los centros y trazando una vertical y una horizontal formamos un ⊿ y aplicamos Pitágoras:



$$(x + r)^2 = (x - r)^2 + x^2$$

$$(x + r)^2 - (x - r)^2 = x^2$$

$$4x \cdot r = x^2$$

$$\therefore \quad x = 4r$$

Luego : $A_{R.S.} = A \square - A \text{ (dos círculos)} - A \text{ (dos semicírculos)}$

$= (2x)^2 - 2 \cdot \pi r^2 - \pi \cdot x^2$

$= 64r^2 - 2\pi r^2 - 16\pi r^2$

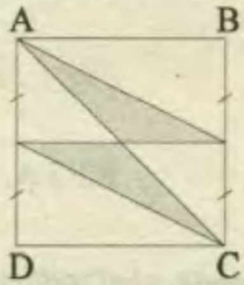
$= 64r^2 - 18\pi r^2$

$= \boxed{r^2 (64 - 18\pi)}$ RPTA. C

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- ABCD es un cuadrado de lado "a". Hallar el área de la región sombreada.



A) a^2

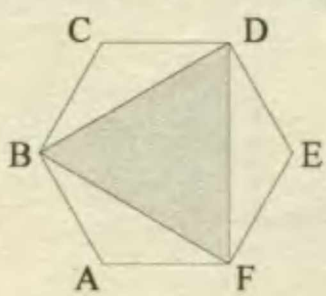
B) $a^2/2$

C) $a^2/4$

D) $a^2/8$

E) $a^2/6$

2.- ABCDEF es un exágono regular de 4 *cm* de lado. Hallar el área de la región sombreada.



A) $24\sqrt{3}$

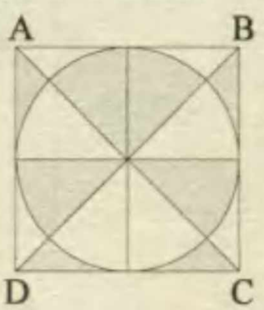
B) $20\sqrt{3}$

C) $16\sqrt{3}$

D) $14\sqrt{3}$

E) $12\sqrt{3}$

3.- Si ABCD es un cuadrado de lado igual a 2; hallar el área de la región sombreada.



A) $\pi/2$

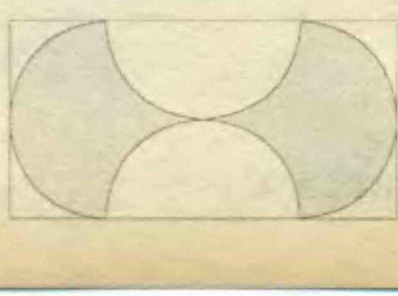
B) π

C) 2

D) $\pi/4$

E) 4

4.- Determinar el valor del área de la región sombreada si las cuatro *semicircunferencias* tienen un *radio* igual a 2.



A) 4π

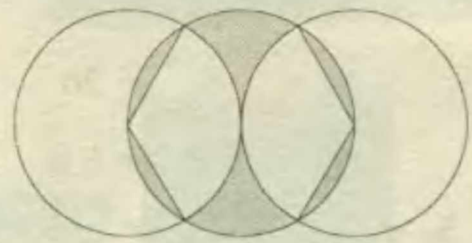
B) 8π

C) 12

D) 16

E) 32

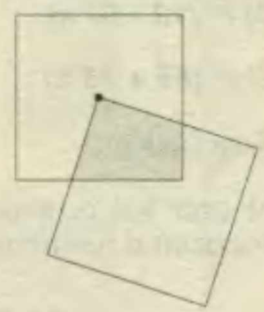
5.- ¿Qué porcentaje del área del círculo representa el área de la región sombreada?



A) $33\frac{1}{3}\%$ B) $66\frac{2}{3}\%$ C) 75%

D) 50% E) 25%

6.- En la figura adjunta, se indican dos cuadrados congruentes de 8 *cm* de lado, que se sitúan de modo que el centro de uno de ellos, es vértice del otro. ¿Cuál es el área de la región común?



A) 32

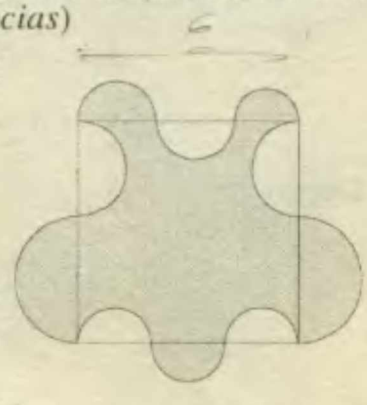
B) 24

C) 16

D) 12

E) no se puede

7.- Hallar el perímetro de la figura sombreada. Lado del cuadrado 6 *m* (las curvas son *semicircunferencias*)



A) 4π

B) 8π

C) 12π

D) 15π

E) 24π

8.- Calcular el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado de lado 4 *m*.

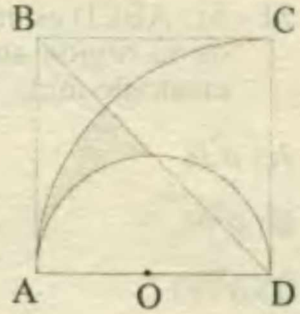
A) $(\pi - 1)\, m^2$

B) $(\pi - 2)\, m^2$

C) $2(\pi - 1)\, m^2$

D) $(\pi - 4)\, m^2$

E) $(2\pi - 1)\, m^2$

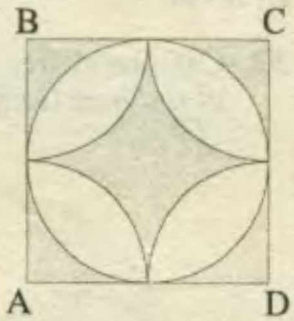


9.- Si ABCD es un cuadrado, de lado igual a 1; hallar el área de la región sombreada.

A) $\frac{\pi - 2}{2}$ D) $\frac{\pi - 4}{2}$

B) $\frac{4 - \pi}{2}$ E) N.A.

C) $\frac{2 - \pi}{2}$

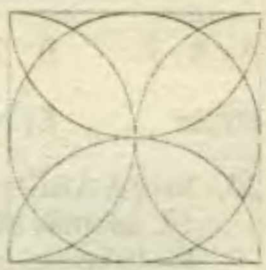


10.- El área del cuadrado es igual a 1. Hallar el área de la región sombreada.

A) $\frac{4 - \pi}{4}$ D) $\frac{2 - \pi}{2}$

B) $\frac{4 - \pi}{2}$ E) $\frac{8 - \pi}{4}$

C) $2 - \pi$

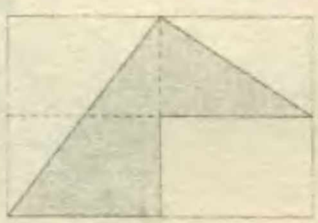


11.- ¿Qué % del área total es el área de la región sombreada?

A) 50% D) 25%

B) 40% E) 36%

C) 37,5%

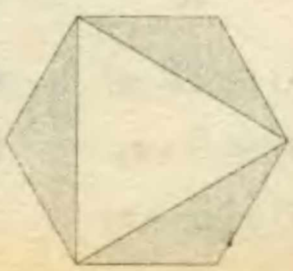


12.- ¿Qué % del área del exágono regular es el área de la región sombreada?

A) 30% D) 50%

B) 40% E) 60%

C) 25%



13.- Si : AB = BC = CD = DA; hallar el área de la región sombreada en m^2 si el radio del círculo es 4 *m*.

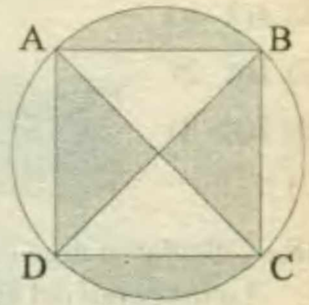
A) 8π

B) 2π

C) $(2 + \pi)$

D) $(4 + \pi)$

E) 4π

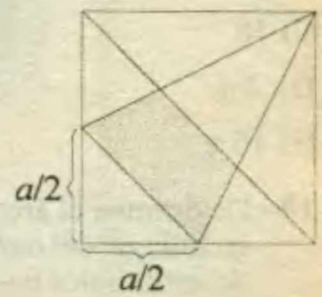


14.- En el cuadrado de lado "*a*" determine el área de la región sombreada.

A) $\frac{5}{12}\, a^2$ D) $\frac{5}{24}\, a^2$

B) $\frac{1}{6}\, a^2$ E) $\frac{3}{24}\, a^2$

C) $\frac{3}{8}\, a^2$



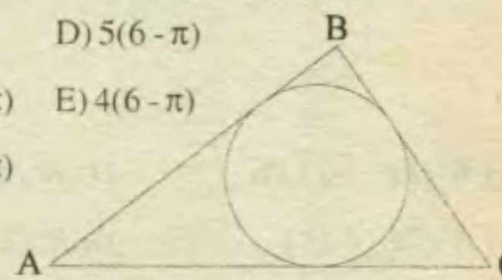
NIVEL B

15.- En el Δ ABC, AB = 8, BC = 6 y AC = 10. Hallar el área de la región sombreada.

A) $6 - \pi$ D) $5(6 - \pi)$

B) $2(6 - \pi)$ E) $4(6 - \pi)$

C) $3(6 - \pi)$



16.- En el cuadrado ABCD: PR y SQ pasan por el punto de intersección de los *diagonales*. ¿Cuál es la razón entre el área de la figura sombreada y el área del cuadrado ABCD?

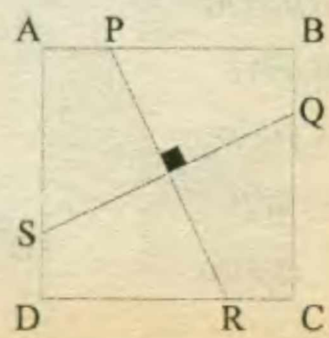
A) 1 : 2

B) 2 : 3

C) 2 : 1

D) 3 : 4

E) 4 : 5



17.- Calcular el área de la región sombreada:

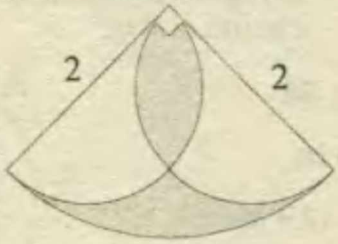
A) $4(\pi - 2)$

B) $4(3 - \pi)$

C) $2(\pi - 2)$

D) $2(\pi - 3)$

E) $\pi - 2$



18.- Calcular el área de la región sombreada. La *diagonal* del cuadrado mide $4\sqrt{2}$.

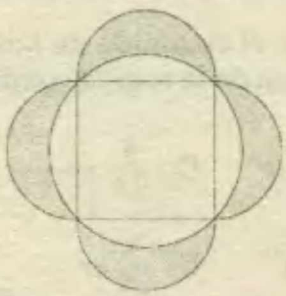
A) 8

B) 8π

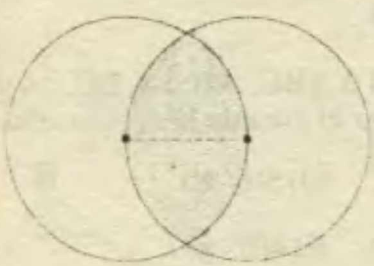
C) 16

D) 4π

E) 16π



19.- Determinar el área de la figura sombreada en función del *radio*, si las circunferencias de los círculos pasan por el centro de cada una.



A) $R^2(4\pi - 3\sqrt{3})/6$

B) $R^2(7\pi - 2\sqrt{3})$

C) $R^2(\pi - \sqrt{3})$

D) $R^2(\pi - \sqrt{3})/5$

E) $R^2(\pi + \sqrt{3})$

20.- ABCD es un cuadrado de lado "a". Hallar el área de la región sombreada:

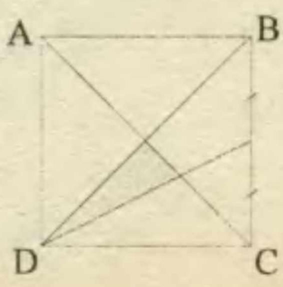
A) $9a^2/20$

B) $a^2/12$

C) $11a^2/20$

D) $3a^2/5$

E) $13a^2/20$



21.- Si : ABCD es un cuadrado; hallar el área de la región sombreada si el lado del cuadrado mide "a".

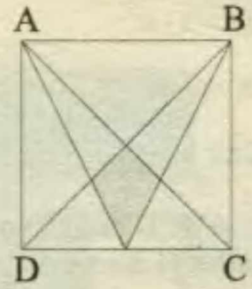
A) $a^2/8$

B) $a^2/9$

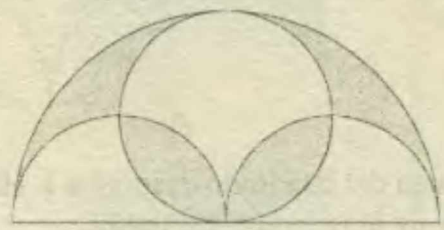
C) $a^2/10$

D) $a^2/12$

E) $a^2/24$



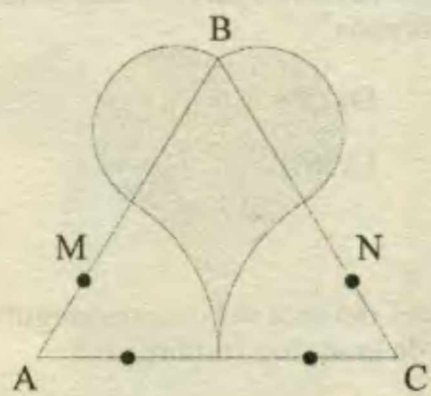
22.- Calcular el área de la región sombreada si el *radio* de la circunferencia mayor mide $\sqrt{2}$.



A) $\pi - 2$ B) $2 - \frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi - 2}{2}$

D) 2π E) N.A.

23.- Si el Δ ABC es equilátero cuyo lado mide 12, además M y N son puntos medios de los lados del triángulo: calcular el área de la región sombreada.



A) $6(2\sqrt{3} - \pi)$

B) $6(\sqrt{3} + \pi)$

C) $4(3\sqrt{3} + \pi)$

D) $8(3\sqrt{3} - \pi)$

E) $3(12\sqrt{3} - \pi)$

24.- Calcular el área de la región triangular sombreada, si el lado del cuadrado ABCD mide "a" cm.

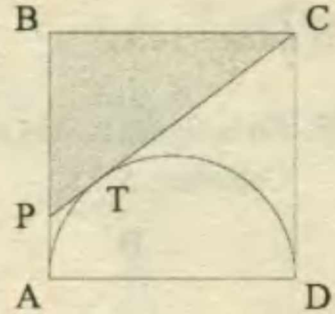
A) $a^2/4\ cm$

B) $3a^2/4\ cm$

C) $3a^2/8\ cm$

D) $2a^2/3\ cm$

E) N.A.



25.- ¿Qué parte del área total representa el área de la parte sombreada (Ax)?

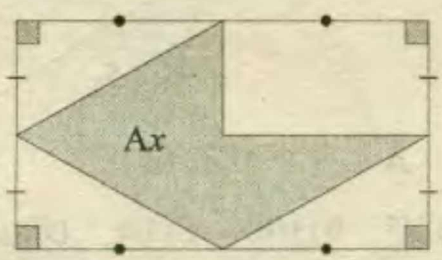
A) 2/5

B) 3/8

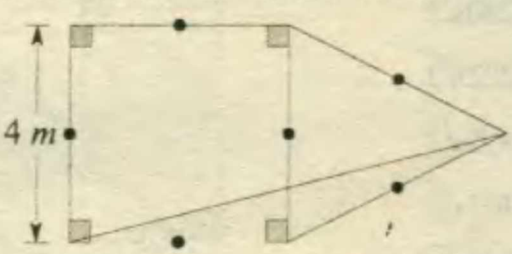
C) 8/5

D) 3/2

E) 4/5



26.- Calcular el área de la región sombreada :



A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

27.- Calcular el área de la figura sombreada; si el área del cuadrado ABCD es $12\ u^2$.

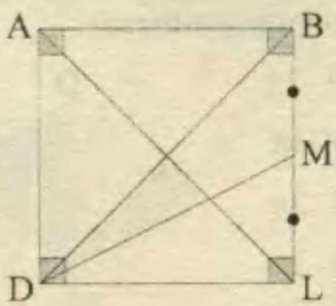
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5



28.- Calcular el área de la región sombreada si ABC y MNP son triángulos equiláteros de lado 12 cada uno y además $\overline{AB} \,//\, \overline{NP}$.

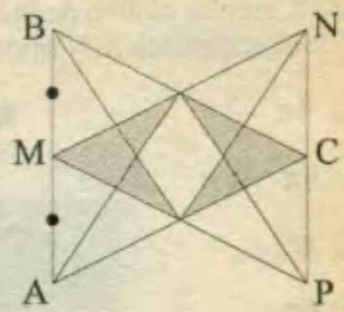
A) $5\sqrt{3}$

B) $11\sqrt{3}$

C) $8\sqrt{3}$

D) $10\sqrt{3}$

E) $12\sqrt{3}$

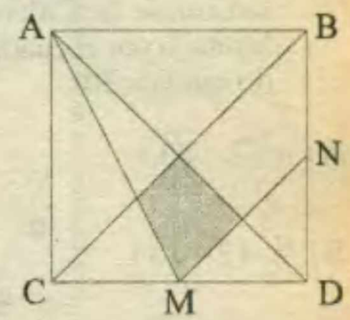


29.- Determinar el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado de lado "a". M y N son puntos medios.

A) $\frac{2}{46}\,a^2$ D) $\frac{5}{35}\,a^2$

B) $\frac{5}{41}\,a^2$ E) N.A.

C) $\frac{5}{48}\,a^2$



NIVEL C

30.- Si : ABCD es un cuadrado de lado "a"; hallar el área de la región sombreada.

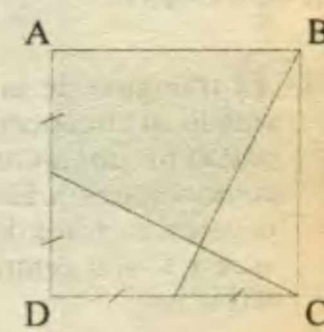
A) $a^2/3$

B) $a^2/4$

C) $a^2/12$

D) $3a^2/5$

E) $11a^2/20$



31.- En el cuadrado ABCD, de lado "a", E y F son puntos medios. Hallar el área de la región sombreada.

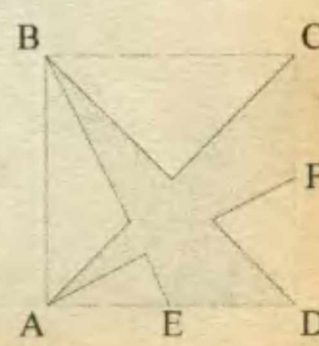
A) $7a^2/10$

B) $8a^2/15$

C) $9a^2/20$

D) $11a^2/20$

E) $7a^2/20$



32.- Calcular el área de la región sombreada, si el segmento MN mide 4.

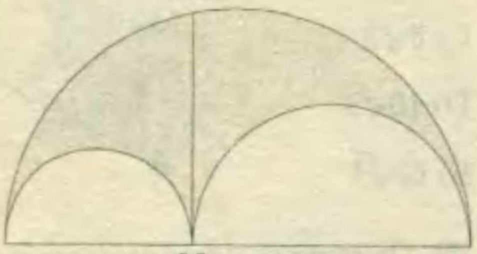
A) 4π

B) 8π

C) $\pi/2$

D) 6π

E) 3π



33.- En la figura, ABCD es un cuadrado cuyo lado mide $2a$. Calcular el área de la región limitada por el cuadrilátero PQRS, sabiendo que $\theta = 30°$.

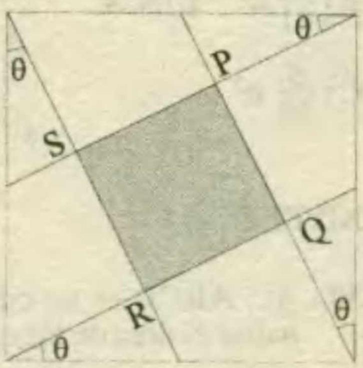
A) $a^2(2-\sqrt{3})$

B) $\frac{a^2}{2}(2-\sqrt{3})$

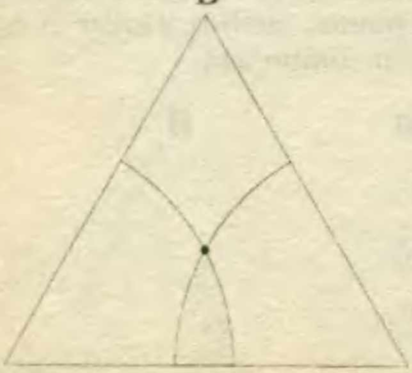
C) $6a^2(2-\sqrt{3})$

D) $a^2(3-\sqrt{3})$

E) $\frac{a^2}{2}(3-\sqrt{3})$



34.- El triángulo de la figura es equilátero, siendo su circuncentro el punto donde se cortan los dos arcos de circunferencia tal como se muestra. El lado del triángulo mide 6; calcular el área de la región sombreada, si A y C son centros de las semicircunferencias.

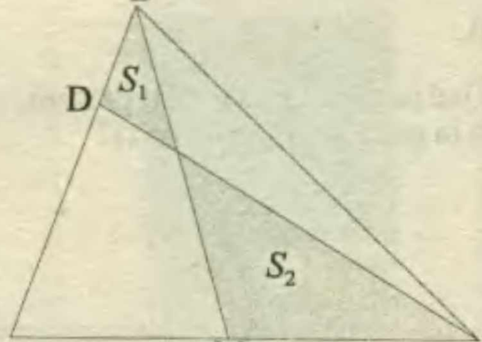


A) $3\pi - 2\sqrt{3}$ D) $5\pi - \sqrt{3}$

B) $2\pi - 3\sqrt{3}$ E) N.A.

C) $\frac{1}{2}(2\pi + 3\sqrt{3})$

35.- En la figura : AM = MC y AD = 4DB.
Calcular : S_1 / S_2.



A) 1/5 B) 1/10 C) 1/4 D) 1/6 E) N.A.

36.- Calcular el área de la región sombreada.

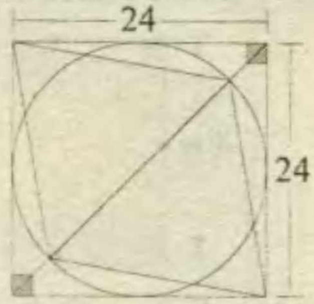
A) $250\sqrt{2}$

B) $222\sqrt{2}$

C) $458\sqrt{2}$

D) $403\sqrt{2}$

E) $288\sqrt{2}$



37.- En la figura : $\overline{DA}$, $\overline{DC}$, $\overline{CB}$, es tangente la semicircunferencia de centro "O" ; si DA = 4*cm* y CB = 1*cm* ; hallar el área de la región sombreada.

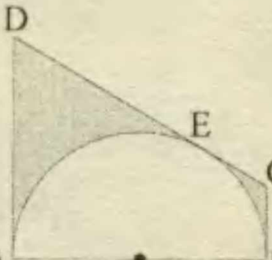
A) $10 - 2\pi$

B) $15 - 4\pi$

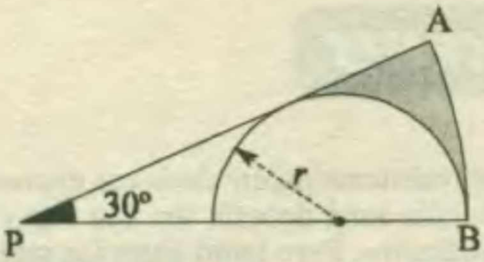
C) $20 - 2\pi$

D) $13 - 2\pi$

E) $11 - 3\pi$



38.- Calcular el área de la región sombreada :
AP = PB y $r = 2\sqrt{3}\,u$.



A) 0,50 B) 0,48 C) 0,55 D) 0,30 E) N.A.

39.- Calcular el área de la región sombreada, si se sabe que $AB = 2\sqrt{3}$ y "O" es centro del semicírculo.

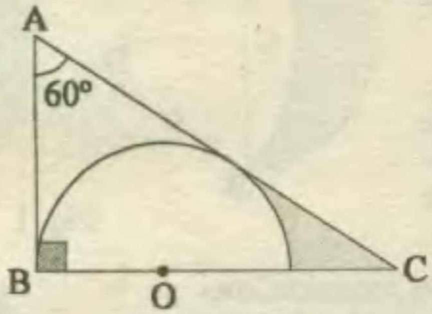
A) 3π

B) $3\pi/4$

C) $\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{3}$

D) $2\sqrt{3}$

E) $4\sqrt{3} - \pi$



40.- En la figura hallar el área de la región sombreada si el área del paralelogramo es igual a 160.

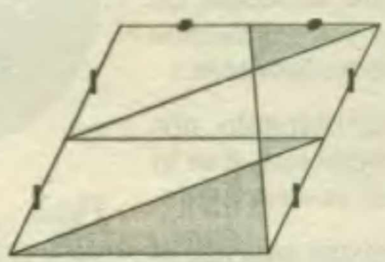
A) 25

B) 35

C) 40

D) 59

E) 42



41.- Calcular el área de la región sombreada si el lado del cuadrado ABCD mide 8 u.

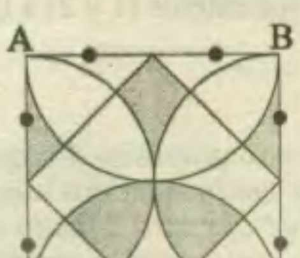
A) 12

B) 15

C) 16

D) 18

E) 11



42.- Si el área del triángulo ABC es 360 u^2; hallar S.

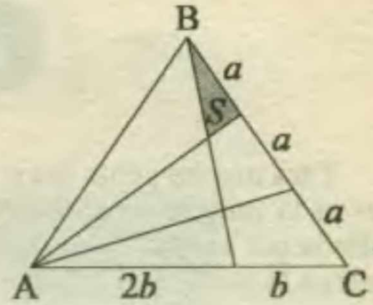
A) 125/3

B) 121/9

C) 120/7

D) 124/9

E) 49/13



43.- ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 12$cm.$; si los vértices C y B se han tomado como centros de circunferencias para el trazado de $\widehat{AC}$ y $\widehat{BD}$ y $\overline{AD}$ es diámetro de una semicircunferencia. Calcular el área del círculo sombreado.

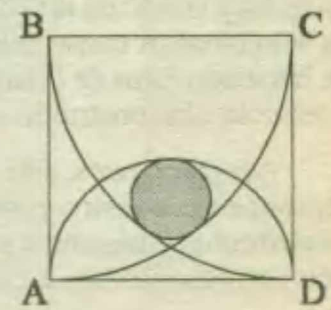
A) 3π

B) 4π

C) 5π

D) 6π

E) 8π



44.- El triángulo mostrado es equilátero; si el radio del círculo mayor mide 12cm, hallar el área de la región sombreada.

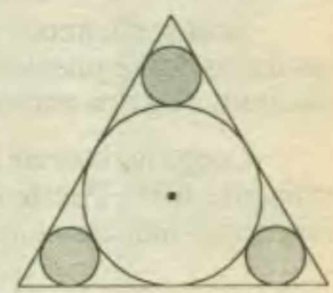
A) 50π

B) 48π

C) 44π

D) 35π

E) 40π



45.- Hallar el área de la región sombreada.

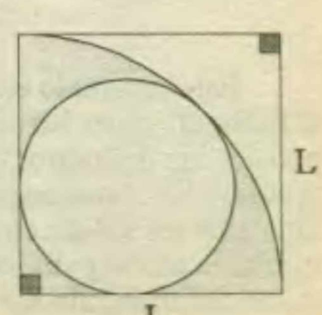
A) $0{,}25L^2$

B) $0{,}28L^2$

C) $0{,}75L^2$

D) $0{,}50L^2$

E) $0{,}9L^2$



LA LUNULA DE HIPOCRATES

Para mucha gente decir media luna no supone lo que realmente quiere decir esa expresión, pues si la luna llena se nos presenta como un círculo, media luna debería ser una superficie limitada por media circunferencia y su correspondiente diámetro. Pero tanto entre los pintores como en la imaginación de mucha gente, la llamada lúnula de Hipócrates (porque fue el primero, que sepamos, que la estudió) es la representación de la media luna.

Vamos a meditar un rato sobre esta lúnula. Vamos a ver si podemos convertir su superficie en otra equivalente, pero formada por líneas rectas, más aún, por una figura de ángulos rectos, como es la cruz que presentamos en la Fig.1.

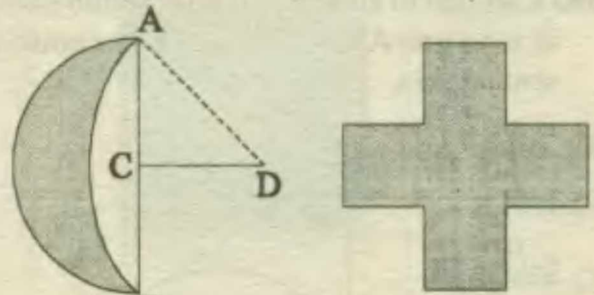


Fig. 1

Ante todo, ampliemos el teorema de Pitágoras. No es muy conocida la casi evidente propiedad de que los semicírculos construidos sobre los catetos (es decir, haciendo éstos de diámetros) sumen lo mismo que el semicírculo construido sobre la hipotenusa.

Aceptado pues, este principio no excesivamente conocido, centrémonos en nuestro problema. Supongamos construidos los tres semicírculos y hagamos girar alrededor de la hipotenusa el semicírculo correspondiente a ésta. Entonces tendremos la Fig. 2.

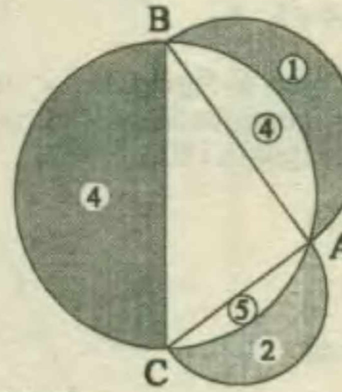


Fig.2

Supuesto el triángulo rectángulo ABC, el semicírculo punteado es el correspondiente a la hipotenusa, que girado alrededor de ésta, determina en los semicírculos de los catetos los segmentos circulares 4 y 5 señalados en blanco. Estudiemos ahora las áreas :

Si al semicírculo girado le restamos el área del triángulo, nos queda los dos segmentos 4 y 5. El mismo resultado obtenemos si se lo restamos a los dos semicírculos de los catetos, como se ve en la figura.

Luego las lunetas 1 y 2 suman en conjunto la misma área que el triángulo ABC. Puesto en forma algébrica, llamando T al área del triángulo y designando por su respectivo número el área de cada espacio de la figura, tendremos las siguientes igualdades :

$$3 - T = 5 + 4 \ , \text{ porque: } \ 5 + 4 + T = 3$$

Pero 5 + 4 es el resultado de restar las lúnulas de los catetos (1 y 2) a los dos semicírculos pequeños, luego :

$$T = 1 + 2$$

Este resultado es sumamente importante para nuestro propósito. Porque si se observa que el triángulo no es isósceles, aparece clara la razón de que también las dos lunetas sean diferentes, porque sus diámetros (los catetos) también lo son. *¿Qué ocurrirá cuando ambos catetos sean iguales?* En el razonamiento anterior no hemos atendido a este extremo, de modo que el resultado tiene que ser válido en cualquier caso. Pero siendo ambos catetos iguales, o sea tratándose de un triángulo rectángulo isósceles, ambas lunas son iguales, luego cada una será de un área igual a la mitad del triángulo sobre el que se apoyan.

23 Tiempos de Trabajo

En estos problemas, una o más personas, grupos, máquinas u otras cosas que pueden realizar un trabajo, demoran un cierto tiempo en terminarlo, y las cuestiones o interrogantes se refieren a la forma en que este tiempo puede determinarse a partir de cierta información.

La metodología a emplearse requiere el dominio de las fracciones, el planteo de ecuaciones y un poco de habilidad para efectuar operaciones algebraicas, cuando sea necesario.

I) RELACIONES BASICAS

La 1ª relación se basa en considerar un trabajo terminado como la unidad y una parte de él como una fracción. Así:

Si un trabajo puede terminarse en *n días*, en un *día* puede hacerse $\frac{1}{n}$ del trabajo.

Al hacerse esta afirmación se supone que el trabajo se realiza a un ritmo constante.

Ejemplo 1:

Una tubería puede llenar una piscina en cuatro *días*. ¿Cuánto logra llenar en un *día*?

Resolución:

Utilizando $n = 4$ en la relación, tendremos que:

$$\text{Fracción que llena en un } día = \frac{1}{4} \text{ de la piscina.}$$

La 2ª relación trata sobre la realización de un trabajo cuando intervienen dos ó más elementos:

El trabajo total realizado es igual a la suma de las fracciones del trabajo hechas por cada trabajador.

Ejemplo 2:

Si un trabajador A hace 1/3 de un trabajo diariamente, y un trabajador B hace 1/4 del trabajo en el mismo tiempo, halle el trabajo que hacen entre los dos durante un *día*.

Resolución:

De acuerdo a la 2da relación:

$$\text{Trabajo realizado por los dos} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

PROBLEMA TIPICO DE TRABAJO

Martínez pinta una pared en seis *días* y García puede pintar la misma pared en 3 *días*. ¿En cuánto tiempo pintarán entre los dos dicha pared?

Resolución:

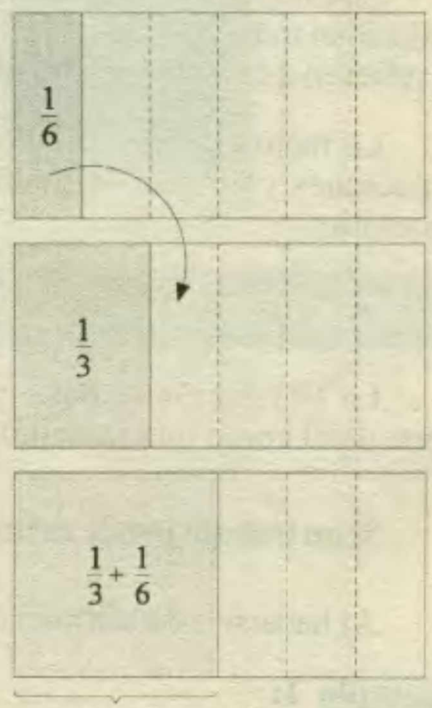
Según la 1ra relación, Martínez en un *día* puede pintar $\frac{1}{6}$ de pared y García $\frac{1}{3}$ de pared.

Ahora, de acuerdo con la 2da relación, entre los dos en 1 *día* podrán pintar:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2}$$

Si en 1 *día* se puede pintar $\frac{1}{2}$ de la pared, toda la pared se puede pintar en 2 *días*.

$\therefore$ **Rpta : 2 *días***



Método directo : Consiste en resolver la ecuación:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$$

donde a es el tiempo que demora Martínez, b el tiempo que demora García y x el tiempo que demoran entre los dos:

Al resolver (sin reemplazar a y b), se obtiene: $$x = \frac{ab}{a+b}$$

que es un resultado útil y conviene recordarlo.

Dando valores: $a = 6$; $b = 3$, tendremos :

$$x = \frac{6 \cdot 3}{6+3} = \frac{18}{9} = 2$$ $\therefore$ **Rpta : 2 *días***

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Trabajando solo, Beto puede hacer un trabajo en 4 horas. Con la ayuda de Pepe bastarían $2\frac{2}{9}$ horas. ¿Cuánto demoraría Pepe trabajando solo?

A) 4,5 h *B) 5 h* *C) 6 h* *D) 3 h* *E) 7,2 h*

Resolución:

Trabajando solos -cada uno por separado- Beto y Pepe demoran 4 *h* y "x" *horas* respectivamente; mientras que trabajando juntos demoran $2\frac{2}{9}$, entonces se debe cumplir:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2\frac{2}{9}}$$

Es decir : $$\frac{1}{x}=\frac{9}{20}-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{4}{20} \qquad \therefore \quad x=5$$

Por lo tanto, Pepe demoraría 5 *horas* trabajando solo. **RPTA. B**

2.- A hace un trabajo en 3 días, B hace el mismo trabajo en 5 días y C lo puede hacer en un tiempo igual al promedio de los otros dos. ¿En cuánto tiempo hacen el mismo trabajo los 3 juntos?

A) $2\frac{1}{5}$ días *B) $2\frac{1}{2}$ días* *C) 2 días* *D) $1\frac{13}{47}$ días* *E) $1\frac{12}{35}$ días* ***PUCP 92 - I***

Resolución:

A demora 3 *días*; B demora 5 *días* y C demora el promedio de 3 y 5.
Consideramos que el promedio aludido es la media aritmética, entonces C demora: $(3+5)\div 2=4$ *horas*.

En cada *hora* hacen $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{4}$ respectivamente, luego lo que hacen juntos en una *hora* es:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{20+12+15}{60}=\frac{47}{60}$$

Si en 1 *día* hacen $\frac{47}{60}$ del trabajo, entonces demoran $\frac{1}{47/60}=\frac{60}{47}$ *días*

ó $1\frac{13}{47}$ *días* **RPTA. D**

3.- Juan puede hacer un trabajo en 9 días. Si Carlos es 50% más eficiente que Juan. ¿En cuántos días haría Carlos el mismo trabajo?

A) $13\frac{1}{2}$ *B) $4\frac{1}{2}$* *C) 6* *D) 7* *E) $6\frac{1}{2}$* ***UNMSM - 93***

Resolución:

Si Juan hace un trabajo en 9 *días*, entonces cuando trabaje al 50% de su capacidad, demoraría el doble de tiempo, es decir: 18 *días*.

Esto significa que, el tiempo de Carlos equivale al tiempo combinado de dos personas, que demoran respectivamente 9 y 18 *días*. Si este tiempo es x, planteamos: $\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{x}$

Resolviendo: $\frac{2+1}{18} = \frac{1}{x} \Rightarrow$ $x = 6$

Según este resultado, Carlos demoraría 6 *días*. **RPTA. C**

4.- Un caño puede llenar un tanque en 12 horas. Tres horas después de abrir este caño, se abre otro caño suplementario más pequeño que si actuara solo, llenaría el tanque en 24 horas. ¿Cuánto tiempo demorará en llenarse el tanque a partir del momento en que se abre el caño más grande?

A) 15 h *B) 12 h* *C) 9 h* *D) 10 h* *E) 18 h*

Resolución:

En cada *hora*, el primer caño llena $\frac{1}{12}$ del tanque y el segundo $\frac{1}{24}$.

Durante las 3 primeras *horas* actúa solo el primero y luego durante n *horas* adicionales los dos juntos. Entonces:

3 *horas* del primero + n *horas* de los 2 juntos → Tanque lleno

$$3 \cdot \frac{1}{12} + n \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right) = 1$$

Resolviendo : $\frac{1}{4} + n \cdot \left(\frac{2+1}{24}\right) = 1$

$$\Rightarrow \quad n \cdot \frac{3}{24} = \frac{3}{4} \quad \therefore \quad n = 6$$

Como n son las *horas* adicionales, el tiempo total será: $n + 3 =$ 9 *h* **RPTA. C**

5.- Un tanque de petróleo se llena en 4 horas abriendo la válvula A y se descarga en 5 horas operando la válvula B. ¿En cuánto tiempo se llenaría si el operador comete el error de dejar abierta la válvula B?

A) $\frac{19}{20}$ *h* *B)* $\frac{1}{20}$ *h* *C) 9 h* *D) 19 h* *E) 20 h* *UNFV - 82*

Resolución:

En cada *hora*, A llena $\frac{1}{4}$ y como B es de desagüe, él descarga $\frac{1}{5}$.

Cuando ambas válvulas actúan simultáneamente, en cada *hora* la fracción neta que se llena es:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5-4}{20} = \frac{1}{20} \text{ del tanque}$$

Esto significa que todo el tanque se llena en **20 *horas*** RPTA. E

Nota: Cuando participen desagües o conductos de salida, consideraremos con signo negativo la fracción de trabajo que les corresponda.

6.- A y B pueden hacer un trabajo en 2 días; B y C en 4 días y A y C en $2\frac{2}{5}$ días. Entonces el número de días que A necesita para hacer el trabajo es:

A) 1 *B) 3* *C) 6* *D) 12* *E) 2,8*

Resolución:

Llamaremos *a*, *b* y *c* al número de *días* empleados por A, B y C respectivamente para hacer el trabajo cada uno por separado. Entonces $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ y $\frac{1}{c}$ son las fracciones de trabajo que cada uno puede hacer en 1 *día*.

Como A y B emplean dos *días* para hacer todo el trabajo, en un *día*, entre los dos harán $\frac{1}{2}$ de todo el trabajo, es decir se cumplirá:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$$

Y razonando del mismo modo, se deberá cumplir que:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4} \quad ; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2\,^2\!/_5} = \frac{5}{12}$$

Sumando todas las ecuaciones tendremos:

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{6+3+5}{12} = \frac{14}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a} + \overbrace{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{7}{12} \;;\; \text{ó} \;;\; \frac{1}{a} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Despejando *a*, se obtiene: $a = 3$

A trabajando solo, demoraría **3 *días*** RPTA. B

7.- A puede hacer un trabajo en 10 días; B puede hacerlo en 5 días y C en 2 días. El primer día A trabajó solo; el segundo día se le unió B y el tercer día trabajaron los 3. ¿Cuántos días se demoraron en terminar el trabajo?

A) $2\frac{1}{2}$ *B) 3* *C) $2\frac{1}{4}$* *D) $2\frac{3}{4}$* *E) N.A.* *UNALM 92 - II*

Resolución:

Debemos entender que luego del segundo *día* trabajaron los tres juntos, entonces llamaremos x al número de *días* después del ingreso del tercero:

El 1er *día*, A realiza $\frac{1}{10}$

El 2do *día*, A y B realizan $\frac{1}{10} + \frac{1}{5}$

Luego, A, B y C realizan $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right) . x$

La suma total debe ser igual al trabajo completo, que se representa por la unidad (1).

$$\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right) . x = 1$$

Resolviendo, se obtiene $x = 3/4$, lo cual significa que sólo se utiliza 3/4 del tercer *día* y el tiempo total es : $2\frac{3}{4}$ **RPTA. D**

8.- *Dos bombas A y B llenan un tanque en 6 horas. Si la bomba A fuese de desagüe se tardarían 18 horas en llenarlo. Si el tanque tiene un grifo de desagüe que puede vaciarlo en 54 horas. ¿En qué tiempo llenará la bomba A el tanque si la bomba B actúa como de desagüe y se abre además el grifo de desagüe del tanque?*

A) 27 h B) 36 h C) 81 h D) 192 h E) Nunca UNALM 93 - I

Resolución:

Sean *a horas* y *b horas* los tiempos que demoran A y B respectivamente en llenar el tanque por separado. Según la información dada, se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6} \quad ; \quad -\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{18}$$

De estas dos ecuaciones se obtiene: $\frac{1}{a} = \frac{1}{9}$; $\frac{1}{b} = \frac{2}{9}$

Lo cual indica que si B fuese de desagüe, la bomba A llenaría menos de lo que sale por B, es decir nunca se podría llenar el tanque.

RPTA. E

9.- *20 obreros son contratados para realizar un trabajo de 15 días trabajando 8 horas diarias. Después de 5 días de labor enferman 9 obreros y 10 días después de iniciado el trabajo se CONMINA al contratista para que entregue el trabajo en la fecha que se ha fijado previamente. ¿Cuántos obreros adicionales tendrá que tomar para cumplir tal exigencia?*

A) 16 B) 18 C) 20 D) 29 E) N.A. UNFV - 80

Resolución:

Durante los 5 primeros *días* avanzan $\frac{1}{3}$ de la obra.

En los 5 *días* siguientes, los 11 obreros restantes harán $\frac{11}{20}$ de lo que hicieron en los 5 primeros *días*, es decir : $\frac{11}{20} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{60}$

En 10 *días* el avance es de: $\frac{1}{3} + \frac{11}{60} = \frac{31}{60}$ de la obra.

De esto último deducimos que faltan $\frac{29}{60}$ de la obra y 5 *días*; además cada obrero avanza $\frac{1}{60}$ en los 5 *días*, esto significa que hacen falta

29 - 11 = **18 obreros** RPTA. B

10.- Un granjero puede trabajar un cierto terreno con una rapidez tres veces mayor que la de su hijo. Trabajando juntos, invierten 6 horas en realizar la labor. ¿Cuánto demoraría el hijo trabajando solo?

A) 12 h *B) 24 h* *C) 16 h* *D) 18 h* *E) N.A.*

Resolución:

Como el tiempo es inversamente proporcional a la rapidez, demorarán: el padre x *horas* y el hijo $3x$ *horas*.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{4}{3x} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad 3x = 24$$

El tiempo que demora el hijo es: **24 *horas*** RPTA. B

11.- La rapidez con que trabaja A es tres veces mayor que la de B. Los operarios A y B empiezan a trabajar juntos durante 4 horas, al cabo de los cuales A se retira y continúa solo B, que termina el trabajo en 2 horas. Hallar el tiempo que tardará B en realizar todo el trabajo si actuara él solo.

A) 22 h *B) 15 h* *C) 12 h* *D) 18 h* *E) 9 h*

Resolución:

Sean t y $3t$ los tiempos que tardarían A y B respectivamente, trabajando solos; entonces según los datos se tendrá :

4 *horas* de A y B + 2 *horas* de B = trabajo completo

$$4\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{3t}\right) + 2 \cdot \frac{1}{3t} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 4 \cdot \left(\frac{3+1}{3t}\right) + \frac{2}{3t} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 18 = 3t \quad \Rightarrow \quad t = 6$$

B solo, demorará $3t =$ **18 *horas*** **RPTA. D**

12.- El obrero B tarda 6 horas más que el A en efectuar un trabajo. Hallar cuánto tiempo tardarían en realizarlo cada uno de ellos sabiendo que juntos, invierten 4 h en terminarlo.

A) 4 h y 10 h ***B) 6 h y 12 h*** ***C) 8 h y 14 h*** ***D) 12 h y 18 h*** ***E) N.A.***

Resolución:

Según los datos se sabe que :

Tiempo que demora A : x *horas*

Tiempo que demora B : $(x + 6)$ *horas*

Entre los dos demoran : 4 *horas*

Entonces se plantea la ecuación : $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$

Efectuando y transponiendo términos : $x^2 - 2x - 24 = 0$

Factorizando : $(x - 6)(x + 4) = 0$

Igualando a cero cada factor : $x = 6 \quad ; \quad x = -4$

$\therefore$ A demora **6 *h*** y B demora **12 *h*** **RPTA. B**

13.- Un caño llena un recipiente en x horas y un desagüe lo vacía en la mitad del tiempo. Si el recipiente estuviera lleno en su tercera parte y se abriera al mismo tiempo caño y desagüe. ¿En cuánto tiempo quedará vacío el recipiente?

A) 1 h 30 min ***B) $\frac{x}{3}$ h*** ***C) $\frac{2x}{3}$ h*** ***D) $\frac{3x}{2}$ h*** ***E) 1 h***

Resolución:

El caño demora x horas; el desagüe demora : $\frac{x}{2}$ *horas*. Esto significa que en cada *hora*, actuando juntos se desagua : $\frac{1}{x/2} - \frac{1}{x}$

Llamemos n al número de *horas* que demorarán en evacuar la tercera parte, entonces deberá verificarse que :

$$n\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{x}{3}$$

RPTA. B

14.- Dos operarios A y B se comprometieron a realizar un trabajo en 40 horas. Al empezar la novena hora de trabajo se retira A y B lo continúa, terminándolo en 12 horas más de lo estipulado en el compromiso. Si en lugar de B, A lo hubiese continuado solo. ¿Cuántas horas adicionales a lo estipulado habría empleado?

A) 85 h 20 min *B) 117 h 20 min* *C) 117 h 40 min*

D) 117 h 15 min *E) 85 h 40 min*

Resolución:

Supongamos que el tiempo que demora A es *a horas*, y , B es *b horas*. Luego por condición del problema debe cumplirse que :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{40} \quad ...(1)$$

Además : $$8\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) + (40 + 12 - 8) \cdot \frac{1}{b} = 1 \quad ...(2)$$

Resolviendo (1) y (2) : $a = \frac{440}{3}$; $b = 55$

Luego de las 8 horas de trabajar A y B juntos, A continúa solo y emplea n horas en culminar el trabajo, luego deberá cumplirse que :

$$8 \cdot \frac{1}{40} + (40 - 8 + n) \cdot \frac{1}{440/3} = 1$$

Resolviendo : $n = 85\ h\ 20\ min$ RPTA. A

15.- Dos obreros emplean 25 horas, si trabajan separadamente cada uno para hacer la mitad de una obra, pero si trabajan juntos, no emplean más que 12 horas en hacerla completamente. ¿Cuánto demora el más rápido en hacer él solo el trabajo?

A) 30 *B) 24* *C) 20* *D) 40* *E) 18*

Resolución:

Sean x e y los tiempos que demoran por separado en hacer la mitad de la obra. Entonces para la obra completa se demoran $2x$ y $2y$. Entonces se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$x + y = 25 \ ; \ \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{12}$$

Resolviendo, se obtiene : $x = 15$; $y = 10$

El más rápido demorará : $2 \cdot 10 =$ **20 *horas*** en hacer él solo el trabajo. RPTA. C

16.- Tres máquinas P, Q y R, trabajando juntas, pueden hacer un trabajo en x horas. Al trabajar sola, P necesita 6 horas adicionales para hacer el trabajo; Q una hora adicional y R, x horas adicionales. El valor de x es:

A) $\frac{2}{3}$ *B)* $\frac{11}{12}$ *C)* $\frac{3}{2}$ *D) 2* *E) 3*

<u>Resolución</u>:

Los tiempos que demoran P, Q y R por separado son :

$(x + 6)$; $(x + 1)$, y , $2x$ respectivamente. Asimismo el tiempo cuando trabajan juntos es x ; entonces deberá cumplirse que :

$$\frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x}$$

Efectuando : $3x^2 + 7x - 6 = 0$

De aquí la solución positiva es : $x = \frac{2}{3}$ RPTA. A

17.- A demora en hacer un trabajo m veces el tiempo que demoran B y C juntos; B demora n veces el tiempo que C y A juntos y C demora x veces el tiempo que demoran A y B juntos. Luego, x en función de m y n es :

A) $\frac{2mn}{m+n}$ *B)* $\frac{1}{2(m+n)}$ *C)* $\frac{1}{m+n-mn}$ *D)* $\frac{1-mn}{m+n+2mn}$ *E)* $\frac{m+n+2}{mn-1}$

<u>Resolución</u>:

Si los tiempos que demoran A, B y C son : a, b, c ; entonces de acuerdo con los datos se debe plantear que :

(1) $\frac{1}{a} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$; (2) $\frac{1}{b} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$; (3) $\frac{1}{c} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Al resolver, se obtiene : $x = \frac{m+n+2}{mn-1}$ RPTA. E

18.- Una cisterna puede llenarse por dos tuberías en $33\frac{1}{3}$ minutos. Si la tubería más grande tarda 15 minutos menos que la pequeña en llenar la cisterna; ¿Hállese en qué tiempo se llenará por la más pequeña?

A) 75 min *B) 72 min* *C) 60 min* *D) 90 min* *E) 45 min*

<u>Resolución</u>:

Cuando trabajan juntas, llenarán : $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-15} = \frac{1}{33\frac{1}{3}}$

Efectuando : $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-15} = \frac{3}{100}$

La ecuación se transforma en : $3x^2 - 245x + 1\,500 = 0$

De aquí la única solución admisible es : $x = 75$ RPTA. A

19.- Dos tuberías tardan 6 h en llenar una piscina. Una sola la llenaría en 5 horas menos que la otra sola. ¿Cuánto tardará la de mayor caudal en llenar la piscina?

A) 20 h ***B) 10 h*** ***C) 15 h*** ***D) 12 h*** ***E) 24 h***

Resolución:

Sean x y $(x - 5)$ los tiempos que demoran por separado, luego por condición del problema se debe cumplir que :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{6}$$

Efectuando : $x^2 - 17x + 30 = 0$

Factorizando : $(x - 15)(x - 2) = 0$

La solución admisible es: $x = 15$

La de mayor caudal demora : $x - 5 =$ **10 *horas*** RPTA. B

20.- Dos fábricas A y B, se comprometen a entregar un pedido en 12 días. Después de dos días la fábrica A cierra para efectuar unas reparaciones, mientras que la fábrica B sigue funcionando normalmente. Sabiendo que B tiene un rendimiento del $66\frac{2}{3}$% de A, determinar en cuantos días se completará el pedido.

A) 36 ***B) 30*** ***C) 24*** ***D) 18*** ***E) 27***

Resolución:

Transformando el rendimiento porcentual a fracción, tendremos :

$$66\frac{2}{3}\% = \frac{66\frac{2}{3}}{100} = \frac{2}{3}$$

En cuanto a tiempos, este resultado se interpreta asi : A demora $2x$, y , B demora $3x$; luego debe cumplirse que :

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{12}$$

Resolviendo : $\frac{5}{6x} = \frac{1}{12} \Rightarrow x = 10$

En cada *día* A hace: $\frac{1}{20}$ y B hace: $\frac{1}{30}$. Luego, al cabo de 2 días de trabajar juntos, B emplea n días en culminar el pedido, debiendo verificarse que :

$$2 \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right) + n \cdot \frac{1}{30} = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 25$$

El pedido se entrega a los : $n + 2 = 25 + 2 =$ ***27 días*** RPTA. E

21.- Se ha calculado que 750 metros de una zanja pueden ser excavadas en 10 días. Si 7 obreros hicieron 350 metros y posteriormente con 5 ayudantes concluyen la obra en el plazo fijado; los días trabajados por los ayudantes son :

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) N.A. UNFV - 87

<u>Resolución</u>:

De los 10 *días*, durante *x días* participaron 7 obreros y los (10 - *x*) *días* restantes participaron : 7 + 5 = 12 obreros.

De los datos se puede establecer que :

7 obreros ... 350 *metros* ... *x días*

12 obreros ... 400 *metros* ... (10 - *x*) *días*

De la 1ra. línea, deducimos que 1 obrero en 1 *día* hace : $\frac{350}{7.x}$ *metros*

De la 2da. línea, cada obrero en 1 *día* hace : $\frac{400}{12\,(10-x)}$ *metros*

Estas expresiones deben ser iguales : $\frac{350}{7.x} = \frac{400}{12\,(10-x)}$

Resolviendo : $x = 6$; esto indica que los ayudantes trabajaron :

$10 - x =$ **4 *días*** RPTA. A

22.- Una cuadrilla de 35 obreros pueden terminar una obra en 27 días. Si al cabo de 6 días de trabajo se les incorpora un cierto número de obreros de otra cuadrilla de modo que en 15 días más se termina la obra. ¿Cuál es el número de obreros de la segunda cuadrilla que se incorporó a la obra?

A) 10 B) 14 C) 12 D) 13 E) 16 UNFV - 88

<u>Resolución</u>:

Un obrero en 1 *día* puede hacer : $\frac{1}{35 \cdot 27}$ de la obra.

Durante 6 *días* trabajaron 35 obreros y durante 15 *días* trabajaron (35 + *n*) obreros, siendo *n* el número de obreros de la segunda cuadrilla.

Entonces podemos plantear :

$$6 \cdot 35 \cdot \frac{1}{35 \cdot 27} + 15 \cdot (35 + n) \cdot \frac{1}{35 \cdot 27} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 6 \cdot 35 + 15\,(35 + n) = 35 \cdot 27$$

$$\Rightarrow \quad 15\,(35 + n) = 735$$

$\therefore \quad n = 14$ RPTA. B

23.- Un capataz contrata una obra que debe terminar en 30 días. Al iniciar la obra con 10 obreros trabajando 6 horas diarias, transcurridos 20 días han realizadò el 50% de la obra. ¿Cuántos obreros adicionales se requieren si decide aumentar la jornada a 8 horas diarias para terminar en el plazo señalado?

A) 10 B) 15 C) 5 D) 8 E) 20 PUCP 92 - II

Resolución:

Con 10 obreros, trabajando 6 *horas* diarias, en 20 *días*, se realiza el 50% de la obra, entonces el otro 50% se hará con $(10 + n)$ obreros, trabajando 8 *horas* diarias y en 10 *días*.

Igualando lo que hace en cada caso un obrero en 1 *hora* diaria, se tendrá:

$$\frac{50\%}{10 \cdot 6 \cdot 20} = \frac{50\%}{(10+n) \cdot 8 \cdot 10}$$

Resolviendo : $n = 5$ **RPTA. C**

24.- 3 hombres y 11 muchachos hacen un trabajo en 12 días. Dos hombres y 2 muchachos hacen el mismo trabajo en 36 días. ¿En cuántos días hace el mismo trabajo un solo muchacho?

A) 96 B) 102 C) 192 D) 144 E) 196 PUCP 92 - I

Resolución:

Asumiremos que un solo muchacho puede hacer todo el trabajo en x *días*, mientras que un solo hombre lo hace en y *días*.

Entonces planteamos: $3 \cdot \frac{1}{y} + 11 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$ .....(1)

$2 \cdot \frac{1}{y} + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{36}$ .....(2)

Resolviendo : $x = 192$ *días* **RPTA. C**

25.- Un caño llena la p-ésima parte de un tanque en "n" horas; un desagüe desocupa la q-ésima parte del mismo tanque en "m" horas. ¿Cuánto se demorará en llenar el tanque, si se abren ambos dispositivos en forma simultánea?

A) $\frac{mnpq}{mq+np}$ *B)* $\frac{mnpq}{mq-np}$ *C)* $\frac{mnpq}{np-mq}$ *D)* $\frac{np-mq}{mnpq}$ *E)* $\frac{mq-np}{mnpq}$

Resolución:

El caño en n *horas* llena : $\frac{1}{p}$; en 1 h llenará : $\frac{1}{np}$

El desagüe en m *horas* vacía $\frac{1}{q}$; en 1 h vacía : $\frac{1}{mq}$

Si el tanque se llena en *x horas*, con el caño y el desagüe operando simultáneamente, se deberá cumplir que :

$$\frac{1}{np} - \frac{1}{mq} = \frac{1}{x}$$

Resolviendo : $x = \dfrac{mnpq}{mq - np}$ **RPTA. B**

26.- A es el doble de eficiente que B, si juntos pueden hacer un trabajo en 12 días. ¿Cuánto tiempo le tomaría a A hacerlo sólo?

A) 18 *B) 19* *C) 20* *D) 21* *E) 22*

<u>Resolución</u>:

A vale por dos B, luego :

juntos : 3B .... demoran 12 *días*

Sólo A : 2B .... demora *x*

Resolviendo la R3S (inversa) : $x = \dfrac{3 \cdot 12}{2} = 18$ **RPTA. A**

27.- Dos obreros A y B pueden hacer una obra en 6 días; B y C en 4 días y A y C harían la misma obra en 3 días. ¿En qué tiempo haría la obra C sólo?

A) $\frac{4}{5}$ *B)* $4\frac{4}{5}$ *C)* $5\frac{5}{4}$ *D)* $\frac{3}{5}$ *E)* $\frac{7}{5}$

<u>Resolución</u>:

Sean *a*, *b* y *c* los días que demoran A, B y C en hacer cada uno por si solo, la obra en cuestión, luego planteamos :

A y B en 6 días : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$

B y C en 4 días : $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$

A y C en 3 días : $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$

Sumando las 2 últimas : $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{2}{c} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$

Reemplazando la primera : $\frac{1}{6} + \frac{2}{c} = \frac{7}{12}$

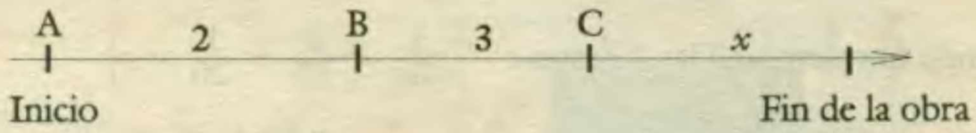
Resolviendo, obtenemos : $c = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$ *días* **RPTA. B**

28.- A puede hacer un trabajo en 10 días; B puede hacerlo en 12 días y C en 15 días. El primer día A sólo inicia el trabajo , al tercer día se le une B, luego en el sexto días se les une C y trabajan los tres hasta terminar la obra. ¿Cuántos días demora la obra?

A) 4 días ***B) 5 días*** ***C) 6 días*** ***D) 7 días*** ***E) 8 días***

Resolución:

En el diagrama podemos apreciar los días que han trabajado A, B y C :



$(5 + x)$ días de A + $(3 + x)$ días de B + x días de C = obra terminada.

$$(5 + x) \cdot \frac{1}{10} + (3 + x) \cdot \frac{1}{12} + x \cdot \frac{1}{15} = 1$$

Resolviendo : $30 + 6x + 15 + 5x + 4x = 60$

$\therefore$ La obra demora : $2 + 3 + 1 =$ ***6 días.*** RPTA. C

29.- Un grifo puede llenar un estanque en 8 horas y otro en 12 horas mientras que un tubo de desagüe lo vacía en 15 horas. Cuando el tanque está lleno hasta 1/3 de su altura se abren los dos grifos y el desagüe durante una hora, ¿Qué fracción del depósito quedará al final sin llenar?

A) $\frac{30}{45}$ ***B)*** $\frac{45}{30}$ ***C)*** $\frac{29}{43}$ ***D)*** $\frac{31}{40}$ ***E)*** $\frac{32}{43}$

Resolución:

En cada hora los grifos y el desagüe efectúan : $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{12}$ y $-\frac{1}{15}$ del trabajo.

Durante 1 hora los 3 juntos : $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{15+10-8}{120} = \frac{17}{120}$

Llenado hasta el momento : $\frac{1}{3} + \frac{17}{120} = \frac{57}{120}$

Falta por llenar : $1 - \frac{57}{120} = \frac{63}{120} = \frac{31}{40}$ RPTA. D

30.- Tres brigadas de obreros pueden hacer una zanja; la primera en 9 días, la segunda en 10 días y la tercera en 12 días; si se emplea a la vez 1/4 de la primera, 1/3 de la segunda, y 3/4 de la tercera. ¿En cuánto tiempo se haría la zanja?

A) 3 días ***B) 10 días*** ***C) 5 días*** ***D) 8 días*** ***E) 9 días***

Resolución:

$\frac{1}{4}$ de la 1ra demora : $9 \times 4 = 36$ *días.*

$\frac{1}{3}$ de la 2da demora : $10 \times 3 = 30$ *días.*

$\frac{3}{5}$ de la 3ra demora : $12 \times \frac{5}{3} = 20$ *días.*

Sea T el tiempo que demoran las 3 juntas : $\frac{1}{36} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{T}$

$\therefore$ **T = 9 *días.*** RPTA. E

31.- Una cuadrilla de 35 obreros pueden terminar una obra en 27 días. Al cabo de 6 días de trabajo se les junta cierto número de obreros de otro grupo, de modo que en 15 días terminan lo que falta de la obra. ¿Cuántos obreros eran del segundo grupo?

A) 10 *B) 14* *C) 12* *D) 9* *E) 8*

Resolución:

Al cabo de 6 días, aún quedan 27 - 6 = 21 para terminar los que falta; entonces :

$$\left.\begin{array}{l}\text{los 35 obreros, terminan en 21 días}\\ \text{los } (35+x) \text{ obreros, terminarán en 15 días}\end{array}\right\} \text{R 3 S (inversa)}$$

$$\therefore \quad 35 + x = \frac{35 \cdot 21}{15}$$

$$x = 14$$

Del segundo grupo eran **14 obreros.** RPTA. B

32.- Una cuadrilla de 120 obreros inician una obra que pueden culminar en 36 días. Al cabo del vigésimoquinto día se retira la doceava parte de la cuadrilla, para finalizar la obra. ¿Cuántos días más se necesitan?

A) 12 *B) 13* *C) 14* *D) 15* *E) 16*

Resolución:

Al cabo de 25 días, faltan 36 - 25 = 11 días.

Los 120 obreros se reducen a : $120 - \frac{120}{12} = 110$ obreros.

Ahora planteamos una R3S (inversa) :

$$\left.\begin{array}{l}\text{120 obreros .... 11 días}\\ \text{110 obreros .... } x\end{array}\right\} \quad x = \frac{120 \cdot 11}{110} = \textbf{12 días más.}$$

RPTA. A

33.- Se ha calculado que 750m de zanja pueden ser excavados en 10 días; si 7 obreros hicieron 350m y seguidamente con 5 ayudantes más concluyen la obra en el plazo fijado, los días trabajados por los ayudantes son :

A) 1 ***B) 5*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) N.A.***

Resolución:

$$\begin{cases} 7 \text{ obreros } \ldots\ldots \ 350\textit{metros} \ \ldots\ldots \ x \text{ días} \\ 12 \text{ obreros } \ldots\ldots \ 400\textit{metros} \ \ldots\ldots \ (10-x) \text{ días} \end{cases}$$

Resolviendo la R3C : $7 \,.\, 400 \,.\, x = 12 \,.\, 350 \,.\, (10 - x)$

$$2x = 30 - 3x \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

Los ayudantes trabajaron : $10 - x =$ ***4 días*** RPTA. D

34.- Doce obreros inicialmente pensaban en hacer una obra en "n" días, si después de haber realizado la mitad de la obra, 8 de los obreros aumentaron su rendimiento un 25% con lo cual el tiempo total de trabajo fue de 13 días. Hallar "n".

A) 10 ***B) 11*** ***C) 12*** ***D) 13*** ***E) 14***

Resolución:

Los doce obreros han realizado la mitad de la obra en $\frac{n}{2}$ días, la otra mitad la hacen "los demás" en $\left(13-\frac{n}{2}\right)$ días.

Si 8 obreros aumentan su rendimiento en 25% , equivalen a $8 \times 125\% = 10$ obreros, entonces la 2da mitad la hacen $10 + 4 = 14$ obreros de rendimiento normal.

$$\left.\begin{matrix} 12 \ \ldots\ldots\ldots \ \frac{n}{2} \\ 14 \ \ldots\ldots\ldots \ 13-\frac{n}{2} \end{matrix}\right\} \quad 12 \,.\, \frac{n}{2} = 14\left(13-\frac{n}{2}\right)$$

$$\therefore \quad n = 14$$ RPTA. E

35.- Una cuadrilla de obreros puede acabar un trabajo en 15 días trabajando 10 horas diarias, después de trabajar 7 días, 5 obreros se retiran y no son reemplazados si no al cabo de 3 días. ¿Cuántos obreros habrán de contratarse para poder acabar el trabajo en el plazo determinado?

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución:

El trabajo que 5 obreros no hicieron en 3 días, lo harán los (x) obreros que se van a contratar, en 15- (7 + 3) = 5 días.

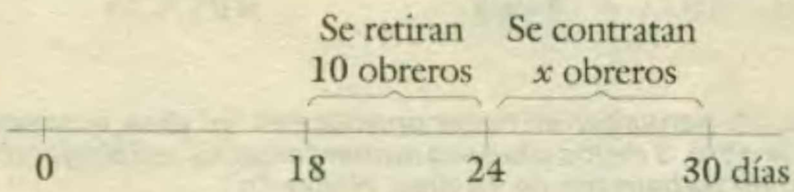
$$\left.\begin{array}{l} 5 \text{ obreros} \ldots\ldots\ 3 \text{ días} \\ x \text{ obreros} \ldots\ldots\ 5 \text{ días} \end{array}\right\} \quad x = \frac{5 \cdot 3}{5} = \text{3 obreros}$$

RPTA. C

11.- Una cuadrilla de 21 obreros pueden terminar un trabajo en 30 días, si al cabo de 18 días de labor se retiran 10 de los obreros y 6 días más tarde se le comunica al contratista para que entregue el trabajo en la fecha fijada previamente. ¿Cuántos obreros adicionales tendrá que tomar para cumplir?

A) 10 *B) 20* *C) 30* *D) 40* *E) 50*

Resolución:



El trabajo que debieron hacer 19 obreros en 6 *días*, lo deben hacer x obreros en el mismo tiempo, luego $x = 10$.

Se deben reponer los 10 obreros que se retiraron y contratar 10 más, para cumplir con el plazo; es decir 20 obreros.

RPTA. B

12.- 12 costureras pueden hacer un tejido en 23 días trabajando 3h por día, después de 5 días se retiran 2 costureras y 6 días después se contratan "n" costureras adicionales para terminar a tiempo. Hallar el valor de "n".

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución:

El trabajo que 2 costureras debieron hacer en 18 días, lo deben hacer "n" costureras en: 23- (5 + 6) = 12 *días*. Así :

$$\left.\begin{array}{l} 2 \text{ costureras} \ldots\ldots\ 18 \text{ días} \\ n \text{ costureras} \ldots\ldots\ 12 \text{ días} \end{array}\right\} \quad n = \frac{2 \cdot 18}{12} = 3$$

RPTA. B

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- José puede hacer una obra en 5 *días*. ¿Qué parte de la obra puede hacer en x *días*?

A) $x/5$ B) $5/x$ C) $5x$ D) $5 - x$ E) N.A.

2.- Luis hizo 3/5 de una obra en 6 *días*. ¿Qué parte de la obra hizo en un *día*?

A) 5/2 B) 2/3 C) 3/8 D) 6/5 E) 1/10

3.- Carlos puede hacer los 3/8 de una obra en 2 1/8 *días*. ¿Qué parte de la obra puede hacer en 2 *días*?

A) 2/17 B) 17/8 C) 6/7 D) 6/17 E) N.A.

4.- Ricardo puede hacer una obra en x *días*. Carlos puede hacer la misma obra en y *días*. Si trabajan juntos. ¿En cuántos *días* harán la obra?

A) $\frac{x-y}{xy}$ B) $\frac{x+y}{xy}$ C) $\frac{xy}{x+y}$

D) $\frac{x+y}{2}$ E) N.A.

5.- Roberto puede hacer una obra en 5 *días* y Eduardo puede hacerla en 10 *días*. ¿Qué parte de la obra pueden hacer en x *días*?

A) $x/5$ B) $3x/5$ C) $3x/10$ D) $x/10$ E) N.A.

6.- Si 4 hombres en un *día* pueden hacer 8/15 de una obra. ¿Cuánto hace un hombre en un *día*?

A) 32/15 B) 15/32 C) 2/15 D) 4/15 E) N.A.

7.- José puede hacer una obra en 10 *días* y Pablo podría hacerla en 15 *días*. Si trabajasen los dos juntos. ¿En qué tiempo lo podrían hacer?

A) 7 B) C) 5 D) 4 E) N.A.

8.- Raúl puede hacer una obra en x *días*. Ricardo podría hacerlo en $2x$ *días* y Carlos demoraría $3x$ *días*. Si trabajasen los 3 juntos. ¿Cuántos *días* demorarán para hacer toda la obra?

A) $\frac{6}{11x}$ B) $\frac{6x}{11}$ C) $\frac{11}{6x}$ D) $\frac{11x}{6}$ E) N.A.

9.- Un hombre realiza un trabajo en 6 *horas*. Su hijo realiza el mismo trabajo en 12 *horas*. ¿Cuánto tiempo tomará realizar el mismo trabajo si lo hacen juntos?

A) 4 *h* B) 9 *h* C) 6 *h* D) 3 *h* E) 12 *h*

10.- Juan en 2 *días* puede hacer 4/7 de una obra, pero Roberto en 3 *días* podría hacer 2/5 de la misma. Si trabajan juntos. ¿Cuántos *días* demorarán?

A) $\frac{44}{105}$ B) $\frac{105}{44}$ C) $\frac{8}{35}$ D) $\frac{48}{35}$ E) N.A.

NIVEL B

11.- A pensó hacer una obra en 9 *días*. Después de haber trabajado 4 *días* llegó B en su ayuda y hacen lo que falta en 2 *días*. Si B trabajase sólo. ¿En cuántos *días* haría la obra?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) N.A.

12.- Un canal llena un pozo en 4 *horas* y otro lo vacía en 6 *horas*. ¿En qué tiempo se llenará el pozo si se abre el desagüe una *hora* después de abrir el canal de entrada?

A) 10 *h* B) 12 *h* C) 13 *h* D) 9 *h* E) 11 *h*

13.- Una bomba demora 10 *horas* 25 *minutos* para llenar un reservorio. Cuando el tanque está lleno hasta 1/5, se malogra la bomba y su rendimiento disminuye en 1/3. ¿Cuánto tiempo tardará la bomba en llenar el reservorio?

A) 13: 25 B) 14: 35 C) 11: 12

D) 12: 30 E) 14: 25

14.- Un depósito puede llenarse por un tubo en 2 *horas* y por otro en 3 *horas*, y desaguarse por otro en 4 *horas*. El depósito se llenará con los tres tubos abiertos en:

A) 12/7 *horas* B) 10 *horas* C) 11/7 *horas*

D) 1 *hora* E) N.A.

15.- Las máquinas M_1 y M_2 tienen la misma cuota de producción semanal operando 30 *horas* y 35 *horas* respectivamente. Si M_1 trabaja 18 *horas* y se malogra debiendo hacer M_2 el resto de la cuota. ¿Cuántas *horas* adicionales debe trabajar M_2?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

16.- Una llave para agua puede llenar una piscina en 3 *horas*, mientras que otra llave lo puede hacer en 4 *horas*; asimismo un desagüe puede vaciarla en 5 *horas*. ¿En cuánto tiempo se llenará la piscina si se abren las tres válvulas al mismo tiempo?

A) 40/13 B) 60/23 C) 3 1/2

D) 2 1/7 E) N.A.

17.- A y B pueden hacer un trabajo en 2 *días*; B y C en cuatro días; A y C pueden hacer el mismo trabajo en 2 2/5 *días*. Entonces el número de *días* que A necesita para hacer él sólo el trabajo es:

A) 1 B) 3 C) 6 D) 12 E) 2,8

18.- Un ayudante de mecánico realiza una obra en el doble de tiempo que el mecánico. Ellos están trabajando juntos por 2 *horas*, cuando el mecánico se retira, y el ayudante termina el trabajo en 1 *hora*. ¿Cuántas *horas* tomaría al ayudante hacer el trabajo sólo?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

19.- Un estanque es llenado por 2 grifos, el primero lo llenaría en 6 *horas* y el segundo en 5 *horas*. El tiempo en que se llenaría estando abiertos los 2 grifos a la vez es:

A) 4 *horas* B) 5,5 *horas* C) 2 8/11 *horas*

D) Más de 5 *horas* E) N.A.

20.- A, B y C trabajando juntos realizan una obra en 4 *días*. A y B la realizan en 7 *días*. A y C juntos en 8 *días*. ¿Cuánto tiempo se demorarán B y C juntos?

A) 4 1/13 *días* D) 4 7/13 *días*

B) 4 4/13 *días* E) N.A.

C) 4 5/13 *días*

21.- Un caño llena un lavadero en 6 *minutos*, ¿En cuánto tiempo se llenará el lavadero con otro caño, 50% más eficiente?

A) 3' B) 4' C) 5' D) 6' E) 9'

22.- A y B pueden hacer un trabajo en 12 *días*; trabajan juntos durante 4 *días*, luego se retira "B" y "A" termina lo que falta en 20 *días*. ¿En cuántos días haría "B" todo el trabajo trabajando solo?

A) 24 B) 25 C) 20 D) 30 E) 36

23.- Un niño se demora 8 *horas* en hacer con arena un cubo de 3*dm*. de arista; habiendo avanzado la mitad de su trabajo se le pide que el cubo sea de 9*dm*. de arista. Si continúa trabajando durante 104 *horas* más, ¿Qué parte del nuevo cubo habrá construido?

A) 3/8 B) 1/2 C) 1/3 D) 2/3 E) 1/4

24.- Un trabajador demora 5 horas y 20 minutos para construir una pared. Cuando ya ha construido hasta los $\frac{3}{5}$ de dicha pared, el trabajador se lesiona y su rendimiento disminuye en $\frac{1}{3}$. ¿Cuánto tiempo tardará para hacer toda la pared?

A) 4:14 B) 5:20 C) 6:24 D) 6:10 E) N.A.

25.- Un grifo pueden llenar un estanque vacío en 8 *horas* y otro grifo demoraría 12 *horas*, mientras que una llave de desagüe puede retirar todo el contenido en 6 *horas*. Cuando el estanque está lleno hasta los 13/160 de su capacidad se abre el primer grifo y dos horas después el segundo y una hora después el desagüe y, luego de un tiempo se cierran las tres llaves quedando vacío

1/8 del tanque. ¿Qué tiempo funcionó el primer grifo?

A) 1:03 B) 5:50 C) 10:20 D) 8:00 E) 11:03

NIVEL C

26.- Un obrero A puede hacer una obra en 20 *días* y B puede hacerla en 15 *días*. Si trabajan juntos A y B durante 3 *días* y luego se retira A. ¿Cuánto tiempo empleará B en hacer lo que falta de la obra?

A) 8 *días* B) 9 3/4 *días* C) 10 *días*

D) 12 *días* E) 13 1/4 *días*

27.- Un caño A llena un estanque en 16 *horas*, un caño B lo hace en 12 *horas* y un desagüe lo vacía en 24 *horas*. Determinar en que tiempo se llenará el estanque, a partir del instante en que se abre la llave A, si estando vacío el estanque se abren las llaves A, B y C sucesivamente en intervalos de 2 *horas*.

A) 9 *horas* B) 9,6 *horas* C) 8 *horas*

D) 8,5 *horas* E) N.A.

28.- Se ponen a pastar dos caballos; uno blanco y otro negro. Al cabo de 4 *horas* retiran al blanco y el negro comió todo el resto en 2 *horas*. Si se hubiera retirado al negro, el blanco habría comido todo el resto en 6 *horas*. ¿En cuántas *horas* se comería el negro todo el pasto?

A) 5 B) 6 1/2 C) 7 D) 7 1/3 E) 8 1/4

29.- Una obra debía terminarse en 30 *días*; empleando 20 obreros, trabajando 8 *horas* diarias. Después de 12 *días* de trabajo se pidió que la obra quedase terminada 6 *días* antes del plazo y así se hizo. ¿Cuántos obreros se aumentaron, teniendo presente que se aumentó también en dos *horas* el trabajo diario?

A) 4 B) 24 C) 44 D) 0 E) 20

30.- Si N es el número de obreros que pueden hacer una obra en $\left(\frac{3}{4}N\right)$ *días*, trabajando $\left(\frac{1}{3}N\right)$ *horas* diarias. ¿Cuál es el número N de obreros, si al duplicarse hacen la misma obra en 72 *horas*?

A) 12 B) 24 C) 36 D) 48 E) 60

31.- Un hombre y dos mujeres pueden hacer un trabajo en 6 *días*. Determinar el tiempo necesario para que 2 hombres y 1 mujer puedan hacer un trabajo que es el cuádruple del anterior, sabiendo que el trabajo de 2 hombres es equivalente al de 3 mujeres.

A) 21 *días* B) 20 *días* C) 65 *días*

D) 11 *días* E) 30 *días*

32.- Un grupo de obreros pueden terminar una obra en 20 *días*, trabajando 8 *horas* diarias Al final del octavo día se retiran 8 de los obreros y 4 *días* más tarde se conmina al contratista a entregar la obra en el plazo fijado previamente. ¿Cuántos obreros más se deberán contratar para cumplir con tal exigencia?.

A) 9 B) 15 C) 12 D) 6 E) 18

33.- Una cuadrilla de 15 hombres se compromete a terminar en 14 *días* cierta obra. Al cabo de 9 días sólo han hecho los 3/7 de la obra. ¿Con cuántos hombres tendrán que ser reforzados para terminar la obra en el plazo fijado?

A) 21 B) 18 C) 15 D) 30 E) 12

34.- Una brigada de obreros se comprometió a construir un puente, y faltando 30 *días* para culminar la obra 4 de los obreros se retiran y no son reemplazados hasta dentro de 10 *días*. ¿Cuántos obreros se contrataron para reemplazarlos, si se terminó la obra en el plazo establecido?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

35.- Trabajando durante 10 *horas* diarias durante 15 *días*, 5 hornos consumen 50 toneladas de carbón. ¿Cuántas toneladas de carbón sería necesarias para mantener trabajando 9 *horas* diarias durante 85 *días* 3 hornos más?

A) 204 B) 408 C) 412 D) 402 E) 226

NÚMEROS PIRAMIDALES

NÚMEROS CUADRADO - PIRAMIDALES

Estos números aparecen al contar los elementos de una pirámide cuya base sea un cuadrado de n unidades por lado y que contendrá, por lo tanto, n^2 elementos; la capa encima de ésta, tendrá : $(n - 1)^2$ elementos; la superior inmediata $(n - 2)^2$; y la última constará solamente de un elemento. El número total de objetos contenidos en la pirámide formada lo dará, la suma :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$

La expresión general para esta suma fue deducida por los pitagóricos, y es la siguiente :

$$\frac{n\,(n - 1)(2n + 1)}{6}$$

De este modo, podemos afirmar que los primeros números cuadrado-pirámidales son los siguientes :

1 ; 5 ; 14 ; 30 ; 55 ; 91 ; ...

Y su generación esquemática se muestra en la *Fig.* 1.

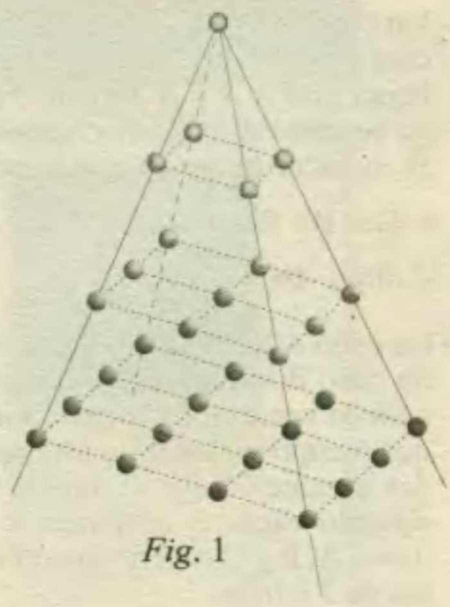


***Fig.* 1**

OBSERVACION .- Como las pirámides triangulares ocupan relativamente mucho espacio, no se las utiliza, a menos que el número de objetos por apilar sea pequeño. Aun asi las de base cuadrada son más ventajosas como se muestra en la *Fig.* 2.

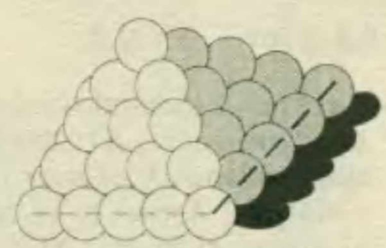


***Fig.* 2**

Desde los pitagóricos son bien conocidas otras series de números figurados o piramidales, generalización natural de los que acabamos de enumerar. Así están los *números pentagonales*, cuya sucesión comienza asi:

1 ; 5 ; 12 ; 22 ; 35 ; 61 ; 80 ; ...

Los pitagóricos consideraban al *número* como un elemento natural, presente en todas las cosas y ligando las cosas entre sí. Todas las relaciones entre las cosas, se pensaba entonces, pueden describirse mediante los números enteros. Como si ellas estuviesen formadas por «puntos materiales» cuya distribución y orden caracterizase su naturaleza. Es fácil imaginar la conmoción que en este marco de ideas supuso la aparición de los segmentos inconmensurables, tales como el lado y la diagonal de un cuadrado, que por no encajar en este concepto originó el número «irracional» . La elaboración lógica de la teoría del número irracional es ya del tiempo de EUDOXIO (hacia el 350 a. de C.).

He aquí, para terminar, un bello resultado que los griegos desconocieron, puesto que fue descubierto por el gran matemático del siglo XVII Pierre de Fermat :

«Cualquier número entero es igual a la suma de no más de tres números triangulares, y a la suma de no más de cuatro números cuadrados, y a la de no más de cinco números pentagonales, y así sucesivamente».

24 Problemas Mercantiles

Este tema es una muestra de las Matemáticas Aplicadas, puesto que muchos aspectos de la vida real, se relacionan con conceptos de naturaleza cuantitativa y económica como son: precios, costos, escalas de salarios, inversiones y utilidades, tarifas, impuestos, etc, entonces cualquier persona está en algún momento frente a una de estas situaciones y si alguna decisión debe tomar, ésta requerirá una base matemática. A continuación detallamos algunos de los casos más frecuentes.

I) PROBLEMAS DE COSTOS

En este caso, el precio total (P) de varias unidades de una misma especie es igual al número (n) de unidades, multiplicado por el valor (x) de cada una.

Precio total = (# de unidades) (Precio unitario)

Fórmula : $\mathbf{P = n \, . \, x}$

II) GANANCIAS

En este caso el monto total de ventas (PV) excede a los costos (PC) y queda un margen de ganancia (g), relacionándose estas cantidades así:

$$\mathbf{PV = PC + g}$$

III) PERDIDAS

Aquí, el total de ventas (PV) no alcanza para cubrir los costos (PC) y hay un faltante o pérdida (p). La relación es:

$$\mathbf{PV = PC - p}$$

IV) PROBLEMAS SOBRE INVERSIONES E INTERES

Los intereses (I) que gana un capital (C) invertido por un año son iguales a la tasa de interés (r %) multiplicada por el capital.

$$I = C \, . \, \frac{r}{100} \quad ; \quad I = \frac{C \, . \, r \, . \, t}{100}$$

La 1ra. fórmula es para un año y la segunda para "t" años.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Una persona se entera que el precio de un producto se incrementa en 300 soles, por lo que decide comprar una cantidad de productos por un valor de 30 000 soles. Si hubiera comprado con el nuevo precio hubiera adquirido 5 productos menos. Hallar el precio antes del incremento.

A) S/. 1 500 B) S/. 1 200 C) S/. 900 D) S/. 1 800 E) S/. 2 100 PUCP 93 - I

Resolución:

Sea x el precio unitario antes del incremento, entonces después del incremento será $(x + 300)$. Como esto implica una variación en la cantidad de productos que se puede comprar con 30 000 *soles*, recopilamos la información en la siguiente tabla :

	# productos	Precio U.	Precio Total
Antes	n	x	30 000
Después	$n - 5$	$x + 300$	30 000

Las ecuaciones son : $nx = 30\,000$ ...(1)

$(n - 5)(x + 300) = 30\,000$ ...(2)

Operando en (2) :

$nx + 300n - 5x - 1\,500 = 30\,000$ ... (*)

De (1) simplificamos en (*): $5x = 300n - 1\,500$

$\Rightarrow \quad x = 60n - 300 = 60(n - 5)$ ...(3)

(3) en (1) : $60n(n - 5) = 30\,000$

Resolviendo: $n = 25$

El precio antes del incremento era x (ver tabla), luego según (3) :

$x = 60(25 - 5) =$ **1 200** RPTA. B

2.- Entre cierto número de personas compran una computadora que cuesta 1 200 soles. El dinero que paga cada persona excede en 194 al número de personas. ¿Cuántos participaron en la compra?

A) 18 personas B) 36 personas C) 6 personas D) 12 personas E) 20 personas

UNMSM - 97

Resolución:

Podemos empezar planteando la siguiente relación de costo :

Precio total = (# personas) (aporte de cada una) ... (*)

donde el precio total es 1 200 ; el # de personas es x y el aporte de cada una es $(x + 194)$. Reemplazando todo esto en (*), tenemos:

$$1\,200 = (x)\,.\,(x + 194)$$

ó : $$x^2 + 194 - 1\,200 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x + 200)\,(x - 6) = 0$$

Los valores de x pueden ser : - 200 , ó , 6.

Sólo se puede elegir : $x = 6$ RPTA. C

3.- Dos personas tienen, respectivamente S/. 3 680 y S/. 2 560. Ambas gastan la misma cantidad en comprar objetos cuyos precios son de 60 y 40 soles, quedándole al primero una cantidad cinco veces mayor de lo que le queda al segundo. ¿Cuántos objetos compraron en total, sabiendo que el primero solo compró los de 60 y el segundo solo los de 40?

A) 120 B) 143 C) 135 D) 154 E) 95 PUCP 95 - II

Resolución:

Según los datos sabemos que la persona A tenía 3 680 y B tenía 2 560.

Si A compró "a" objetos de 60 *soles* c/u ; gastó 60 a.

Si B compró "b" objetos de 40 *soles* c/u ; gastó 40 b.

Como ambos gastaron lo mismo, tendremos que :

$$60\,a = 40\,b \quad ; \quad ó \quad ; \quad 3\,a = 2\,b \qquad ...(1)$$

Además se sabe que a A le quedó 5 veces lo que a B; entonces :

$$3\,680 - 60\,a = 5\,(2\,560 - 40\,b) \qquad ...(2)$$

Operando en (2) : $3\,680 - 60\,a = 12\,800 - 200\,b$

Simplificando : $10\,b - 3\,a = 456 \quad ...\,(*)$

Reemplazando (1) en (*) : $8\,b = 456$

$$\Rightarrow b = 57$$

Sustituyendo en (1) : $3\,a = 2\,(57) \quad ; \quad a = 38$

Luego : $a + b = 38 + 57 =$ 95 RPTA. E

4.- Me falta "a" soles para comprar "m" pares de zapatos, y me sobra "b" soles, si compro "m - 1" pares; luego el costo de un par de zapatos es :

A) $a + b$ *B)* $\dfrac{3(a-b)}{4}$ *C)* $a - b$ *D)* $\dfrac{4(a+b)}{3}$ *E)* $\dfrac{a+b}{2}$ *UNMSM - 91*

Resolución:

Llamaremos x al costo de 1 par de zapatos, entonces según los datos:

Falta "a" para comprar m pares $\Rightarrow$ Tengo : $mx - a$

Sobra "b" si compro "m - 1" pares $\Rightarrow$ Tengo : $(m - 1)x + b$

Puesto que el dinero disponible es el mismo; diremos que :

$$mx - a = (m - 1)x + b$$

$$\Rightarrow mx - a = mx - x + b$$

$$\therefore \quad x = a + b$$

RPTA. A

5.- Un comerciante compra determinado número de lapiceros por 180 soles y los vende todos menos 6, con una ganancia de 2 soles en cada lapicero. Sabiendo que con el dinero recaudado en la venta podría haber comprado 30 lapiceros más que antes, calcular el precio de cada lapicero.

A) 6 soles B) 3 soles C) 9 soles D) 10 soles E) 5 soles

Resolución:

Sea n el número de lapiceros que compró y x el precio que pagó por cada uno.Luego :

	# lapiceros	Costo c/u	Total
Compró	n	x	180
Vendió	n - 6	x + 2	T
Pudo comprar	n + 30	x	T

Podemos plantear :

$$nx = 180 \qquad ...(1)$$

$$(n - 6)(x + 2) = T \qquad ...(2)$$

$$(n + 30)(x) = T \qquad ...(3)$$

De (1) : $n = \frac{180}{x}$; luego al reemplazar en (2) y (3), e igualando tendremos :

$$\left(\frac{180}{x} - 6\right)(x + 2) = \left(\frac{180}{x} + 30\right)x$$

$$\Rightarrow \quad 180 + \frac{360}{x} - 6x - 12 = 180 + 30x$$

Efectuando : $3x^2 + x - 30 = 0$

Factorizando : $(3x + 10)(x - 3) = 0$

De aquí se deduce que : $x = -\frac{10}{3}$ $\vee$ $x = 3$

$\therefore$ Cada lapicero se compró a **3 *soles*** **RPTA. B**

6.- Se compran "A" kg de pollo a S/. 7 el kg. Si se vende la cuarta parte del peso total a S/. 8 cada kg. ¿A cómo debe venderse cada kg. de lo que queda para ganar en total S/. 450?

A) $\frac{20A}{3} + \frac{600}{A}$ *B)* $\frac{20}{3A} + 600A$ *C)* $\frac{20}{3} + 600A$ *D)* $\frac{20}{3A} + 600$ *E)* $\frac{20}{3} + \frac{600}{A}$

PUCP 93 - II

Resolución:

Según los datos sabemos que el peso total "A" *kg* se compró a *S/.* 7 el *kg*, entonces ello importó 7A *soles*. La cuarta parte del peso total es: $\frac{A}{4}$*kg* y se vendió a *S/.* 8 cada *kg*.

El resto es : $\frac{3A}{4}$ *kg* que se venderá a x soles cada *kg*, para ganar en total S/. 450.

Entonces, como PV = PC + *g* , reemplazamos aquí todo lo anterior :

$$\frac{A}{4} \cdot 8 + \frac{3A}{4} \cdot x = 7A + 450$$

$$\Rightarrow \frac{3A}{4} \cdot x = 5A + 450$$

$$\therefore \quad x = \frac{20}{3} + \frac{600}{A}$$ **RPTA. E**

7.- Un comerciante compra libros a 50 soles cada uno. Por cada docena le obsequian un libro, obteniendo en total 780 libros. Si decide regalar 30 libros. ¿A qué precio debe vender cada libro para ganar S/. 6 000?

A) S/. 54,00 *B) S/. 62,00* *C) S/. 60,00* *D) S/. 56,00* *E) S/. 58,00* ***UNMSM - 97***

Resolución:

Si por cada docena le regalan 1 libro, podemos deducir que por cada docena recibe 13 libros , asi el número de docenas que compró se obtiene de :

$$\frac{780}{13} = 60$$

Ahora podemos calcular el PC (Precio de Costo) y el PV (Precio de Venta). Veamos :

PC = (# de libros) . (precio c/u) = 60 docenas . 50

$\Rightarrow$ PC = 60 · 12 · 50 = 36 000

Sea x el precio de venta final, entonces :

$$PV = (\# \text{ de libros}) \cdot (\text{precio c/u}) = (780 - 30) \cdot x$$

Como : PV = PC + g , tendremos : $750x = 36\,000 + 6\,000$

$$x = 56 \qquad \text{RPTA. D}$$

8.- Un hacendado compró 749 ovejas. Vendió 700 de ellas por el precio pagado por las 749 ovejas. Se vendieron las 49 restantes al mismo precio por cabeza que las otras 700. Basándose en el costo, el porcentaje de ganancia en la transacción completa es:

A) 6,5 B) 6,75 C) 7,0 D) 7,5 E) 8,0

<u>Resolución:</u>

Sea p el precio pagado por las 749 ovejas. El precio de venta por oveja es : $\frac{p}{700}$

La ganancia está representada por el precio de las 49 ovejas restantes, es decir : $49 \cdot \frac{p}{700}$

Para expresar esta ganancia como porcentaje, planteamos :

$$\left.\begin{array}{ccc} p & \rightarrow & 100\% \\ 49\frac{p}{700} & \rightarrow & x \end{array}\right\} x = \frac{\frac{49p}{700} \cdot 100}{p}$$

$$\Rightarrow \quad x = 7\,\% \qquad \text{RPTA. C}$$

9.- Una persona tiene parte de S/. 4 500 invertido al 4% y el resto al 6%. Si las entradas anuales de cada inversión son las mismas, entonces la tasa promedio de interés que obtiene de los S/. 4 500 es :

A) 5% B) 4,8% C) 5,2% D) 4,6% E) N.A.

<u>Resolución:</u>

Sean x,e, y las partes, entonces : $x + y = 4\,500$ ...(1)

Cada parte gana en un año : 4% x ; 6% y respectivamente, las que según la condición del problema son iguales, luego :

$$\frac{4}{100}x = \frac{6}{100}y \quad \Rightarrow \quad 2x = 3y \quad ...(2)$$

De (1) y (2) se obtiene : $x = 2\,700 \quad \wedge \quad y = 1\,800$

Luego cada ganancia es : $\frac{4}{100} \cdot 2\,700 = 108$, y la ganancia total es :

$$108 \cdot 2 = 216$$

Comparando la ganancia total con el capital invertido, tendremos el porcentaje de ganancia:

$$\left.\begin{array}{lcl} 4\,500 & \ldots & 100\% \\ 216 & \ldots & p \end{array}\right\} \Rightarrow p = \frac{216 \cdot 100}{4\,500}$$

$p = 4{,}8\ \%$ RPTA. B

10.- La diferencia de capitales de dos personas A y B es igual a S/.6 400. Si la primera coloca su dinero al 4% y la segunda al 5% y ambas reciben el mismo interés después de un cierto tiempo. ¿Cuál es la suma de sus capitales?

A) S/. 56 700 B) S/. 57 600 C) S/. 56 200 D) S/. 56 400 E) S/. 57 400

UNMSM - 92

Resolución:

Los intereses que ganan los capitales A y B en un tiempo t son :

$$I_A = \frac{4}{100} \cdot A \cdot t \quad ; \quad I_B = \frac{5}{100} \cdot B \cdot t$$

Igualando (por dato); tenemos : $4A = 5B$ ...(1)

Y además sabemos que : $A - B = 6\,400$ ...(2)

Resolviendo (1) y (2) : $A = 32\,000$; $B = 25\,600$

La suma de capitales es: S/. 57 600 RPTA. B

11.- Se han colocado las $\frac{2}{7}$ partes de un capital al 6% ; las $\frac{3}{5}$ partes al 10% y el resto al 7,5%. Si se obtiene una renta de $ 12 000. ¿Cuál es el capital?

A) $ 70 000 B) $ 140 000 C) $ 35 000 D) $ 120 000 E) N.A. UNFV - 89

Resolución:

Sea x el capital, entonces según los datos se debe cumplir que :

$$6\% \text{ de } \frac{2}{7}x + 10\% \text{ de } \frac{3}{5}x + 7{,}5\% \text{ del resto} = 12\,000 \quad ...(1)$$

Donde el resto será : $x - \left(\frac{2}{7}x + \frac{3}{5}x\right) = x - \frac{31}{35}x = \frac{4}{35}x$

Entonces; al reemplazar (2) en (1), se tiene :

$$\frac{6}{100} \cdot \frac{2}{7}x + \frac{10}{100} \cdot \frac{3x}{5} + \frac{7{,}5}{100} \cdot \frac{4}{35}x = 12\,000$$

Efectuando , encontramos : $\frac{3x}{35} = 12\,000 \Rightarrow x = 140\,000$

El capital fue de : 140 000 *dólares* RPTA. B

12.- Juan invierte S/. 500 en un negocio y cuatro meses después se asocia con Luis, quien aporta S/. 350 a la sociedad. Si después de 20 meses de asociado su utilidad es de S/. 7 600. ¿Cuánto le corresponde a Juan?

A) S/. 3 600 B) S/. 4 800 C) S/. 5 000 D) S/. 5 760 E) S/. 5 800 PUCP 95 - II

Resolución:

Resumamos los datos de capital y tiempo :

		Capital		Tiempo		Capital . Tiempo
Juan	...	500	...	24 *meses*	...	$500 \cdot 24$
Luis	...	350	...	20 *meses*	...	$350 \cdot 20$

La utilidad se repartirá en partes proporcionales al producto : Capital . Tiempo; asi, las utilidades son u_1 y u_2 respectivamente,por lo cual se tendrá :

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{500 \cdot 24}{350 \cdot 20} = \frac{12\,000}{7\,000} = \frac{12}{7} \Rightarrow U_{Total} = 7\,600 \quad ...(1)$$

Tenemos que resolver : $u_1 = 12\,x$; $u_2 = 7\,x$ ...(2)

y: $u_1 + u_2 = U_{Total}$ ...(3)

De (1) y (2) en (3) : $12\,x + 7\,x = 7\,600 \Rightarrow x = 400$

La utilidad de Juan fue : $u_1 = 12 \cdot (400) =$ **S/. 4 800** RPTA. B

13.- El precio por enviar un telegrama es de cierta cantidad por cada una de las 10 primeras palabras y otra cantidad por cada palabra adicional. Un telegrama de 16 palabras cuesta S/. 30 y uno de 20 palabras cuesta S/. 36. ¿Cuánto costará enviar un telegrama de 26 palabras?

A) S/. 40 B) S/. 42 C) S/. 54,6 D) S/. 39 E) S/. 45 PUCP 96 - II

Resolución:

Sea x la tarifa por cada una de las 10 primeras palabras.

Sea y la tarifa por cada una de las palabras adicionales.

Por 16 palabras : $10\,x + 6\,y = 30$

Por 20 palabras : $10\,x + 10\,y = 36$

Por 26 palabras : $10\,x + 16\,y = z$

De las 2 primeras se obtiene : $x = 2{,}1 \wedge y = 1{,}5$

Por el telegrama de 26 palabras se pagará :

$z = 10\,(2{,}1) + 16\,(1{,}5) = 21 + 24 =$ **45** RPTA. E

14.- Se tiene 30 ejemplares de la primera edición de Problemas de Razonamiento Matemático y 35 de la segunda edición pagando por ellos S/. 390. Si a los primeros se les hace un descuento de 15% y a los segundos el 10% se pagaría en total S/. 342. Hallar la suma de los precios de cada ejemplar de cada edición.

A) 8 *B) 6* *C) 12* *D) 15* *E) 10* ***PUCP 94 - II***

Resolución:

Cada ejemplar de la 1ª edición :

sin descuento : x *soles* ; con descuento : $0{,}85\,x$

Cada ejemplar de la 2ª edición :

sin descuento : y *soles* ; con descuento : $0{,}90\,x$

Entonces los costos son : $\begin{cases} 30x + 35y = 390 & \ldots(1) \\ 30\,(0{,}85x) + 35\,(0{,}90x) = 342 & \ldots(2) \end{cases}$

Donde la 2ª ecuación se reduce a : $51x + 63y = 684$

ó : $17x + 21y = 228$ ...(*)

Resolviendo (1) y (*), se obtiene : $x = 6$; $y = 6$ RPTA. C

15.- Un comerciante compra naranjas a 3 por 10 soles e igual número a 5 por 20 soles. Para recuperar su capital las debe vender a :

A) 8 por 30 soles *B) 3 por 11 soles* *C) 5 por 18 soles*

D) 11 por 40 soles *E) 13 por 50 soles*

Resolución:

Sea n el número de naranjas comprado en cada caso; es decir $2n$ en total:

1º) Compra n ; cada una a: $\frac{10}{3}$; entonces paga: $\frac{10n}{3}$

2º) Compra n ; cada una a: $\frac{20}{5} = 4$ *soles* ; entonces paga $4n$

Por el total de naranjas pagará : $\frac{10n}{3} + 4n = \frac{22n}{3}$

Para recuperar su capital, las $2n$ naranjas las debe vender a x soles cada una, entonces debe cumplirse que :

$$2nx = \frac{22n}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{11}{3}$$

Es decir debe venderlas a razón de : **3 por 11 *soles*** RPTA. B

16.- Una persona pidió al vendedor de una tienda 4 pañuelos de seda y n pañuelos corrientes. El precio de los pañuelos de seda es el doble de los pañuelos corrientes. El vendedor confundió el pedido y despachó n pañuelos de seda y 4 pañuelos corrientes. Esta confusión dio lugar a que el valor de la compra aumentara en 50%. El número de pañuelos corrientes del pedido original fue :

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 15 UNMSM - 92

Resolución:

Toda la información se puede anotar ordenadamente en los siguientes esquemas :

Pedido correcto

	número	precio
de seda	4	$2p$
corrientes	n	p

Despacho equivocado

	número	precio
de seda	n	$2p$
corrientes	4	p

Si C es el costo del pedido correcto, se tendrá :

Del 1^er^ esquema : $4 \cdot 2p + n \cdot p = 100\%\ C$

Del 2^do^ esquema : $n \cdot 2p + 4 \cdot p = 150\%\ C$

Dividiendo miembro a miembro : $\dfrac{8+n}{2n+4} = \dfrac{100}{150} = \dfrac{2}{3}$

Entonces : $24 + 3n = 4n + 8 \Rightarrow n = 16$ RPTA. C

17.- La fórmula : $I_n = 1\,000 - 20n$, da el interés que se paga en el enésimo mes por un préstamo y que es válida hasta cuando $I_n = 0$. Calcular la suma de todos los intereses pagados por dicho préstamo.

A) 21 700 B) 24 500 C) 23 400 D) 43 400 E) 40 700 PUCP 93 - II

Resolución:

La fórmula es válida hasta cuando : $I_n = 0$, es decir :

$$1\,000 - 20n = 0 \Rightarrow n = 50$$

Por lo tanto se pagan intereses hasta por 50 *meses*. Esto significa que :

$S = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + I_{50}$

$S = (1\,000 - 20 \cdot 1) + (1\,000 - 20 \cdot 2) + (1\,000 - 20 \cdot 3) + \ldots + (1\,000 - 20 \cdot 50)$

$S = 1\,000 \cdot 50 - 20\ \overbrace{(1 + 2 + 3 + \ldots + 50)}$

$$S = 50\,000 - 20 \cdot \left(\frac{50 \cdot 51}{2}\right)$$

$S = 50\,000 - 25\,500 =$ **24 500** RPTA. B

18.- Un fabricante puede producir focos de luz a un costo unitario de 5 soles. Si los vende a x soles cada uno, podrá vender aproximadamente (12 000 - x) focos al mes. La utilidad mensual del fabricante depende del precio de venta de los focos. Calcule la utilidad mensual si vende a S/. 8 cada foco.

A) 2 037 B) 35 976 C) 45 601 D) 5 386 E) 14 705

Resolución:

Al vender a x *soles* cada foco que ha costado 5 *soles* cada uno, la ganancia es $(x - 5)$.

En el total de focos, la ganancia será : $G = (x - 5).(12\,000 - x)$

cuando $x = 8$, esta ganancia será : $G = (8 - 5)\cdot(12\,000 - 8)$

$G = 35\,976$ RPTA. B

19.- Se compra cajones de naranja a 100 soles cada uno; y cada cajón contiene 20 kg, primero se vende la mitad a 20 soles el kg, después la cuarta parte a 15 soles el kg y por último el resto se remata a 10 soles el kg, ganando 11 250 soles en total. ¿Cuántos cajones de naranja se habrían comprado?

A) 65 B) 70 C) 55 D) 50 E) 60

Resolución:

Cada cajón tiene 20 *kg*; si eran x cajones, el número total de *kilogramos* es $20\,x$. Todo esto se vendió por partes :

1) La mitad a 20 *soles* el *kg* : $\frac{1}{2}.20\,x\,.\,(20) = 200\,x$

2) La 4ª parte a 15 *soles* el *kg* : $\frac{1}{4}.20\,x\,.\,(15) = 75\,x$

3) El resto (la 4ª parte) a S/.10 : $\frac{1}{4}.20\,x\,.\,(10) = 50\,x$

$$PV\ (Total) = 200\,x + 75\,x + 50\,x = 325\,x$$

Si cada cajón costó 100 *soles* : $PC\ (Total) = 100\,x$

Entonces debe cumplirse : $PV = PC + g$

$$\Rightarrow \quad 325\,x = 100\,x + 11\,250$$

$\therefore$ Se compraron : **$x = 50$ cajones** RPTA. D

20.- Una persona pone 50% de su capital a una tasa de 36% anual; la tercera parte al 30% y el resto al 24% obteniendo una renta de S/. 9 600. ¿Cuál fue el capital final?

A) S/.24 600 B) S/.44 600 C) S/.34 600 D) S/.39 600 E) S/.29 600 UPCH - 96

Resolución:

Sea x el capital, que se divide en 3 partes para que cada una gane su respectivo interés; entonces de acuerdo con los datos se sabe que :

1º) $\frac{x}{2} \cdot 36\ \% = 0{,}18\, x$

2º) $\frac{x}{3} \cdot 30\ \% = 0{,}10\, x$

3º) $\frac{x}{6} \cdot 24\ \% = 0{,}04\, x$

Renta total : $0{,}32\, x = 9\,600 \quad \Rightarrow \quad x = 30\,000$

Capital Final $= x +$ intereses $= 30\,000 + 9\,600$

$\therefore$ Capital Final = **39 600** RPTA. D

21.- Suponer que la demanda de hamburguesas está dada por :

$$D = 3\,600 - 1\,500\, p$$

y la oferta está dada por : $S = -\,1\,200 + 1\,800\, p$

donde p es el precio (en dólares) por libra de hamburguesa. ¿Cuál es el precio de equilibrio, esto es, el precio por libra de hamburguesas, cuando la oferta es igual a la demanda?

A) \$ 1,20 B) \$ 1,45 C) \$ 1,80 D) \$ 2,20 E) \$ 2,15

Resolución:

A \$ 1 la libra, los consumidores compran 2 100 libras, pero los oferentes proveerán solamente 600 libras.

A \$ 2 la libra, el consumidor compra solamente 600 libras, mientras que los oferentes suministran 2 400 libras.

Nótese que la oferta continuará creciendo a medida que el precio aumente, pero la demanda caerá a cero cuando $p =$ \$ 2,40.

El precio de equilibrio se obtendrá igualando :

$$3\,600 - 1\,500\, p = -\,1\,200 + 1\,800\, p$$

$$\Rightarrow \quad 16 = 11\, p$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{16}{11}$$

$\therefore \quad p \approx$ **\$ 1,45** RPTA. B

22.- Una compañía manufacturera fabrica sacapuntas y tiene costos fijos de 10 000 dólares. Cuesta \$ 4 hacer un sacapuntas que se vende a \$ 5,95. ¿Cuántos sacapuntas debe vender para obtener una ganancia de 10%? (10% de sus costos)

A) 7 100 *B) 6 100* *C) 7 097* *D) 7 200* *E) 5 024*

Resolución:

Sea x el número de sacapuntas, entonces deberá cumplirse que :

Ingreso $= 5{,}95\,x$

Costo $= 10\,000 + 4\,x$

Ganancia $= 0{,}1\,(10\,000 + 4\,x)$

Entonces : Ingreso - Costo = Ganancia

$$5{,}95x - (10\,000 + 4\,x) = 0{,}1\,(10\,000 + 4\,x)$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}95\,x = 11\,000 + 0{,}4\,x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{11\,000}{1{,}55}$$

$\therefore \quad x \approx 7\,097$ **sacapuntas** RPTA. C

23.- Usted está promoviendo un concierto del grupo de rock "U8" en un auditorio con 10 000 asientos. La mayoría de los conciertos cobran \$ 10 por asiento reservado y \$ 7 por admisión general y el promotor decide el número de cada tipo de lugar. El grupo cobra \$ 40 000 por su presentación, los gastos de usted son de \$ 20 000. Suponiendo que todos los asientos serán vendidos. ¿Cuántos asientos deberán designarse como reservados, si desea tener una ganancia de \$ 31 000?

A) 3 333,$\bar{3}$ *B) 3 000* *C) 6 000* *D) 1 333,$\bar{3}$* *E) 7 000*

Resolución:

Por tener una ganancia de 31 000 recordemos que :

Ingreso - Costo = Ganancia

Sean x los asientos reservados, luego se tendrá :

$$10\,x + 7\,(10\,000 - x) - 60\,000 = 31\,000$$

$$\Rightarrow 3\,x + 10\,000 = 31\,000$$

$$\Rightarrow \quad 3\,x = 21\,000$$

$x = 7\,000$ RPTA. E

24.- Dos negociantes en vinos ingresan por una de las fronteras del Perú, portando uno de ellos 64 botellas de vino y otro 20. Como no tienen suficiente dinero para pagar los derechos de aduana el primero paga con 5 botellas de vino y 40 soles, mientras que el segundo con 2 botellas de vino pero recibe de vuelto 40 soles. ¿Cuál es el valor de cada botella de vino?

A) S/. 120 *B) S/. 80* *C) S/. 110* *D) S/. 105* *E) S/. 95*

Resolución:

Sea x el precio de cada botella.

El primero paga $5x + 40$ por $(64 - 5) = 59$ botellas.

El segundo paga $2x - 40$ por $(20 - 2) = 18$ botellas.

Como el precio pagado por unidad es el mismo ,se puede establecer que :

$$\frac{5x+40}{59} = \frac{2x-40}{18}$$

Y resolviendo obtenemos : $x = 110$ RPTA. C

25.- Dos vendedores llevaron en total 180 naranjas al mercado. Uno de ellos tenía más naranjas que el otro pero recibió en la venta la misma cantidad de dinero que el otro. Una vez vendidas todas las naranjas, el primer vendedor dijo al segundo: Si yo hubiera llevado al mercado la misma cantidad de naranjas que tú, habría recibido 15 soles. El segundo contestó: Y si yo hubiera vendido las naranjas que tienes tú, habría obtenido como producto de la venta 20/3 de sol. ¿Cuántas naranjas llevó al mercado cada vendedor?

A) 60 y 120 *B) 72 y 108* *C) 36 y 144* *D) 64 y 116* *E) 80 y 100*

Resolución:

El 1ro llevó x naranjas a p *soles* c/u.

El 2do llevó $(180 - x)$ a q *soles* c/u.

Puesto que ambos recibieron lo mismo : $x \cdot p = (180 - x)\,q$ ...(1)

Pero también se cumple que : $p\,(180 - x) = 15$ ...(2)

Asimismo : $q\,x = \frac{20}{3}$ ...(3)

Resolviendo : $x = 72$, y , $(180 - x) = 108$ RPTA. B

26.- Una persona compra 8 kilos de café y 3 kg de azúcar por S/. 40,50. Si un kg de café cuesta tanto como 3 kg de azúcar. Diga usted el precio de un kg de azúcar.

A) 1,5 soles *B) 1 sol* *C) 2,5 soles* *D) 3 soles* *E) 3,5 soles*

Resolución:

Precio de 1 *kilo* de azúcar : x

Precio de 1 *kilo* de café: $3x$

$$\therefore \quad 8 \cdot (3x) + 3 \cdot x = 40{,}50$$

$$27x = 40{,}5$$

$$x = 1{,}5 \text{ soles}$$ RPTA. A

27.- Un obrero trabajó durante 2 meses con su hijo en una misma fábrica. El primer mes por 14 días del padre y 24 del hijo recibieron S/. 118; el segundo mes por 21 días del padre y 19 del hijo recibieron S/. 143. ¿Cuál es la diferencia de jornales diarios del padre y del hijo?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución:

Sean x é y los jornales de padre e hijo respectivamente:

$$\begin{cases} 14x + 24y = 118 \\ 21x + 19y = 143 \end{cases}$$

Resolviendo: $x = 5$; $y = 2$; $x - y = 3$ RPTA. C

28.- Se ha comprado cierto número de revistas por S/. 100. Si el precio por ejemplar hubiera sido un sol menos, se tendría cinco ejemplares más por el mismo precio, ¿cuantas revistas se compró?

A) 10 *B) 20* *C) 30* *D) 40* *E) 50*

Resolución:

Sea x el precio por ejemplar; entonces el # de revistas es : $\dfrac{100}{x}$

Si el precio fuese $x - 1$, el# de revistas sería : $\dfrac{100}{x-1}$

$$\therefore \quad \frac{100}{x-1} - \frac{100}{x} = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

Se compró : $100 \div 5 =$ 20 revistas RPTA. B

29.- Si tuviera el doble de lo que no perdí, tendría 1 vez más de lo que perdí. ¿Cuánto tenia si perdí S/. 20?

A) 10 *B) 20* *C) 30* *D) 40* *E) 50*

Resolución:

Sea x lo que tenía, entonces al perder 20, tiene $x - 20$.

Si tuviera el doble : $2(x - 20)$; tendría : $20 + 20$

Planteamos: $2(x - 20) = 40$

Al resolver : $x = 40$ **RPTA. D**

30.- Se reparte S/. 3 000 entre cuatro personas de tal manera que a la primera le corresponda S/. 400 más que a la segunda, a ésta 3/5 de lo que le corresponde a la tercera, y a ésta S/. 600 más que a la cuarta. ¿Cuánto recibió la primera persona?

A) 1 000 *B) 1 500* *C) 2 000* *D) 2 500* *E) 3 000*

Resolución:

3 000:
- $1^a : \frac{3}{5}x + 400$
- $2^a : \frac{3}{5}x$
- $3^a : x$
- $4^a : x - 600$

Suma de partes = 3 000

$$\frac{3}{5}x + 400 + \frac{3}{5}x + x - 600 = 3\,000$$

Resolviendo : $x = 1\,000$ $\Rightarrow$ la 1^a recibió : **1 000** **RPTA. A**

31.- "Pagué 12 soles por los huevos que compré al almacenero", explicó la cocinera "pero le hice darme dos huevos extras, porque eran muy pequeños, eso hizo que en total pagara un sol menos por docena que el primer precio que me dió". ¿Cuántos huevos compró la cocinera?

A) 10 *B) 13* *C) 16* *D) 18* *E) 21*

Resolución:

Pagó 12 *soles* por x huevos , entonces el precio por docena sería : $12 \cdot \frac{12}{x}$

Si le dan dos huevos más , entonces el precio por docena sería : $12 \cdot \frac{12}{x+2}$

La diferencia entre los precios es 1*sol* : $\frac{144}{x} - \frac{144}{x+2} = 1 \Rightarrow x = 16$

RPTA. C

32.- Arturo vende huevos rosados a 36 soles la docena y huevos blancos a 24 soles la docena y por 250 huevos obtiene 624 soles. ¿Cuántos huevos fueron rosados, si por cada dos docenas que vende obsequia un huevo blanco?

A) 140 B) 141 C) 142 D) 143 E) 144

Resolución:

Si por cada 24 huevos entrega 25, vendió $\frac{250}{25}$ = 10 veces 24 huevos, es decir 20 docenas.

De estas 20 docenas, x son de huevos rosados; 20 - x de huevos blancos :

$\therefore \quad 36x + 24(20 - x) = 624 \quad \Rightarrow \quad x = 12$

\# de huevos rosados : 12 docenas = **144** RPTA. E

33.- Si al 40% del número de artículos que tengo le incremento el 40% de su precio de costo, gano 192 soles. ¿Cuánto ganaría si al 60% del número de artículos lo incremento el 60% de su precio de costo?

A) 430 B) 435 C) 433 D) 340 E) 432

Resolución:

Sea x el precio de costo de 1 artículo, n el # de artículos:

En el primer caso : $(40\%\, n)(40\%\, x) = 192$

En el segundo caso: $(60\%\, n)(60\%\, x) = G$

$\therefore \quad \frac{40 \cdot 40}{60 \cdot 60} = \frac{192}{G} \quad \Rightarrow \quad G = 432$ RPTA. E

34.- Al tostar café se pierde $\frac{1}{5}$ del peso, un comerciante vende café tostado a 44 soles el kilogramo ganando el 10% sobre el precio de costo. ¿A qué precio ha comprado el café sin tostar?

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

Resolución:

- Para vender 1 *kg*. de café tostado debe tener 1,25 *kg* de café sin tostar.

- 44 *soles* representan el 110% del costo de 1,25 *kg* de café sin tostar.

$\therefore \quad 110\%\,(1{,}25\,x) = 44 \quad \Rightarrow \quad x = 32$ RPTA. C

35.- Un comerciante revende de la siguiente manera una pieza de paño, que le ha costado S/. 60. Primero vende 1/3 con un beneficio de 10%, enseguida la mitad con un beneficio del 20% y el resto por la suma de S/. 20, haciendo un beneficio total de S/. 0,75 por metro. Calcular la longitud de la pieza.

A) 20 m B) 21 m C) 22 m D) 23 m E) 24 m

Resolución:

Sea x la longitud de la pieza ; $\frac{60}{x}$ el costo de 1 *metro*.

Vende $\frac{1}{3}$ con un beneficio del 10% : $\frac{x}{3} \cdot (1{,}1) \cdot \frac{60}{x} = 22$

la mitad con un beneficio del 20% : $\frac{x}{2} \cdot (1{,}2) \cdot \frac{60}{x} = 36$

Vende el resto a S/. 20

Beneficio total : $0{,}75\,x$

$\therefore \quad 22 + 36 + 20 = 60 + 0{,}75x$

Resolviendo : $x = 24$ *metros* RPTA. E

36.- Alonso compra vasos: la tercera parte a 4 por 6 soles, la mitad a 6 por 7 soles y el resto a 3 por 4 soles. Vende los 2/3 a 3 por 5 soles y las demás a 6 por 9 soles. Si gana en total 143 soles, se pide saber ¿qué número de vaso vendió?

A) 465 ***B) 460*** ***C) 463*** ***D) 468*** ***E) 470***

Resolución:

Sea x el número de vasos :

$$PC = \frac{x}{3} \cdot \frac{6}{4} + \frac{x}{2} \cdot \frac{7}{6} + \frac{x}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{47x}{36}$$

$$PV = \frac{2}{3}x \cdot \frac{5}{3} + \frac{x}{3} \cdot \frac{9}{6} = \frac{29x}{18}$$

Si ganó 143 ; $\frac{29x}{18} - \frac{47x}{36} = 143 \Rightarrow x = 468$ RPTA. D

37.- Un ganadero vendió su ganado compuesto por 60 cabezas, entre vacas y carneros por 21 600, pero como necesitaba 25 000 tiene que realizar una venta complementaria a los mismos precios y razona que; si vende 8 vacas le sobrarían 200 y si vende 20 terneros faltarían 400. Hallar el número de animales de cada clase que se vendieron en la primera venta.

A) 40 ; 15 ***B) 45 ; 19*** ***C) 42 ; 18*** ***D) 39 ; 20*** ***E) 47 ; 16***

Resolución:

\# de vacas : x ; # de carneros : $60 - x$

x (precio de 1 vaca) + $(60 - x)$ (precio de 1 carnero) = 21 600

Necesita : 25 000 - 21 600 = 3 400 *soles* adicionales

Precio de 8 vacas $= 3\,400 + 200 \Rightarrow$ 1 vaca $=$ S/. 450

Precio de 20 carneros $= 3\,400 - 400 \Rightarrow$ 1 carnero $=$ S/. 150

Reemplazando en la 1ª ecuación, se obtiene: $x = 42$

$\therefore$ En la 1ª venta :

de vacas = 42 ; # de carneros = 18 RPTA. C

38.- Con el dinero que tiene Juan, puede comprar 7 naranjas y le sobran 30 céntimos, o bien comprar 4 manzanas y le sobran 20 céntimos. Si cada manzana vale 40 céntimos más que cada naranja. ¿Cuánto dinero tiene Juan?

A) S/. 4,40 *B) S/. 4,80* *C) S/. 3,80* *D) S/. 3,20* *E) S/. 4,00*

Resolución:

Sea x el precio de una naranja; entonces $x + 0{,}40$ será el de una manzana, entonces.

Dinero de Juan : $7\,(x) + 0{,}30 = 4\,(x + 0{,}40) + 0{,}20$

Resolviendo se obtiene : $x = 0{,}50$

$\therefore$ Dinero de Juan : $7\,(0{,}50) + 0{,}30 =$ **S/. 3,80** RPTA. C

39.- Una sociedad científica invitió cierta suma de dinero al 5% para otorgar, con el interés de esta suma un premio anual. La tasa de interés fué reducida al 4% y entonces la sociedad tuvo que incrementar el capital invertido en 7 500 dólares para mantener el mismo premio. ¿A cuánto ascendía el premio?

A) $ 1 500 *B) $ 1 250* *C) $ 2 500* *D) $ 5 000* *E) $ 15 000*

Resolución:

Sea x la suma depositada inicialmente :

Valor del premio $= 5\%$ de $x = 0{,}05\,x$

Cuando la tasa disminuyó a 4% el capital aumentó en 7 500

$\therefore$ Valor del premio $= 4\%$ de $(x + 7\,500) = 0{,}04\,(x + 7\,500)$

Igualando y resolviendo : $x = \$\ 30\,000$

Y el valor del premio es : $0{,}05\,(30\,000) =$ **$1 500** RPTA. A

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Los boletos de entrada para una sala cinematográfica cuestan *S/.* 4 para adultos y *S/.* 3 para estudiantes. Si se vendieron 810 boletos y los ingresos totales fueron *S/.* 2 853. ¿Cuántos boletos se vendieron de cada tipo?

A) 412 y 324 B) 408 y 320 C) 423 y 387

D) 387 y 213 E) 218 y 189

2.- Tengo monedas de 10 y 25 *céntimos*. Si en total tengo 115 *céntimos*. ¿Cuál o cuales de los siguientes enunciados pueden ser correctos?

I) Tengo 7 monedas

II) Tengo 10 monedas

III) No puede saberse, faltan datos

A) I B) II C) I y II D) III E) N.A.

3.- Si la ganancia que se le hace a un artículo que cuesta C dólares y se vende en S dólares es:

$M = \frac{1}{n}C$; entonces la ganancia está dada por:

A) $M = \frac{1}{n-1}S$ D) $M = \frac{1}{n+1}S$

B) $M = \frac{1}{n}S$ E) $M = \frac{n}{n-1}S$

C) $M = \frac{n}{n+1}$

4.- Se compran 25 *metros* de tela por cierta suma de dinero. Si el *metro* hubiera costado 10 *soles* menos, se habrían podido comprar 8 *metros* más con la misma suma. Dígase el precio del *metro* de tela.

A) *S/.* 31,25 B) *S/.* 42,25 C) *S/.* 41,25

D) *S/.* 38,40 E) *S/.* 60,00

5.- Varios amigos alquilaron un coche en 1 200 *soles* para hacer una excursión a pagar por partes iguales, pero faltaron dos de ellos y tuvieron que pagar 500 *soles* más cada uno de los que asistieron. ¿Cuántos hicieron la excursión?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 10 E) 12

6.- Un negociante compró una enciclopedia por un valor de 6 000 *soles*, pero se le extraviaron 3 tomos. Si ganó 300 *soles* al vender los restantes a 200 *soles* más de lo que había costado cada uno. ¿Cuántos tomos vendió?

A) 15 B) 10 C) 9 D) 7 E) 12

7.- Un frutero compra cajones de melocotones a 7 por 9 *soles* y los vende a 6 por 10 *soles*. Si los 96 cajones que le quedan, representan su ganancia. ¿Cuántos cajones compró?

A) 350 B) 420 C) 490 D) 280 E) 560

8.- Se imponen los 4/7 de un capital al 4%, el resto al 5% y resulta un interés anual de 3,1 millones de *soles*. La suma impuesta al 4% es :

A) 40 millones de *soles*

B) 42 millones de *soles*

C) 42,5 millones de *soles*

D) 58 millones de *soles*

E) N.A.

9.- Un padre reparte entre sus dos hijos una propiedad de 11,25 *hectáreas*. Si el mayor hubiese recibido 20% menos y el menor 30% menos, ambos hubiesen recibido lo mismo. ¿Cuánto recibió el hermano mayor?

A) 6 B) 6,5 C) 4,75 D) 5,25 E) 5

10.- El precio de la entrada a un circo se rebaja en 30%, ésto hace que la asistencia del público se incremente en 35%. ¿Cuál fue el efecto de ésta rebaja en los ingresos diarios?

A) 5% B) 4,5% C) 6% D) 5,5% E) 7%

NIVEL B

11.- Un comerciante compró 30 gallinas a S/. 1 050 *soles* cada una. Le robaron unas cuantas y vendió cada una de las restantes con un aumento de tantas veces 42 *soles* como gallinas le robaron, resultando que no tuvo pérdida ni ganancia. ¿Cuántas gallinas robaron al comerciante y a qué precio vendió las que le quedaron?

A) 4 ; S/. 1 218 D) 8 ; S/. 1 320

B) 5 ; S/. 1 260 E) N.A.

C) 6 ; S/. 1 292

12.- Se tiene la misma cantidad de limones de dos clases distintas que se venden a 2 por 100 *soles* los de primera y a 3 por 100 *soles* los de segunda. Si se vendieran a 5 por S/. 200. ¿Qué % del costo se perdería?

A) 4% B) 8% C) 1%

D) 6% E) Depende del # de limones

13.- Un hombre pagó 22 080 *soles* de impuestos, lo que representaba el 4% de sus entradas, éstas después de deducir todas las rebajas legales. Las leyes le permiten rebajar el 10% de sus entradas totales por gastos imprevistos y 60 000 soles por cada miembro de la familia. ¿Cuáles fueron sus entradas totales? (Tiene esposa y dos hijos)

A) 576 000 *soles* D) 880 000 *soles*

B) 960 000 *soles* E) N.A.

C) 320 000 *soles*

14.- Dos granjeros A y B tienen 30 vacas; entre los dos, las venden a distintos precios pero cada uno recibe la misma suma. Si A hubiese vendido las suyas al mismo precio que B, hubiese recibido S/. 9 600 y si B las hubiese vendido al precio de A, hubiese recibido S/. 7 350. ¿Cuántas vacas tiene cada uno?

A) 18 y 12 B) 15 y 15 C) 20 y 10

D) 16 y 14 E) 17 y 13

15.- Un edificio consta de 16 departamentos unos de dos habitaciones y otros de 3 habitaciones. La renta mensual de los departamentos con 3 habitaciones es de 5 000 *soles* más que la de los pequeños y producen un total de S/. 105 000 por mes. Hallar la renta mensual de los departamentos más pequeños si el total conseguido de ellos es de 125 000 *soles* por mes.

A) S/. 10 500 D) S/. 16 500

B) S/. 17 500 E) S/. 12 500

C) S/. 13 000

16.- Una persona colocó el 50% de su capital a una tasa de interés del 36% anual, la tercera parte al 30% y el resto al 24% obteniendo una renta de S/. 96 000. ¿Cuál es el capital actual?

A) S/. 246 000 D) S/. 396 000

B) S/. 446 000 E) S/. 296 000

C) S/. 346 000

17.- Después de haberse comprometido a pagar una deuda de 8 400 *soles* en dos partes iguales, la mitad a los 120 *días* y la otra mitad a los 60 *días* después del primer pago, un comerciante se decidió cancelar la deuda con un descuento del 36% anual. ¿Cuánto tuvo que pagar al contado?

A) S/. 7 630 D) S/. 6 888

B) S/. 7 420 E) N.A.

C) S/. 7 140

18.- Si el precio de un artículo se aumenta en un porcentaje p, entonces el porcentaje de disminución de las ventas no debe exceder a d para obtener las mismas entradas. El valor de d es :

A) $\frac{1}{1+p}$ B) $\frac{1}{1-p}$ C) $\frac{p}{1+p}$

D) $\frac{p}{p-1}$ E) $\frac{1-p}{1+p}$

19.- El señor A vendió dos pipas a *S/.* 1,20 cada una. Basado en el costo, su ganancia en una fue de 20% y su pérdida en la otra fue de 20%. Entonces en la venta de la pipa él :

A) no perdió ni ganó nada

B) perdió 4 *céntimos*

C) ganó 4 *céntimos*

D) perdió 10 *céntimos*

E) ganó 10 *céntimos*

20.- Una persona tiene *S/.* 10 000 para invertir, si invierte *S/.* 4 000 al 5% y *S/.* 3 500 al 4% para tener una entrada anual de *S/.* 500 debe invertir el resto al :

A) 6% B) 6,1% C) 6,2%

D) 6,3% E) 6,4%

21.- Un obrero trabaja 30 *días*, al principio le pagan 900 diarios y después 1 200. ¿Al cabo de cuántos *días* de iniciado el trabajo se aumentó el jornal si por los 30 *días* se le pagó 34 500?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 9

22.- Una persona compra una canasta de peras y otra de manzanas con igual número de frutas cada una. La canasta de manzanas le ha costado *S/.* 15 menos que la de peras. ¿Cuántas manzanas compró si 5 peras valen tanto como 7 manzanas y en conjunto 5 peras y 7 manzanas valen *S/.* 7?

A) 30 B) 40 C) 50 D) 60 E) 75

23.- Si gasto el 40% de lo que no gasto y luego gano el 20% de lo que me queda, entonces tendría 600 *soles*. ¿Cuánto fue mi gasto?

A) S/.300 B) S/.200 C) S/.500

D) S/.350 E) S/.250

24.- Si inicialmente gasté 2/5 de lo que no gasté, luego perdí 1/3 de lo que no perdí: si al final recupero 20% del resto con lo cual ahora tengo 180 *soles*. ¿Cuánto gasté inicialmente?

A) S/.50 B) S/.60 C) S/.80

D) S/.90 E) S/.100

25.- Se reparte cierta cantidad de dinero entre 3 personas, recibiendo la primera los 5/7 de lo que recibió la segunda, y el tercero 1/18 menos de lo que recibieron las dos primeras personas, siendo esta suma igual a la mitad del total disminuido en *S/.* 20. Hallar dicha cantidad.

A) S/.1 500 B) S/.1 680 C) S/.1 800

D) S/.1 400 E) S/.1 300

NIVEL C

26.- Una mujer invirtió *S/.* 25 000 en dos negocios. El año pasado obtuvo utilidades de 15% del primer negocio, pero perdió el 5% en el segundo. Si los ingresos del año pasado de las dos inversiones fueron equivalentes a un rédito de 8% sobre la cantidad total invertida. ¿Cuánto dinero invirtió en el 1er negocio?

A) 12 500 B) 16 250 C) 17 500

D) 20 000 E) 15 000

27.- ¿Cuánto vale la docena de huevos si dos más por un chelín disminuye el precio en un penique por docena? (1 chelín = 12 peniques)

A) 8 peniques B) 9 peniques C) 2 chelines

D) 3 chelines E) 10 peniques

28.- Dos hombres establecen una compañía en la que uno invierte 20 000 *soles* más que el otro. Al terminar el primer año obtienen una ganancia neta de *S/.* 8 100, lo que representa un 22 1/2% de interés de su inversión. ¿Cuánto invirtió el primer socio?

A) S/. 28 000 B) S/. 36 000 C) S/. 24 000

D) S/. 48 000 E) S/. 30 000

29.- Una empresa produce pelotas de fútbol. Su producción anual es de 50 000 pelotas que las vende a S/. 200 cada una. Sus gastos totales fueron de 8 millones de *soles*. La fábrica ha calculado que le cuesta 120 *soles* producir cada pelota adicional. ¿Cuántas pelotas debe fabricarse en total, en un año, para ganar 3 millones de *soles*?

A) 57 500 B) 56 250 C) 62 500

D) 67 500 E) 51 250

30.- Una compañía estima que puede vender 1 000 unidades por semana si pone en $ 3 el precio unitario, pero que las ventas semanales subirán 100 unidades por cada 10 de 40 que disminuya el precio. ¿Cuántas unidades debe producir y vender para maximizar el ingreso semanal?

A) 1 000 B) 1 500 C) 2 000

D) 2 500 E) 3 000

31.- Se tiene la misma cantidad de limones de dos clases distintas, que se venden a 2 por un *sol* las de primera y 3 por un *sol* las de segunda. Si vendiera todos los limones a 5 por dos *soles*, ¿se ganará o perderá y en que porcentaje?

A) 5% B) 3% C) 4% D) 10% E) 8%

32.- Hoy gané S/. 1 más que ayer y lo que he ganado en los dos *días* es S/. 25 más que los 2/5 de lo que gané ayer. ¿Cuánto gané ayer?

A) S/. 15 B) S/. 16 C) S/. 14

D) S/. 17 E) S/. 13

33.- Un comerciante compra una cantidad de juguetes a "*m*" *soles* cada uno, si vende "*x*" juguetes menos de los que compró a "*n*" *soles* cada uno gana "6*n*" *soles*. Hallar cuántos juguetes compró ($n > m$).

A) $n(x+6)/(n+m)$ D) $m(x-6)/(n+m)$

B) $m(x+6)/(m+n)$ E) $n(x-6)/(n-m)$

C) $n(x+6)/(n-m)$

34.- Se desea repartir 2 800 *soles* entre cuatro personas, de manera que al primero le corresponda 400 *soles* más que al segundo; a éste, 2/3 de lo que corresponda al tercero, y a éste, 500 *soles* menos que al cuarto. ¿Cuánto le toca al que recibe más?

A) 1 070 B) 780 C) 300

D) 570 E) 980

35.- Una persona compra naranjas, la mitad del total a 5 por 6 *soles* y la otra mitad restante a 6 por 7 *soles*. Vende los 3/5 del número a 3 por 5 *soles* y los demás a 4 por 7 *soles*. Se desea saber cuántas naranjas habrá vendido cuando gane 930 *soles*.

A) 540 B) 3 200 C) 1 800

D) 1 860 E) 3 400

36.- Un comerciante compra telas de dos calidades por 300 *soles*; de la primera calidad adquiere 6 *metros* más que de la segunda. Si por la tela de la primera calidad se hubiera pagado el precio de la segunda, su costo hubiera sido 180 *soles* y recíprocamente si por la tela de la segunda calidad hubiese pagado el precio de la primera, su costo hubiera sido 120 *soles*. ¿Cuántos *metros* adquirió de la primera calidad?

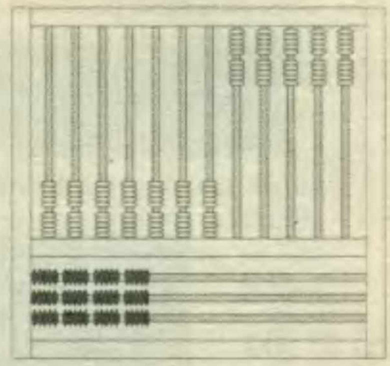
A) 15 *m* B) 18 *m* C) 12 *m*

D) 16 *m* E) 10 *m*

37.- Un fabricante vende a un comerciante los 11/15 de una pieza de tela a S/. 30 el *metro*; con la condición de admitirle los *metros* que no pudiera vender. El comerciante vende en S/. 7 140 los 20/21 de la tela que compró obteniendo una ganancia de S/. 210 más el importe de los *metros* sobrantes que devolvió. Hallar la ganancia total del comerciante.

A) 540 B) 350 C) 368 D) 394 E) 210

DEL ABACO A LA COMPUTADORA



Quizá el primer artefacto mecánico de cálculo fue el ábaco, empleado por los chinos hace aproximadamente 2 500 años, pero cuyo uso nunca se extendió fuera del Oriente. Del siglo XI al XVII se realizaron muchos intentos fallidos por encontrar dispositivos mecánicos capaces de efectuar operaciones aritméticas. La primera sumadora mecánica fue diseñada y construida en la década de 1640 por el joven matemático francés, de 19 años, Blas Pascal. Sin embargo, sus máquinas eran tan frágiles y costosas que solamente se construyeron 50 de ellas. En 1670, el joven matemático alemán, Gottfried von Leibnitz, inventó un dispositivo más confiable que podía sumar, multiplicar, dividir y sacar raíz cuadrada, pero esta máquina nunca fue usada en el comercio o en la ciencia. Fue hasta los años de 1800 cuando las calculadoras fueron perfeccionadas lo suficiente para ser utilizadas ampliamente, y antes de 1900, las máquinas calculadoras se convirtieron en equipo usual en las oficinas. Las máquinas procesadoras de datos fueron empleadas inicialmente en Estados Unidos por el Census Bureau en 1895.



Importantes acontecimientos, indispensables en el desarrollo de las modernas computadoras pero a menudo pasados por alto por los historiadores, son la creación de la lógica simbólica por George Boole en 1854, y la aplicación de la misma al diseño de circuitos lógicos por Claude Shannon, otro joven científico, en su tesis doctoral presentada en 1938.

La primera computadora electromecánica fue construida en la Universidad de Dartmouth en 1942, y en la de Harvard en 1944. La primera computadora completamente electrónica denominada ENIAC fue construida en la Universidad de Pensilvania en 1946. Era una enorme máquina con 18000 tubos electrónicos de vacío y 1500 relevadores eléctricos. Aun cuando podía realizar 5000 sumas por segundo, tenía los mismos inconvenientes que las primeras computadoras, necesitaba volverse a conectar y programarse exteriormente para cada problema diferente.

Los medios para la auto-instrucción, la programación sin reconecciones, y la forma de decisiones lógicas como funciones internas de la computadora se debieron al eminente matemático estadounidense John von Neumann. Las computadoras construidas con tubos electrónicos de vacío hasta principio, de la década de 1950, frecuentemente son catalogadas como de la primera generación. La segunda generación de computadoras se inicia con la introducción de los transistores en reemplazo de los tubos de vacío. La primera de estas máquinas se terminó de construir en 1959, y podía efectuar sumas a razón de 220 000 por segundo. La tercera generación de computadoras se inicia con el empleo de los circuitos integrados, introducidos a mediados de la década de 1960. Algunas de estas máquinas pueden llevar a cabo hasta 100 millones de instrucciones por segundo.

En los últimos 25 ó 30 años, las computadoras electrónicas digitales han alcanzado un lugar importante en la vida del mundo civilizado. El impacto de las computadoras se ha dejado sentir en todas partes; son un instrumento muy importante en muchos programas de gobierno, en el manejo de horarios y reservaciones de las líneas aéreas, en transacciones bancarias, en la contabilidad de las tarjetas de crédito, en la ordenación de datos, ...etc.

25 Móviles

Los problemas que hacen mención a carros, trenes, personas, aviones, distancias, *metros* por *segundo*, *kilómetros* por *hora*, y cualquier otra terminología relacionada con el movimiento, básicamente se resolverá con la fórmula : rapidez . tiempo = distancia; que corresponde a un movimiento uniforme.

I) RELACIONES FUNDAMENTALES

Es frecuente, en la mayoría de los textos publicados sobre Razonamiento Matemático, utilizar el términos velocidad sin tener el cuidado de tropezar con las definiciones establecidas por la Física. En aras de no cometer los mismo vicios, presentaremos los conceptos formal y universalmente aceptados.

a) Rapidez (v).- Llamado también rapidez de movimiento, es la característica física de un móvil que nos informa cuan aprisa pasa de una posición a otra. Se expresa en unidades de longitud por unidad de tiempo, por ejemplo : *m/s* ; *km/h* ; .... etc.

b) Velocidad ($\bar{v}$).- Es una magnitud vectorial que nos indica dos cosas : la rapidez con que se mueve un objeto y la dirección en que lo hace.

Como puede notarse, de estas dos definiciones, la que más usamos en los ejercicos sobre móviles es la primera : La rapidez. La segunda es más usada por los físicos para describir con más precisión a los movimientos.

Aclaremos que un movimiento se considera uniforme cuando la rapidez es constante. En nuestro caso:

$$e = v \cdot t \qquad \begin{cases} e = \text{distancia recorrida} \\ v = \text{rapidez empleada} \\ t = \text{tiempo utilizado} \end{cases}$$

OTRAS FORMAS	
$v = \dfrac{e}{t}$	$t = \dfrac{e}{v}$

Al emplear estas fórmulas, deberá tenerse cuidado de que las unidades de distancia, rapidez y tiempo concuerden entre sí, o sea que si la rapidez está en *kilómetros* por *hora*, la distancia deberá estar en *km* y el tiempo en *horas*.

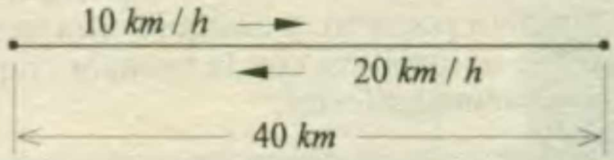
Otro concepto, muy empleado en los ejercicios sobre móviles, es el llamado: Rapidez Promedio : v_p . Este se define así :

$$v_p = \frac{\textit{Distancia total}}{\textit{Tiempo total}}$$

Ejemplo.- Si la primera *hora* de un movimiento, se recorrieron 30 *km*, durante la segunda *hora* 40 *km* y 50 *km* más durante la tercera y cuarta *hora*, entonces en las 4 *horas*, la rapidez promedio habrá sido:

$$v_p = \frac{\text{recorrido total}}{\text{tiempo total}} = \frac{30+40+50}{1+1+2} = \frac{120}{4} = 30\ \frac{km}{h}$$

Ejm: Un bote viaja 40 *km* río arriba a 10 *km/h* y regresa a su punto de partida a 20 *km/h*. Hallar la rapidez promedio durante el viaje de ida y vuelta.



Resolución:

Tiempo de viaje río arriba $= \dfrac{40\ km}{10\ km/h} = 4\ h$

Tiempo de viaje río abajo $= \dfrac{40\ km}{20\ km/h} = 2\ h$

Tiempo total $= 4 + 2 = 6\ h$

Recorrido total $= 2\ (40) = 80\ km$

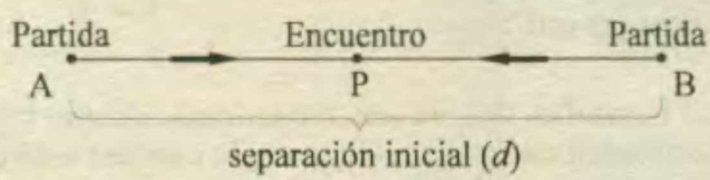
Por tanto: rapidez promedio $= \dfrac{80 km}{6h} = 13\ \frac{1}{3}\ km/h$

¡Error común : **La rapidez promedia no es el promedio de las rapideces!**

$$v_p \neq \frac{10+20}{2} = 15\ \frac{km}{h}$$

II) TIEMPOS DE ENCUENTRO

En este tipo de problemas dos móviles parten simultáneamente de diferentes puntos y viajan en direcciones opuestas, hasta que se encuentran.



El tiempo que demoran en encontrarse está dado por la fórmula:

$$t = \frac{d}{v_A + v_B}$$

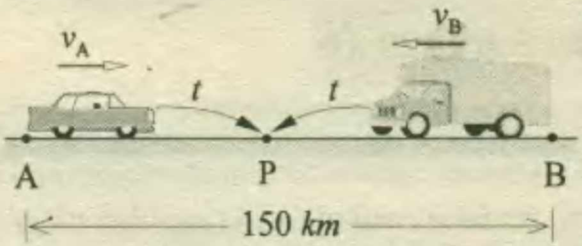
d ← separación inicial

$v_A + v_B$ ← suma de rapideces

La distancia de A al punto de encuentro P puede hallarse, luego de haber calculado t, de este modo: $AP = v_A \cdot t$

Ejm: La distancia entre dos ciudades es de 150 *km*. Un auto parte de la ciudad A hacia B, a 30 *km/h* y en el mismo instante un camión parte de B hacia A, a 20 *km/h*. ¿Cuánto tardarán en encontrarse y a qué distancia de A se producirá el encuentro?

Resolución:



Aplicamos la fórmula considerando :

$v_A = 30\ km/h \ \wedge \ v_B = 20\ km/h$

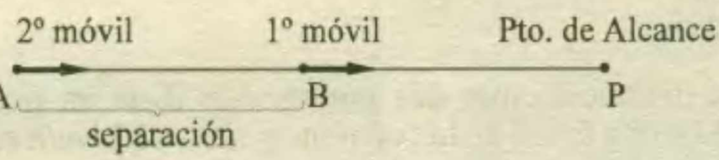
$\Rightarrow t = \dfrac{150}{30+20} = \dfrac{150}{50} = 3\ horas$

Además: $AP = v_A \cdot t = 30 \cdot 3 = 90\ km$

Se encuentran 3 *horas* después de partir y a 90 *km* de A. **Rpta : 3 *h* ; 90 *km***

III) TIEMPOS DE ALCANCE (PERSECUCIONES)

En este caso, después que un móvil parte, otro sale del mismo punto y viajando en la misma dirección, alcanza al primero.



El tiempo que demora el 2do en alcanzar al 1ro está dado por la fórmula:

$$t = \frac{d}{v_2 - v_1}$$

d ⟵ separación
$v_2 - v_1$ ⟵ dif. de rapideces

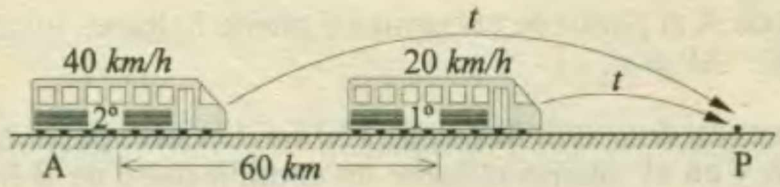
La distancia de A al punto de alcance P, se puede obtener con el valor hallado de t, en la relación: $AP = v_2 \cdot t$

Ejm: Un móvil parte de A a 20 *km/h* y 3 *horas* más tarde, parte un segundo móvil, a 40 *km/h* siguiendo el mismo camino que el primero. ¿Qué tiempo dura la persecución y a qué distancia de A es alcanzado el primer móvil?

Resolución:

Luego de 3 *horas*, el primero se ha alejado una distancia igual a $20 \cdot 3 = 60\ km$. Luego parte el segundo para dar inicio a la persecución, donde el tiempo de alcance es igual a :

$$t = \frac{60}{40-20} = \frac{60}{20} = 3\ horas$$

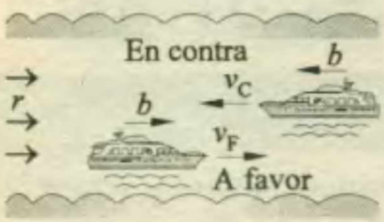


La persecución dura 3 *horas* y el punto de alcance P, se encuentra a una distancia de A igual a:

$AP = v_2 \cdot t = 40 \cdot 3 = 120\ km$ **Rpta: 3 *h* ; 120 *km***

IV) MOVIMIENTO EN UNA CORRIENTE

Cuando una embarcación se desplaza en un río se debe considerar la rapidez propia de la embarcación (b) y la rapidez del río (r). Si el movimiento es a favor de la corriente, la rapidez resultante es: $b + r$ y si es en contra de la corriente, será: $b - r$.



r : rapidez de la corriente del río

Rapidez resultante:

A favor de la corriente: $v_F = b + r$

En contra de la corriente: $v_C = b - r$

Ejm: Al recorrer la distancia entre dos puntos A y B de un río, una embarcación se desplaza a 45 *km/h* a favor de la corriente y sólo a 33 *km/h* en contra de la corriente. ¿Cuál es la rapidez de la corriente del río?

Resolución:

Simplemente resolvemos un sistema de ecuaciones con las incógnitas b y r como las rapideces de la embarcación y del río:

A favor: $b + r = 45$ Resolviendo:

En contra: $b - r = 33$ $b = 39$; $r = 6$

La rapidez del río es 6 *km/h* **Rpta: 6 *km/h***

Nota: Existen variantes en problemas sobre móviles, que aunque se fundamentan en la relación fundamental $e = v \cdot t$, vale la pena analizar como casos notables. Esto lo veremos en la exposición de problemas resueltos que a continuación se presenta.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- ¿Cuántos metros recorre una liebre en 10 segundos, si en 1/5 de minuto recorre 40 metros más?

A) 180 m *B) 200 m* *C) 240 m* *D) 160 m* *E) 140 m*

Resolución:

En este problema el móvil (liebre) hace recorridos que difieren en tiempo y espacio, pero asumiremos que la rapidez (de la liebre) es la misma.

Razonaremos así:

En 10 *segundos* recorre: *x metros*.

En $\frac{1}{5}$ de *minuto* recorre: $x + 40$ *metros*.

Reconocemos aquí que $\frac{1}{5}$ de $min = \frac{1}{5} \cdot 60 = 12$ *segundos* y la información se puede resumir en este cuadro:

$t\ (s)$	$e\ (m)$
10	x
12	$x + 40$

Como $v = e/t$; igualamos :

$$v = \frac{e_1}{t_1} = \frac{e_2}{t_2}$$

$$\frac{x}{10} = \frac{x+40}{12}$$

Resolviendo: $x = 200\ m$

Por tanto, en 10 s la liebre recorre : **200 *metros*** RPTA. B

2.- Luis y Alberto parten de una ciudad a otra, situada a 24 km de la primera; Luis lo hace con una rapidez de 2 km por hora menos que Alberto; llegando a su destino con una hora de retraso. ¿Cuál es la rapidez de Luis?

A) 5 km/h *B) 4 km/h* *C) 6 km/h* *D) 8 km/h* *E) 9 km/h* *UNMSM - 90*

Resolución:

Ambos recorren la misma distancia (24 *km*), pero lo hacen con rapideces diferentes y por consiguiente en tiempos diferentes.

Ordenaremos la información en este cuadro :

	rapidez	tiempo	espacio
Luis	$v - 2$	$t + 1$	24
Alberto	v	t	24

Ecuaciones a plantear :

$(v - 2)\,(t + 1) = 24$ ...(1)

$v \,.\, t = 24$ ...(2)

De (1) : $vt + v - 2t - 2 = 24 \Rightarrow v = 2\,(t + 1)$

En (2) : $2\,(t + 1)\,.\,t = 24 \;\Rightarrow\; (t + 4)\,(t - 3) = 0$

La solución positiva es $t = 3$, de donde : $v = 8$

La rapidez de Luis es : $v - 2 =$ **6 *km/h*** RPTA. C

3.- Un jet posee una rapidez de 2,2 MACH y un helicóptero posee una rapidez de 0,52 MACH. Hallar la diferencia de tiempo al recorrer 1 190 km. Considerar 1 MACH = V_{sonido} = 1 190 km / h

A) 1,92 h *B) 1,47 h* *C) 0,45 h* *D) 0,59 h* *E) 1 h* ***PUCP 96 - I***

Resolución:

Para el jet :

$$t_j = \frac{e}{v} = \frac{1\,190\ km}{2{,}2\ \text{MACH}} = \frac{1\,190\ km}{2{,}2\ (1\,190\ km/h)} = \frac{1}{2{,}2}\,h$$

Para el helicóptero :

$$t_h = \frac{e}{v} = \frac{1\,190\ km}{0{,}52\ \text{MACH}} = \frac{1\,190\ km}{0{,}52\ (1\,190\ km/h)} = \frac{1}{0{,}52}\,h$$

Se pide la diferencia de tiempos :

$$t_h - t_j = \frac{1}{0{,}52} - \frac{1}{2{,}2} = 1{,}47\ horas$$ RPTA. B

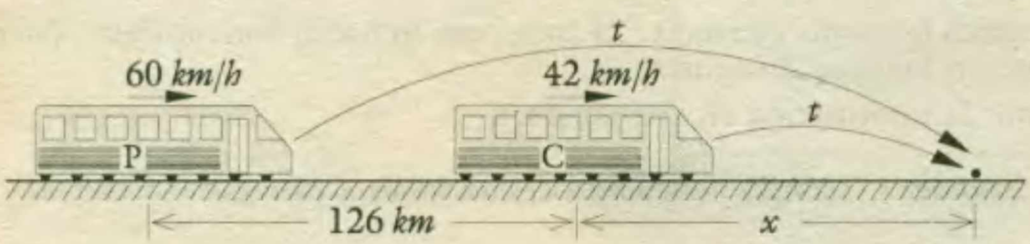
4.- Un tren de carga que va a 42 km/h es seguido 3 horas después por un tren de pasajeros que va a 60 km/h. ¿En cuántas horas el tren de pasajeros alcanzará al de carga y a qué distancia del punto de partida?

A) 5 h ; 350 km *B) 6 h ; 420 km* *C) 9 h ; 500 km*

D) 8 h ; 600 km *E) 7 h ; 420 km* ***UPCH - 96***

Resolución:

Durante las 3 primeras *horas*, el tren de carga se aleja una distancia de: $42 \cdot 3 = 126\ km$. Luego se inicia una persecución en la que el tiempo de alcance se obtiene por fórmula:



$$\text{tiempo de alcance} = \frac{\text{separación}}{\text{dif. de veloc.}} = \frac{126}{60 - 42} = 7\ horas$$

Además, de la figura : $x = 42 \cdot 7 = 294$

El punto de alcance está a: $126 + x = 126 + 294 =$ **420 km**

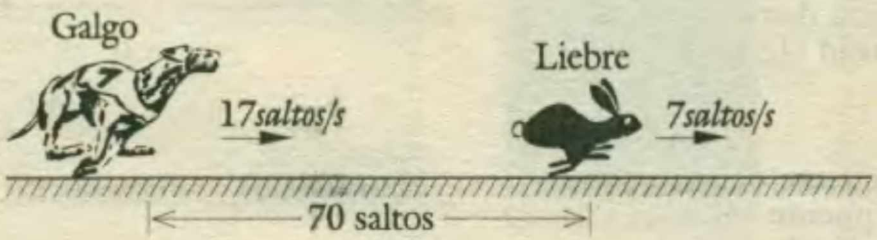
del punto de partida. **RPTA. E**

5.- Una liebre que da 7 saltos por segundo, tiene ya dados 70 saltos cuando se suelta un galgo tras ella. El galgo da 17 saltos por segundo. ¿Cuánto tardará éste en alcanzarla si los saltos son de igual longitud?

A) 7 s *B) 10 s* *C) 17 s* *D) 12 s* *E) N.A.*

Resolución:

De los datos se elabora el siguiente esquema :



Por fórmula : t de alcance $= \dfrac{70}{17-7} = \dfrac{70}{10} =$ **7 s** **RPTA. A**

6.- Dos móviles distantes 2 000 metros se acercan con rapideces de 10 m/s y 40 m/s. ¿Al cabo de qué tiempo se encuentran?

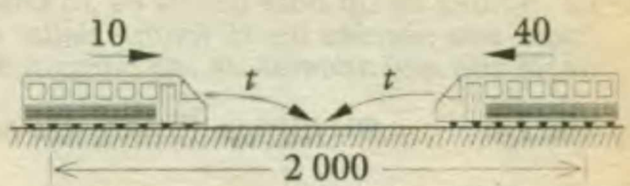
A) 10 s *B) 20 s* *C) 30 s* *D) 40 s* *E) 50 s*

Resolución:

Con los datos, hacemos un esquema, y aplicamos:

$$t.\ \text{encuentro} = \frac{2\ 000}{10+40}$$

$$= \mathbf{40\ s}$$ **RPTA. D**

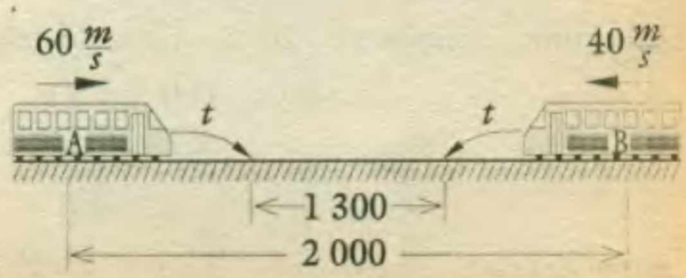


7.- Dos móviles están separados por una distancia de 2 300 metros. Si se desplazan al encuentro con rapideces de 60 m/s y 40 m/s respectivamente. ¿Al cabo de qué tiempo estarán separados 1 300 m por primera vez?

A) 12 s *B) 8 s* *C) 10 s* *D) 15 s* *E) 13 s*

Resolución:

En cada *segundo*, el móvil A, avanza 60 *m* y B avanza 40 *m*, es decir entre los dos se acercan $60 + 40 = 100\ m$.



Deben moverse de tal forma que se aproximen : 2 300 - 1 300 = 1 000 m y planteamos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{En 1 } \textit{segundo} \text{ se acercan } 100\, m \\ \text{En } x \textit{ segundos} \text{ se acercan } 1000\, m\end{array}\right\} x = \frac{1000 \cdot 1}{100} = 10\, s$$

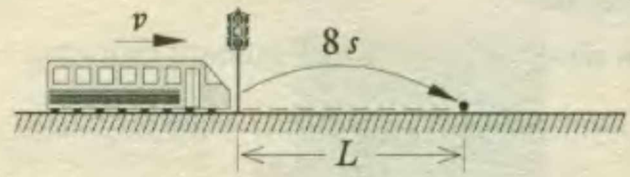
RPTA. C

8.- Un tren demora 8 segundos en pasar delante de un semáforo y el triple de tiempo en cruzar un puente de 400 m de largo. ¿Cuál es su longitud?

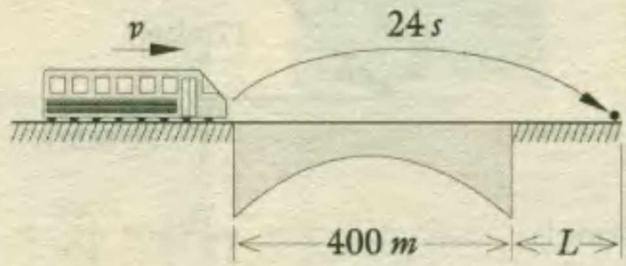
A) 200 m B) 180 m C) 160 m D) 280 m E) 400 m

Resolución:

Para pasar delante del semáforo debe recorrer una distancia igual a su propia longitud (L) en 8 s.



Para cruzar el puente debe recorrer la longitud del puente (400 m) y la propia (L) en : 8 · 3 = 24 s.



Pero en ambos casos la rapidez es la misma; luego se puede establecer que:

$$\frac{L}{8} = \frac{400 + L}{24} \Rightarrow 3L = 400 + L$$

$$L = 200 \textit{ metros}$$

RPTA. A

9.- La rapidez de un bote de ida es 20 km/h; cuando va de regreso (contra la corriente), logra una rapidez de 15 km/h. Hallar el espacio recorrido si va de Iquitos a Nauta; sabiendo que además de ida demora 5 horas menos que de regreso.

A) 500 km B) 150 km C) 225 km D) 300 km E) N.A. PUCP 93 - I

Resolución:

	v	t	e
A favor de la corriente	20	x - 5	d
Contra la corriente	15	x	d

Igualando espacios : $20\,(x - 5) = 15\,(x)$

$$20\,x - 100 = 15\,x$$

$$5\,x = 100$$

$$x = 20$$

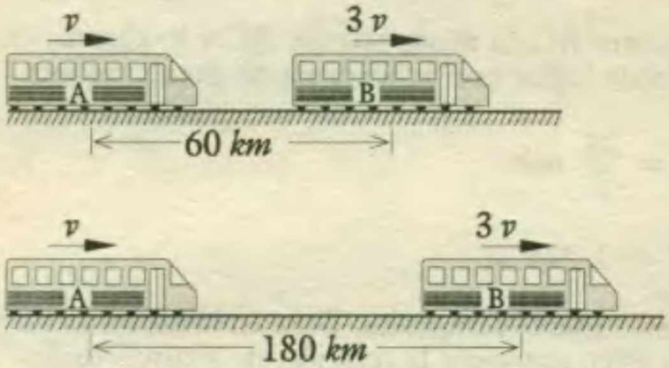
Espacio recorrido : $d = 15\,x = 15(20) = 300\, km$ RPTA. D

10.- Dos móviles se mueven en el mismo sentido; la rapidez de uno es el triple de la del otro. En un instante dado la ventaja es de 60 km y después de 2 horas se ha triplicado la ventaja. ¿Cuál es la rapidez del más rápido?

A) 45 km/h B) 60 km/h C) 75 km/h D) 90 km/h E) 120 km/h PUCP 93 - II

Resolución:

En el primer esquema indicamos la ventaja de 60 *km* y en el segundo la ventaja triplicada, es decir de : 60 · 3 = 180 *km*, que ocurre 2 *horas* después.



Podemos deducir que B en 2 *horas* avanzó: $3v$. 2, y A avanzó : v . 2; como la ventaja ha aumentado en 120 *km*, se tiene:

$$3v \cdot 2 - v \cdot 2 = 180 - 60$$

$$4v = 120$$

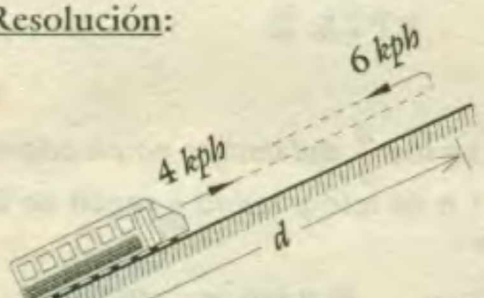
$$\Rightarrow \quad v = 30$$

La rapidez del mayor es de : $3v = 30 \cdot 3 =$ **90 *km / h*** RPTA. D

11.- Un auto sube una cuesta a una rapidez de 4 km/h y baja a una rapidez de 6 km/h. Si en subir y bajar emplea 20 horas. ¿En cuánto disminuirá el tiempo de subida si su rapidez de subida se incrementa en 1 km/h?

A) 2 h 24 min B) 2 h 48 min C) 3 h 24 min D) 2 h E) 3 h UNMSM - 95

Resolución:



Sean t_1 y t_2 los tiempos de subida y bajada respectivamente. Luego :

$$d = 4\,t_1 = 6\,t_2 \Rightarrow \frac{t_1}{3} = \frac{t_2}{2}$$

Además : $t_1 + t_2 = 20$ *horas*

Obtenemos: $t_1 = 12h$; $t_2 = 8h$; $d = 48h$

Si la rapidez de subida fuese: 4 + 1 = 5 *km/h* ; el nuevo tiempo de subida sería :

$$t_1' = \frac{d}{v} = \frac{48}{5} = 9\,\frac{3}{5} = 9\,h\;36\;min$$

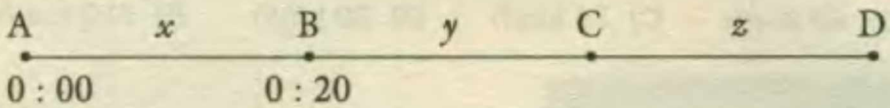
El tiempo disminuye en : 12 *h* - 9 *h* 36 *min* = **2 *h* 24 *min*** RPTA. A

12.- Un campesino va caminando de su casa hacia su chacra. Parte a medianoche y recorre 70 m cada minuto. En cierto trecho del camino sube a la moto de un amigo que había partido del mismo lugar a las 0 horas 20 minutos con una rapidez de 150 m por minuto. El campesino llega a su destino 20 minutos antes que si hubiese continuado andando. Calcular la distancia entre la casa y la chacra.

A) 5 450 m B) 5 250 m C) 4 500 m D) 4 250 m E) 600 m UNMSM - 91

Resolución:

En el recorrido del campesino hay 3 tramos : AB , BC y CD.



1°) El tramo AB lo recorre el campesino con una rapidez de 70 m/min entonces: $AB = x = 70\ (20) = 1\ 400\ m$

2°) En el tramo BC, mientras el campesino recorre BC, la moto recorre AC y lo alcanza en C; este tramo dura un tiempo t, que se puede hallar con la fórmula de persecuciones :

$$t = \frac{x}{v(\text{moto}) - v(\text{camp.})} = \frac{1\ 400}{150-70} = \frac{35}{2}\ min$$

entonces, $BC = y = v_c \cdot \frac{35}{2} = 70 \cdot \frac{35}{2} = 1\ 225\ m$

3°) El tramo CD lo realiza la moto, pero sabemos que el campesino llega en la moto con 20 *minutos* menos del tiempo que demoraría sólo; entonces la relación de tiempo será:

$$\frac{z}{70} - 20 = \frac{z}{150}$$

Y resolviendo : $CD = z = 2\ 625\ m$

4°) Distancia total = AB + BC + CD = 1 400 + 1 225 + 2 625

= 5 250 m

La distancia de su casa a la chacra es : **5 250 m** **RPTA. B**

13.- La bajada de una montaña se hace ordinariamente en los $\frac{4}{5}$ del tiempo empleado en la subida. Una persona baja desde la cúspide en 1 h 56 min y subió a razón de 50 metros cada 5 minutos. La altura de la montaña es :

A) 1 160,20 m B) 1 160 m C) 1 450 m D) 1 400,20 m E) 2 691 m PUCP 90 - I

Resolución:

Según los datos la bajada demora : $t_b = 1\ h\ 56\ min$, y sabemos que:

$t_b = \frac{4}{5}\ t_s$; entonces podemos hallar el tiempo se subida así :

$$1\ h\ 56\ min = \frac{4}{5}\ t_s \Rightarrow t_s = 2\ h\ 25\ min = 145\ min$$

La rapidez de subida es : $\frac{50\,m}{5\,min} = 10\ \frac{m}{min}$, luego la altura de la montaña es :

$h = v_s \cdot t_s = 10\ \frac{m}{min} \cdot 145\ min =$ **1 450 m** **RPTA. C**

14.- Una liebre perseguida por un galgo se encuentra a 40 saltos de liebre, del galgo. La liebre da 4 saltos mientras que el galgo da 3, pero 5 saltos del galgo equivalen a 7 saltos de liebre. ¿Cuántos salto dio la liebre antes de ser alcanzada?

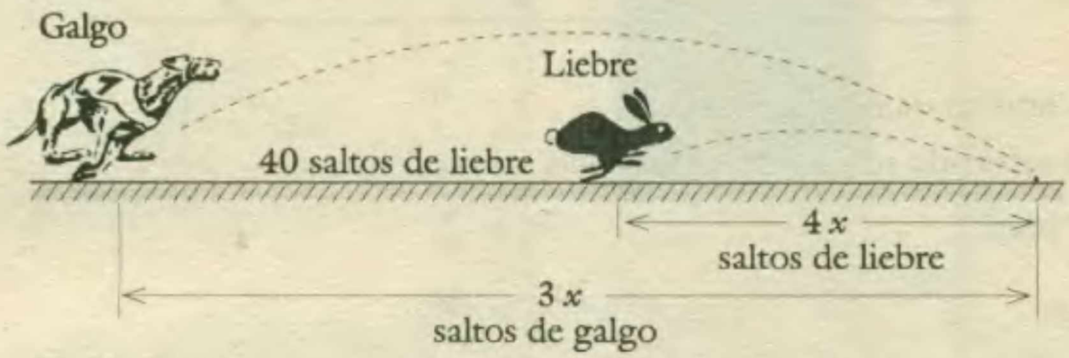
A) 800 B) 1 600 C) 1 500 D) 750 E) 550 UPCH - 88

Resolución:

La liebre dará $4x$ saltos antes de ser alcanzada y en ese mismo tiempo el galgo dará $3x$ saltos.

Si cada salto de la liebre mide "a", el salto de galgo mide $\frac{7}{5}\,a$.

Ahora según el esquema podemos plantear :



$$3x\,.\left(\frac{7}{5}a\right) = 4x\,.\,(a) + 40\,a$$

$$\frac{21x}{5} = 4x + 40 \quad \Rightarrow \quad x = 200$$

\# de saltos que dio la liebre : $4x =$ **800** RPTA. A

15.- Un muchacho y una chica parten al mismo tiempo en bicicleta, del mismo lugar, en el mismo camino y en la misma dirección; él a 6 kilómetros por hora y ella a 5 kilómetros por hora. Después de 3 horas, el muchacho regresa. ¿A qué distancia del punto de partida encuentra a la muchacha?

A) 16 km B) 16,9 km C) 16,4 km D) 17 km E) Ninguna

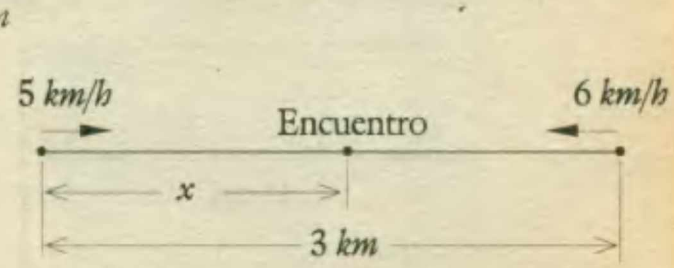
Resolución:

En 3 *horas* el muchacho recorre: $6 \cdot 3 = 18$ *km*

Y la muchacha recorre : $5 \cdot 3 = 15$ *km*

La distancia que los separa es: $18 - 15 = 3$ *km*

A partir de esta situación, el muchacho regresa y el tiempo de encuentro se puede hallar por fórmula :



$$t = \frac{3}{5+6} = \frac{3}{11}$$

$$x = v\ .\ t = 5 \cdot \frac{3}{11} \approx 1{,}44$$

Desde el punto de partida, la posición del punto de encuentro es de :

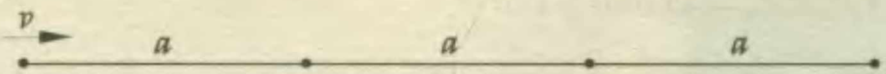
$15 + 1{,}44 =$ **16,44 *km*** RPTA. C

16.- Un viajero, después de recorrer la tercera parte de su viaje, disminuye su rapidez en su tercera parte. ¿Cuánto más habrá aumentado el tiempo de duración del viaje?

A) en su cuarta parte *B) en su tercera parte* *C) en sus dos terceras partes*

D) en su mitad *E) en un tanto igual*

Resolución:



El tiempo normal está dado por : $t = \dfrac{3a}{v}$ ... (1)

Cuando el recorrido se hace del otro modo, tenemos que :

Para la 3ra parte : $t_1 = \dfrac{a}{v}$

Para el resto : $t_2 = \dfrac{2a}{2v/3} = \dfrac{3a}{v}$

El nuevo tiempo para todo el recorrido es : $t' = \dfrac{4a}{v}$ ... (2)

El aumento en el tiempo es : $t' - t = \dfrac{a}{v}$

Es decir : $\dfrac{\Delta t}{t} = \dfrac{a/v}{3a/v} = \dfrac{1}{3}$

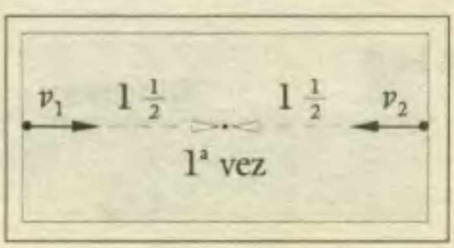
El aumento es de : $\dfrac{1}{3}\,t$, **la tercera parte** RPTA. B

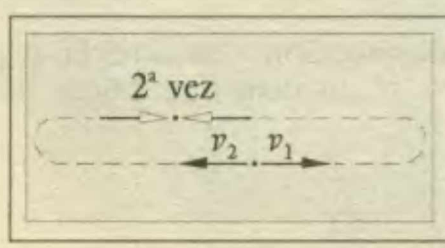
17.- Jorge y Enrique apostaron una carrera para atravesar una piscina partiendo de los extremos opuestos. Después de minuto y medio se cruzaron en la mitad de la piscina. Si no pierden tiempo al voltear y mantienen sus respectivas rapideces. ¿A cuántos minutos después del momento de partida se cruzan por segunda vez?

A) 3 *B) $4\frac{1}{2}$* *C) 6* *D) $7\frac{1}{2}$* *E) 9*

Resolución:

Sea "d" la longitud de la piscina y v_1, v_2 las rapideces.





$\dfrac{d}{v_1 + v_2} = 1\dfrac{1}{2}\ min$ $\dfrac{2d}{v_1 + v_2} = t$

Se observa que : $t = 2\left(1\frac{1}{2}\right) = 3\ min$

El segundo encuentro se produce luego de : $1\frac{1}{2} + 3 = 4\frac{1}{2}\ min$

del momento de la partida. RPTA. B

18.- Dos carros salen de dos ciudades situadas a 180 km, yendo uno al encuentro del otro; el primero recorre cada día 6 km más que el segundo y el número de días durante los cuales viajan es igual a la mitad del número de km que el segundo recorre en un día. ¿Cuál es la distancia recorrida por cada uno antes del encuentro?

A) 100 km y 80 km ***B) 98 km y 82 km*** ***C) 120 km y 60 km***

D) 118 km y 62 km ***E) 108 y 72 km***

Resolución:

	rapidez	tiempo	espacio
primero	$2x + 6$	x	$(2x + 6) . x$
segundo	$2x$	x	$2x . x$

Además se sabe : $e_1 + e_2 = 180$

Del cuadro, tenemos los espacio e_1 y e_2 que reemplazamos :

$$2x\,(x + 3) + 2x\,.\,x = 180$$

$$2x^2 + 3x - 90 = 0$$

$$(x - 6)\,(2x + 15) = 0$$

Es decir : $x = 6 \Rightarrow e_1 = 108 \wedge e_2 = 72$ RPTA. E

19.- En una carrera de motocicletas tres máquinas salieron simultáneamente. La segunda hace 15 km/h menos que la primera y 3 km/h más que la tercera. La primera llega a la meta 12 minutos antes que la segunda y la segunda llega a la meta 3 minutos antes que la tercera. Si durante el recorrido no se registraron paradas; determinar :

I) La distancia de la carrera

II) La rapidez de la 2^{da} motocicleta

A) I) 110 km II) 85 km/h ***D) I) 100 km II) 75 km/h***

B) I) 80 km II) 70 km/h ***E) I) 90 km II) 75 km/h***

C) I) 70 km II) 60 km/h

Resolución:

Con los datos, anotamos las rapideces y tiempos en el cuadro adjunto :

	v	t
Primera	$x + 15$	t
Segunda	x	$t + 1/5$
Tercera	$x - 3$	$t + 1/4$

Como la distancia es la misma:

$$(x + 15)\, t = x\left(t + \frac{1}{5}\right) = (x - 3)\left(t + \frac{1}{4}\right)$$

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos : $t = 1\ h \wedge x = 75\ km/h$

La distancia es : $e = (x + 15)\,.\,t = (75 + 15) \cdot 1 =$ **90 km**

La rapidez de la segunda: $x =$ **75 km/h** RPTA. E

20.- Dos automóviles partieron al mismo tiempo de un mismo punto en una misma dirección. La rapidez del primer automóvil es de 50 km/h y la del segundo de 40 km/h. Después de media hora, del mismo punto y en la misma dirección parte un tercer automóvil que alcanza al primero 1,5 h más tarde que al segundo. Hallar la rapidez del tercer automóvil.

A) $90\,\frac{km}{h}$ *B)* $75\,\frac{km}{h}$ *C)* $72\,\frac{km}{h}$ *D)* $60\,\frac{km}{h}$ *E)* $36\,\frac{km}{h}$

Resolución:

El tercer automóvil, cuya rapidez la indicaremos por v, parte 1/2 *hora* después y alcanza al segundo luego de un tiempo t.

En vista que ambos hasta dicho momento recorren la misma distancia, planteamos :

$$v_3\,.\,t_3 = v_2\,.\,t_2$$

$$v\,.\,t = 40\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

Luego de 1,5 h alcanza al primero, entonces del mismo modo :

$$v\,.\,(t + 1{,}5) = 50\,(t + 2)$$

Resolviendo, obtenemos : $v =$ **60 km/h** $\wedge$ $t = 1\ h$ RPTA. D

21.- Dos trenes salen uno hacia el otro de dos puntos separados 650 km. Si salen al mismo tiempo, se encontrarán al cabo de 10 horas, pero si uno de ellos sale 4 horas y 20 minutos antes que el otro, se encontrarán 8 horas después de la salida del segundo. Determinar la rapidez del tren más rápido.

A) 40 km/h *B) 35 km/h* *C) 30 km/h* *D) 45 km/h* *E) N.A.*

Resolución:

Todos los datos se pueden resumir en este cuadro :

	Primer Caso		Segundo Caso	
	v	t	v	t
1^er^ tren	x	$10\,h$	x	$12\frac{1}{3}\,h$
2^do^ tren	y	$10\,h$	y	$8\,h$

Sumando los espacios $(e = v\,.\,t)$ en cada caso, planteamos :

$$10\,x + 10\,y = 650$$

$$12\,\frac{1}{3}\,.\,x + 8\,y = 650$$

Resolviendo, obtenemos : $x = 30\ \frac{km}{h}$; $y = 35\ \frac{km}{h}$

El más rápido viaja a : $35\ \frac{km}{h}$ **RPTA. B**

22.- Dos cuerpos se mueven a lo largo de una circunferencia. El primero recorre la circunferencia completa 5 segundos más de prisa que el segundo. Si giran en el mismo sentido coincidirán cada 100 segundos. ¿Qué porción de circunferencia (en grados) recorre el más rápido en un segundo?

A) 16º ***B) 14º*** ***C) 22º*** ***D) 18º*** ***E) 20º***

Resolución:

Si el primero recorre x grados en un *segundo*, recorre toda la circunferencia en : $\frac{360}{x}$ *segundos*.

Si el segundo recorre y grados en un *segundo*, recorre toda la circunferencia en : $\frac{360}{y}$ *segundos*.

Entonces ; si : $x > y$, se puede establecer que :

$$\frac{360}{y} - \frac{360}{x} = 5 \qquad \ldots \qquad (1)$$

En cada *segundo* el más rápido recorre $x - y$ *grados* más que el otro y para coincidir con el otro, deben pasar 100 *segundos*, luego :

$$100\,(x - y) = 360 \qquad \ldots \qquad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos : $x = 18^{o}$; $y = 14{,}4^{o}$

El más rápido recorre : 18^{o} por *segundo* **RPTA. D**

23.- La distancia entre dos ciudades a lo largo de un río es 80 km. Un barco tarda en hacer un viaje de ida y vuelta entre las ciudades 8 horas y 20 minutos. Hallar la rapidez del barco en aguas en reposo, sabiendo que la rapidez del agua es 4 km/h.

A) 20 km/h B) 10 km/h C) 8 km/h D) 12 km/h E) 14 km/h

Resolución:

Sea x la rapidez del barco cuando no hay corriente (aguas en reposo), entonces :

$$t\text{ (ida)} + t\text{ (regreso)} = 8\ h\ 20\ min$$

$$\Rightarrow \quad \frac{80\ km}{v} + \frac{80\ km}{v} = 8\ \frac{1}{3}\ h$$

$$\Rightarrow \quad \frac{80}{x+4} + \frac{80}{x-4} = \frac{25}{3}$$

Resolviendo : $x =$ **$20\ km/h$** RPTA. A

24.- Un barco en un río recorre la distancia entre A y B en dos días. En el viaje de regreso tarda 3 días. Determinar el tiempo que tardará una balsa que flota en el río en llegar de A a B.

A) 9 días B) 10 días C) 14 días D) 11 días E) 12 días

Resolución:

Distancia entre A y B : d

A favor de la corriente demora 2 *días* en recorrer d :

$$d = (b + r)\ .\ 2$$

En contra de la corriente demora 3 *días* en recorrer d :

$$d = (b - r)\ .\ 3$$

Resolviendo en función de d :

$$b = \frac{5d}{12} \quad ; \quad r = \frac{d}{12}$$

La balsa flotando, recorrerá d a una rapidez r en un tiempo igual a :

$$\frac{d}{r} = \frac{d}{d/12} = 12\ días$$ RPTA. E

25.- Pedro sale de su casa con una rapidez de "a" km/h y 3 horas más tarde, su padre sale a buscarlo, siguiendo el mismo camino, con una rapidez de (a + b) km/h. ¿En cuántas horas lo alcanzará?

A) 2b /a B) 3b /a C) $\frac{a+b}{a}$ ***D)*** $\frac{3a}{b}$ ***E)*** $\frac{a+b}{2b}$

Resolución:

En las 3 *horas*, Pedro se aleja una distancia $3a$. A partir de ahí, en cada hora, el papá le descontará: $a + b - a = b\ km$.

El tiempo que demora en descontarle $3a$ es : $\dfrac{3a}{b}$ (en *horas*) RPTA. B

26.- Un tren que pasa por delante de un observador inmóvil, demora 7 segundos y al pasar por una estación de 360 m demora 22 segundos. Hallar su velocidad.

A) 20 m/s *B) 21 m/s* *C) 22 m/s* *D) 23 m/s* *E) 24 m/s*

Resolución:

Recorre su propia longitud "L" en 7 segundos.

Recorre "$L + 360$" en 22 segundos

$$\therefore \quad \frac{L}{7} = \frac{L + 360}{22} \quad \Rightarrow \quad L = 168\ m.$$

Si recorre en 168 m en 7 segundos su velocidad es $168 \div 7 =$ $24\ m/s$ RPTA. E

27.- Si voy a 10 km/h me recorro 1 hora, pero si camino 5 km más en cada hora. Me adelanto una hora. ¿Con qué velocidad debo ir para llegar a la hora exacta?

A) 10 km/h *B) 11 km/h* *C) 12 km/h* *D) 13 km/h* *E) 14 km/h*

Resolución:

Sea "t" el tiempo que le permite llegar a la hora exacta y "d" la distancia a recorrer :

$$10\,(t + 1) = d = (10 + 5)\,.\,(t - 1)$$

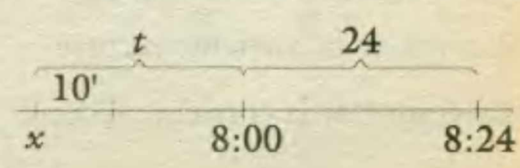
Resolviendo : $t = 5$; $d = 60$

La velocidad adecuada será $\dfrac{60}{5} = 12\,\dfrac{km}{h}$ RPTA. C

28.- Un estudiante aborda todos los días un microbús para llegar a su clase a las 8 : 00 a.m pero hoy perdió el microbús y este paso 10 minutos después del primero y arribó en el doble del tiempo normal, llegando a las 8 : 24 a.m. ¿A qué hora partió?

A) 7 : 46 *B) 7 : 40* *C) 6 : 30* *D) 8 : 00* *E) 8 : 15*

Resolución:



En el diagrama, t representa el tiempo normal del recorrido.

Por los datos : $(t - 10) + 24 = 2t \quad \Rightarrow \quad t = 14$

Partió 14' antes de las 8 : 00 , entonces, $x =$ 7 : 46 RPTA. A

29.- *¿Cuántas hora emplea un tren que viaja una velocidad promedio de 40 km/h entre dos ciudades para recorrer "a" kilómetros si hace "n" paradas de "m" minutos cada una?*

A) $\dfrac{a + 2mn}{60}$ *B)* $\dfrac{3a - 2mn}{60}$ *C)* $\dfrac{2a - 3mn}{60}$ *D)* $\dfrac{3a + 2mn}{60}$ *E)* $\dfrac{3a + 5mn}{60}$

Resolución:

Tiempo recorrido sin considerar las paradas : $t = \dfrac{a\ km}{40\ k/h} = \dfrac{a}{40}\ horas$

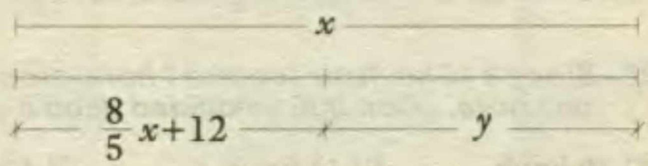
Tiempo de paradas : $n \,.\, m\ min = \dfrac{n\,m}{60}\ horas$

Tiempo total : $\dfrac{a}{40} + \dfrac{n\,m}{60} = \dfrac{3a + 2mn}{120} = \dfrac{3a + 2mn}{60}$ RPTA. D

30.- *Un atleta tarda en llegar a la meta 2 minutos, observándose que en cada minuto recorrió los 3/5 de la distancia que lo separaba de la meta más 12 metros. ¿Qué distancia recorrió?*

A) 101 m *B) 102 m* *C) 103 m* *D) 104 m* *E) 105 m*

Resolución:



En el 2[do] minuto recorre :

$\dfrac{3}{5}\,y + 12 = y$

Luego : $y = 30\,km$

Ahora, según el diagrama : $x = \left(\dfrac{3}{5}x + 12\right) + 30$

Y resolviendo : $x = 105\ m$ RPTA. E

31.- *Un hombre rema 60 km río abajo empleando el mismo tiempo que emplea en remar 20 km río arriba. Hallar la velocidad del bote en aguas tranquilas, si la velocidad de la corriente es: 5 km/h.*

A) 10 km/h *B) 20 km/h* *C) 30 km/h* *D) 40 km/h* *E) 50 km/h*

Resolución:

Sea "b" la velocidad del bote en aguas tranquilas :

A favor de la corriente recorre 60 km : $(b + 5)\,.\,t = 60$

En contra de la corriente recorre 20 km : $(b - 5)\,.\,t = 20$

Luego : $\dfrac{b+5}{b-5} = \dfrac{3}{1} \Rightarrow b = 10\ km/h$ RPTA. A

32.- Un carro sale de "A" hacia "B" a 80 km/h y regresa 50 km/h después de 16 hora. Si el carro se detuvo en "B" por 2 horas y se detuvo 1 hora en el camino de regreso. Determinar la distancia AB

A) 100 km *B) 200 km* *C) 300 km* *D) 400 km* *E) 500 km*

Resolución:

El tiempo de movimiento efectivo es : 16 - (2 + 1) = 13 *horas*.

El de ida : t ; el de regreso : $13 - t$

$AB = 80\,(t) = 50\,(13 - t) \quad \Rightarrow \quad t = 5$

$\therefore \quad AB =$ **400 *km*** RPTA. D

33.- Juan se dirige desde su casa a la academia en bicicleta empleando un tiempo de 30 minutos; para volver, aumenta su velocidad inicial en 4 m/s demorándose esta vez 6 minutos menos. ¿Qué distancia viajó en total?

A) 55,6 km *B) 57,9 km* *C) 57,6 km* *D) 56,7 km* *E) 55,9 km*

Resolución:

Según los datos : $d = v\,.\,30\,min = (v + 4)\,.\,(30 - 6)min$

$\therefore \quad v\,.\,5 = (v + 4)\,.\,4 \quad \Rightarrow \quad v = 16\,m/s$

$d = 16\,m/s\,.\,30\,min = 16\,.\,1\,800 = 28\,800\,m$

Distancia total = $2d = 57\,600\,m =$ **57,6 *km*** RPTA. C

34.- Una persona camina a razón de 7 km por cada 5 horas; 8 horas después sale de la misma cuidad otra persona que recorre 5 km en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido la primera al ser alcanzada por la segunda?

A) 70 km *B) 71 km* *C) 72 km* *D) 73 km* *E) 74 km*

Resolución:

La rapidez de la 1ra persona la obtenemos así : $v_1 = \frac{7}{5}$

La rapidez de la 2da persona la obtenemos así : $v_2 = \frac{5}{3}$

Ahora encontraremos la separación de las personas cuando comienza la persecución : $d = 8\,.\,\frac{7}{5} = \frac{56}{5}$

Tiempo de alcance : $\dfrac{\frac{56}{5}}{\frac{5}{3} - \frac{7}{5}} = \dfrac{\frac{56}{5}}{\frac{4}{15}} = 42$ *horas*

Tiempo total : 50 horas; distancia : 50 . 7/5 = **70 *km*** RPTA. A

35.- Dos atletas están separados por una distancia de 1 030 m los dos corren al encuentro con velocidades de 65 m/min y 85 m/min, si la primera salió 2 minutos antes que la segunda y si el encuentro se produjo a las 12 a.m. ¿A qué hora se puso a correr el segundo atleta?

A) 11 : 50   ***B) 11 : 54***   ***C) 11 : 44***   ***D) 11 : 55***   ***E) N.A.***

Resolución:

La 1[ra] en 2 minutos se aproxima 2 . 65 = 130 metros, entonces la separación se reduce a 1 030 - 130 = 900 *metros*

El encuentro demora : $\dfrac{900}{65+85} = 6$ *minutos*

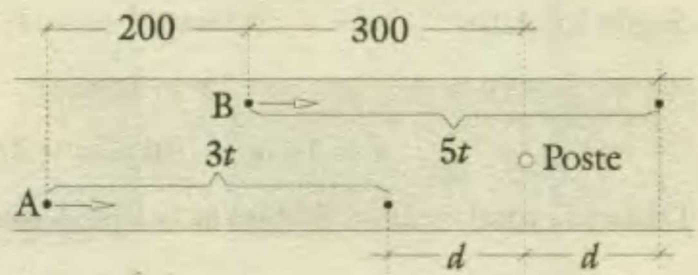
Y se produjo a las 12 : 00, entonces el segundo partió a las **11 : 54**   RPTA. B

36.- Dos móviles "A" y "B" están separados una distancia de 200 m, "B" delante de "A" y ambos se mueven con velocidades de V_b = 5 m/s y V_a = 3 m/s si delante de "B" a 300 m se encuentra un poste, ¿después de qué tiempo de haber partido simultáneamente en el mismo sentido estos móviles equidistan el poste?

A) 100 s   ***B) 101 s***   ***C) 102 s***   ***D) 103 s***   ***E) 104 s***

Resolución:

Toda la información queda anotada en el diagrama:



$$\left.\begin{aligned}300+d&=5t\\500-d&=3t\end{aligned}\right\} \qquad 800 = 8t \qquad t = 100\,s$$

RPTA. A

37.- Dos viajeros parten del mismo tiempo de "A" y "B" el uno hacia el otro. Al encontrarse el primero ha recorrido 16 km más que el segundo, pero a partir de este momento el segundo cuadruplica su velocidad llegando ambos al mismo tiempo. ¿Cuál es la relación de las velocidades del 2[do] al 1[er] móvil?

A) 1/2   ***B) 1/3***   ***C) 1/4***   ***D) 1/5***   ***E) 1/6***

Resolución:

Hasta el punto de encuentro :   A |—— $v_1 . t$ ——|—— $v_2 . t$ ——| B

Después del encuentro :   A |—— $4\,v_2 . t'$ ——|—— $v_1 . t'$ ——| B

Relacionando : $\dfrac{v_1 . t}{4v_2 . t'} = \dfrac{v_2 . t}{v_1 . t'}$

Luego se obtiene : $v_1^2 = 4\,v_2^2 \Rightarrow \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{1}{2}$ RPTA. A

38.- Un auto sale de Cajamarca a las 5 p.m y llega a Lima al día siguiente a las 2 p.m. Otro auto sale de la misma ciudad a las 7 p.m y llega a Lima al día siguiente a las 9 a.m. ¿A qué hora el segundo auto alcanzó al primero?

A) 1 p.m.   *B) 2 p.m*   *C) 3 p.m*   *D) 4 p.m*   *E) 5 p.m*

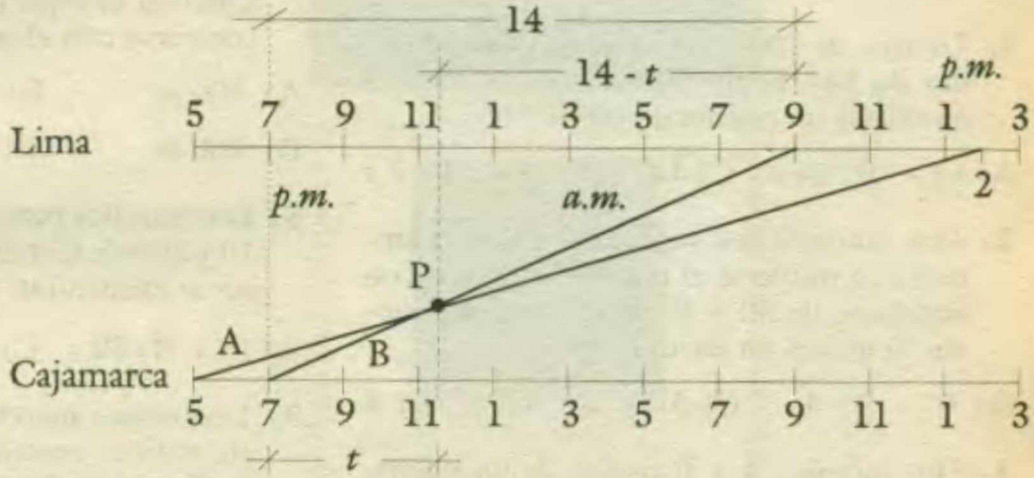
Resolución:

1er auto : A

2do auto : B

B alcanza a A en P.

A partir del gráfico emplearemos la proporcionalidad de los lados de los triángulos semejantes mostrados :



$$\frac{t}{14-t} = \frac{t+2}{14-t+5}$$

De donde : $19t - t^2 = 14t + 28 - t^2 - 2t \Rightarrow t = 4$

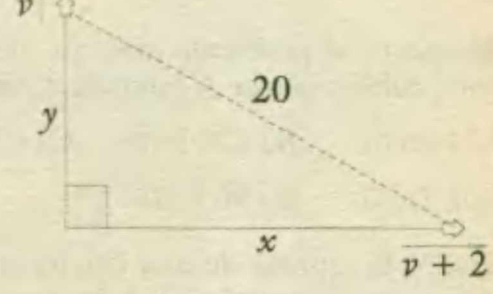
B alcanzó a A 4 *h* después de las 9, a las **13 *h***   RPTA. A

39.- Dos botes parten de un mismo punto y viajan en un ángulo recto a las 4 : 00 p.m se encuentran a 20 km de distancia entre si. Si el primer bote se desplaza 2 km/h más rápido que el segundo. ¿A qué velocidad se desplazan ambos botes?

A) 5 : 7   *B) 7 : 8*   *C) 6 : 8*   *D) 9 : 5*   *E) 8 : 6*

Resolución

El tiempo de recorrido es de 2 horas



Del gráfico : $x^2 + y^2 = 20^2$

Donde : $x = (v + 2) \cdot 2$; $y = v \cdot 2$

Entonces : $(2v + 4)^2 + (2v)^2 = 20^2$

$$4v^2 + 16v + 16 + 4v^2 = 400$$

$$v^2 + 2v - 48 = 0 \Rightarrow v = 6$$

Los botes se desplazan a **6 *km/h* y 8 *km/h***   RPTA. C

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Un tren de 100 *m* de largo lleva una rapidez de 144 *km/h*. Hallar cuánto demora en cruzar un puente de 40 *m*.

A) 14 *s* B) 24 *s* C) 4 *s* D) 3,5 *s* E) 7 *s*

2.- Dos automóviles separados 280 *km* empiezan a moverse el uno hacia el otro con rapideces de 30 y 40 *km/h*. ¿Cuántas *horas* demoran en encontrarse?

A) 6 B) 4 C) 5 D) 4,5 E) 8

3.- Dos móviles A y B parten de un mismo punto. El primero lo hace a las 6 de la mañana y el segundo a las 9 de la mañana. Se desea saber la *hora* en que se encuentran, si van a 35 y 50 *km/h* respectivamente.

A) 4 *p.m.* B) 3 *p.m.* C) 2 *p.m.*
D) 1 *p.m.* E) N.A.

4.- Hallar la rapidez que debe emplear un móvil A para alcanzar a otro B que se desplaza a 30 *km/h* , sabiendo que A parte 2 *h* después que B y debe alcanzarlo en 90 *min*.

A) 60 *km/h* B) 70 *km/h* C) 50 *km/h*
D) 80 *km/h* E) 64 *km/h*

5.- Respecto al problema anterior. ¿Cuántos *kms.* debe recorrer A para alcanzar a B?

A) 124 *km/h* B) 120 *km/h* C) 105 *km/h*
D) 108 *km/h* E) 96 *km/h*

6.- Hallar la rapidez de una lancha en *km/h*. sabiendo que emplea 2 *h* en navegar 30 *km* a favor de la corriente y 6 *h* en recorrer dicha distancia en sentido contrario.

A) 10 B) 12 C) 8 D) 11 E) 15

7.- Dos móviles parten de dos puntos distantes 1 000 *m*. El primero en partir lo hace a 40 *m/s* y el otro 10 *s* después a 72 *km/h*. Calcular el espacio recorrido antes de encontrarse con el otro.

A) 100 *m* B) 200 *m* C) 400 *m*
D) 800 *m* E) 1 000 *m*

8.- Dos móviles parten en el mismo sentido a 10 y 30 *m/s*. Calcular después de qué tiempo se encuentran distanciados 1 000 *m*.

A) 10 *s* B) 20 *s* C) 30 *s* D) 40 *s* E) 50 *s*

9.- Dos trenes marchan sobre vías paralelas en sentidos contrarios con rapideces de 18 *km/h* y 24 *km/h* respectivamente. ¿Cuál es la longitud del segundo tren si un pasajero colocado en el primero observa que demora 12 *segundos* en pasar delante de él?

A) 140 *m* B) 110 *m* C) 130 *m*
D) 120 *m* E) N.A

10.- Un automóvil para recorrer la distancia entre A y B; que es 900 *km* va de ida a 30 *km/h* y de regreso por la misma ruta a 50 *km/h*. ¿Cuál fue su rapidez promedio en el recorrido de ida y vuelta?

A) 40 *km/h* B) 36 *km/h* C) 37,5 *km/h*
D) 38 *km/h* E) 45 *km/h*

NIVEL B

11.- Un ciclista va a 40 *km/h* y llega a su destino a las 13 *horas*. Si va a 60 *km/h* llega a las 11 *horas*. ¿A qué rapidez debe ir para llegar a las 12 *horas*?

A) 40 *km/h* B) 50 *km/h* C) 48 *km/h*
D) 55 *km/h* E) 60 *km/h*

12.- Dos automóviles A y B separados por una distancia de 240 *km*, parten al mismo tiempo, uno al encuentro del otro, con rapideces de 42 *km/h* y 38 *km/h* respecti-

vamente. ¿Después de cuántas *horas* se encuentran y a qué distancia de los respectivos puntos de partida?

A) 3 *h* ; 126 *km* ; 120 *km*

B) 2 *h* ; 126 *km* ; 124 *km*

C) 3 *h* ; 140 *km* ; 100 *km*

D) 2 *h* ; 125 *km* ; 115 *km*

E) 3 *h* ; 126 *km* ; 114 *km*

13.- Un tren parte de A a las 6 *a.m.* y llega a B a las 4 *p.m.* Otro parte de B a las 7 *a.m.* y llega A, a las 3 *p.m.* ¿A qué *hora* se encontraron en el camino?

A) 9 *a.m.* B) 10 *a.m.* C) 11 *a.m.*

D) 1 *p.m.* E) 2 *p.m.*

14.- Un pasajero, junto a las ventanillas de un tren A, observa que otro tren B, de 110 *m* de longitud tarda 11 *s* en pasar delante de él cuando ambos trenes marchan en la misma dirección, mientras que cuando lo hacen en direcciones contrarias tarda solamente 1 *segundo*. Calcular la rapidez del tren (en *m/s*) que va más despacio.

A) 50 B) 60 C) 35 D) 36 E) 64

15.- Hallar la rapidez de un motociclista en *km/h*, sabiendo que si la aumenta en 10 *km/h* , recorrería 120 *km* en 36 *minutos* menos.

A) 36 B) 30 C) 20 D) 40 E) 48

16.- Dos ciclistas separados por 240 *km* parten al mismo tiempo. Si van en el mismo sentido se encuentran luego de 8 *horas*, pero si van en sentidos opuestos se encuentran luego de 5 *horas*. ¿Cuál es la rapidez de cada uno? (en *km/h*)

A) 39 - 9 B) 36 - 12 C) 32 - 16

D) 40 - 8 E) N.A.

17.- Dos móviles inicialmente separados por 2 000 *metros* se acercan con rapideces de 36 y 72 *km/h*. Hallar al cabo de cuántos *segundos* se encuentran alejados por segunda vez 1 000 *m*.

A) 20 B) 40 C) 60 D) 80 E) 100

18.- La rapidez de una canoa, en aguas en reposo es de 12 *km/h*. Sabiendo que recorre 36 *km* aguas abajo y regresa al punto de partida en un tiempo de 8 *h*, hallar la rapidez de la corriente del río, en *km/h*.

A) 5 B) 8 C) 6 D) 7 E) 9

19.- En el problema anterior, hallar la rapidez promedio de la canoa para el viaje de ida y vuelta.

A) 12 B) 10 C) 8 D) 9 E) 6,5

20.- Una madre y su hija trabajan en la misma oficina. La hija de su casa a la oficina emplea 30 *minutos* y la madre 40 *minutos*. ¿En cuántos *minutos* alcanzará la hija a su madre si ésta sale 8 *minutos* antes?

A) 12 B) 24 C) 6 D) 12 E) N.A.

21.- Para ir de un punto a otro, una persona camina a razón de 8 *km/h* y para volver al punto de partida lo hace a razón de 5 *km/h*. Se desea saber la distancia que hay entre los puntos sabiendo que en el viaje de ida y vuelta ha empleado en total 13 *horas*.

A) 20 *km* B) 30 *km* C) 40 *km*

D) 50 *km* E) 60 *km*

22.- Desde "A" parten dos peatones con velocidades de 10 *km/h* y 15 *km/h* con dirección a "B"; al mismo tiempo parte desde "B" con dirección a "A" un ciclista con velocidad constante, si éste se cruza con uno los peatones 2 *horas* después de que se cruzó con el otro. Hallar la velocidad del ciclista, si la distancia de "A" hasta "B" es de 420 *km*.

A) 10 *km/h* B) 20 *km/h* C) 30 *km/h*

D) 40 *km/h* E) 50 *km/h*

23.- Dos móviles distantes 200 *km* salen al encuentro desde dos puntos "A" y "B" con

velocidades de 60 *km/h* y 40 *km/h*. ¿En qué tiempo se encontrarán y a qué distancia de "A"?

A) 1*h* ; 140*km* D) 1*h* ; 340*km*

B) 2*h* ; 120*km* E) 3*h* ; 120*km*

C) 2*h* ; 230*km*

24.- Un tren pardó 6 *segundos* en pasar por un semáforo y 24 *segundos* en atravesar un tunel de 240 *metros* de longitud. ¿Cuánto tardará en cruzar una estación de 160 *metros* de longitud?

A) 17*s* B) 18*s* C) 19*s* D) 20*s* E) 21*s*

25.- Dos atletas están separados 150 m, si recorren al encuentro este se produce al cabo de 10 segundos, pero si corren el uno en pos del otro el encuentro se produce a los 30 segundos. Hallar la velocidad del más veloz.

A) 8 *m/s* B) 9 *m/s* C) 10 *m/s*

D) 11 *m/s* E) 11 *m/s*

NIVEL C

26.- En una carrera sobre una distancia dada *d*, a rapidez uniforme. A puede vencer a B por 20 *metros*. B puede vencer a C por 10 *metros*, y A puede vencer a C por 28 *metros*. Entonces *d*, en *metros*, es igual a:

A) Falta información D) 116

B) 58 E) 120

C) 100

27.- Pedro, Juan y Carlos hacen un recorrido de 100 *kilómetros* así: Pedro y Carlos parten en un automóvil a una rapidez de 25 *km/h*, al mismo tiempo que Juan sale a pie a 5 *km/h*. A cierta distancia, Carlos se baja del carro y continúa caminando a 5 *km/h*. Pedro se devuelve, recoge a Juan y continúa la marcha llegando al lugar de destino al mismo tiempo que Carlos. El número de *horas* que emplearon en el viaje fue :

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) N.A.

28.- Un tren viaja de A hacia B y tiene un accidente 1 *hora* después de la partida. Permaneció parado por media *hora* y después arrancó con una rapidez igual a los 4/5 de la que traía, llegando a B con *horas* de retardo. Si el tren hubiera recorrido 80 *km* más, antes de que hubiese sucedido el accidente, habría llegado con una *hora* de retardo. Entonces la rapidez del tren era de:

A) 20 *km/h* B) 30 *km/h* C) 40 *km/h*

D) 50 *km/h* E) 60 *km/h*

29.- Una lancha va a favor de la corriente de A a B en 6 *horas* y de B a A en 8 *horas*. Si apaga el motor. ¿En qué tiempo recorrerá AB?

A) 12 *h* B) 24 *h* C) 48 *h*

D) 16 *h* E) N.A.

30.- Un chico robó flores de un jardín y después de andar 80 pasos empezó a perseguirle el jardinero. El chico da 4 pasos mientras el jardinero da 3, pero cinco pasos de éste equivalen a 7 de aquel. ¿Cuántos pasos dió el jardinero para alcanzar al chico y cuántos éste, mientras duró la persecución?

A) 1 500 y 1 300 D) 1 200 y 1 600

B) 1 600 y 1 200 E) 1 200 y 2 000

C) 2 000 y 1 200

31.- Una persona sale de su casa todos los días a la misma hora y llega a su centro de trabajo a la hora exacta. Un día salió atrasado 25 minutos y duplica su velocidad aún así llega retrasado 10 minutos. ¿Cuánto tiempo demora en llegar a su trabajo normalmente?

A) 10' B) 20' C) 60' D) 40' E) 30'

32.- Un ciclista viajando desde "A" hacia "B" a 80 *km/h* retorna por el mismo camino a 70 *km/h*. Si hace el recorrido en forma contínua y en un tiempo total de 6 h. ¿Qué distancia

hay de "A" hacia "B"?

A) 224km B) 146km C) 354km

D) 265km E) 385km

33.- Un corsario descubre un barco mercante a 20 millas de sotavento a las 10 : 45$a.m$; con una buena brisa se dirige hacia él, a una velocidad de 15 millas por hora mientras que el mercante trata de escapar a 10 millas por hora. Después de 3 horas el barco corsario aumenta su velocidad en 5 millas por hora. ¿A qué hora al alcanzará el corsario al mercante?

A) 1:15 B) 2:15 C) 3:15 D) 4:15 E) N.A.

34.- Un autobús recorre su ruta en tres etapas iguales usando en las dos últimas el doble de la velocidad que en;la etapa anterior, demorando en total 21 horas. Cierto día observó que 2/5 de lo recorrido es igual a 7/5 de lo que falta recorrer. ¿Cuántas horas ha viajado hasta el momento?

A) 10 B) 40 C) 50 D) 20 E) 30

35.- Una persona sale de su casa y llega a su trabajo en 30 minutos de camino a una velocidad constante. Un día que salió normalmente de su casa en mitad de su trayecto se detiene por un intervalo de 20 minutos. Luego renueva su movimiento duplicando su velocidad hasta llegar a su centro de trabajo. ¿Cuánto tiempo tiempo retrsado llega a su trabajo?

A) 10.5' B) 12.5' C) 11.5' D) 8.5' E) N.A.

36.- Un conductor de carros tiene que recorrer de un pueblo "A" a un pueblo "B". Si se dirigiera a una velocidad de 100 km/h llegaría a las 3 $p.m$ y si conduciera a 150 km/h llegaría a 1 la $p.m$ ¿cuál sería la velocidad que debe emplear para llegar a las 2$p.m$?

A) 110 B) 150 C) 130 D) 125 E) 120

37.- Navegando a favor de la corriente, un vapor desarrolla 20 km por *hora;* navegando en contra solo 15 km por hora. En ir desde el embarcadero de la ciudad A hasta el desenbarcadero de la cuidad B tarda 5 horas menos que en el viaje de regreso. ¿Qué distancia hay entre estas dos cuidades?

A) 320km B) 170km C) ·196km

D) 120km E) 300km

38.- De una estación parte un tren a una velocida de4 20 km/h poco después de la misma estación en una vía paralela parte otro tren en el mismo sentido pero a una velocidad de 68 m/h. Si el observador situado en el primer tren observa que demora 18 segundos en pasar. ¿Cuál es la longitud del 2do tren?

A) 220m B) 230m C) 240m

D) 250m E) 260m

39.- Dos personas están en orillas opuestas de un lago y comienzan a remar al mismo tiempo. La velocidad de cada uno es constante y cuando se cruzan éstas a 80 m de la orilla derecha, continuan remando y llegando a la costa, vuelven y reman nuevamente, cruzandose esta vez a 46 m de la orilla izquierda. ¿Qué ancho tiene el lago?

A) 188 m B) 190 m C) 206 m

D) 200m E) 194m

40.- Dos trenes parten al mismo tiempo con velocidades constantes de dos puntos distantes 300 km hacia el encuentro. Desde el punto de encuentro, el que partió de A llega a B en 50min, y el que partió de B, llega al punto A en 3 h 20 min. Hallar la velocidad del tren que partió de B

A) 25 km/h D) 60 km/h

B) 30 km/h E) N.A.

C) 50 km/h

PARADOJAS DE ZENON

Del primer enfrentamiento serio que conocemos del pensamiento humano con los procesos infinitos surgieron las paradojas de Zenón, "*inmensamente profundas*", como los calificó Bertrand Russell. La verdad es que no se sabe muy bien cuál fue la intención de Zenón al proponerlas y que, ni siquiera, en el caso de la del Estadio, se entiende muy bien la propuesta de Zenón. Las conocemos sobre todo a través de Aristóteles, quien las fulmina rápida y un tanto insatisfactoriamente.

Aquiles y la tortuga es la primera de las cuatro. Aquiles y la tortuga hacen una carrera. La rapidez de Aquiles es diez veces superior a la de la tortuga. Por eso, generosamente, Aquiles concede una ventaja inicial a la tortuga. El saldrá del punto 0 y la tortuga del punto 1 de la regla comienza a moverse. Cuando Aquiles haya avanzado hasta el punto 1, la tortuga estará en el punto 1+1/10 = 1,1. Cuando Aquiles llegue al punto 1,1 la tortuga estará en el punto 1,1 + (0,1/10) = 1,11. Cuando Aquiles esté en el punto 1,11 entonces la tortuga estará en el punto 1,111. Así la tortuga siempre va por delante de Aquiles y nunca es alcanzada. ¿?

La segunda paradoja se llama **La dicotomía**, o división por dos. Va así : El movimiento no existe, porque para moverte una distancia de una unidad (1) hace falta que recorras antes el primer 1/2 y cuando lo hayas hecho, te quedará otro tanto por recorrer. Ahora para recorrer el segundo 1/2 hace falta que recorras antes el primer 1/4 y aún te queda otro tanto, y asi sucesivamente. Como para recorrer cualquier distancia necesitas tiempo, resulta que necesitarías un tiempo infinito para pasar de cualquier sitio a cualquier otro. Por tanto, el movimiento no existe. ¿?

La tercera es la de **La flecha**. La flecha que has lanzado no se mueve, aunque te parezca lo contrario, porque en cada instante que consideres, la flecha está quieta en un lugar determinado, lo que equivale a que está en todo instante en reposo.¿?

La cuarta paradoja, del **Estadio**, es la más controvertida. Una de las posibles interpretaciones, que viene también a atacar la concepción atomista del espacio y el tiempo, es la siguiente. Supongamos que, efectivamente, hay una unidad atómica de espacio y otra de tiempo. Imaginémonos tres filas de unas cuantas unidades de espacio ocupadas por objetos materiales como indica la *Fig*. 1.

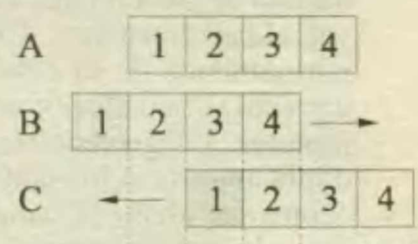


Fig.1

Durante una unidad de tiempo, A se queda quieta, B se mueve hacia la *derecha* una unidad de espacio y C se mueve una unidad de espacio hacia la *izquierda*. Así pues, al final de dicha unidad de tiempo, las cosas estarán como lo indica la *Fig*. 2.

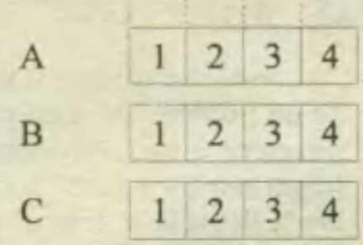


Fig.2

Olvidémonos ahora de A. Resulta entonces que, en una unidad de tiempo, C se ha movido hacia la izquierda de B dos unidades de espacio. Esto significa que se puede tomar una unidad de tiempo más pequeña igual al tiempo que C tarda en moverse una unidad de espacio respecto de B. Por tanto, el tiempo no puede estar constituído por unidades atómicas. ¿?

De la vida de Zenón de Elea apenas se sabe nada. Su actividad se sitúa hacia el año 450 a. de C. fue miembro de la escuela de Parménides en Elea, en el golfo de Tarento, y su método de pensamiento dialéctico parece anticipar al de Sócrates, aficionado también a colocar al interlocutor en situación de pensar y resolverse sus problemas más bien que darle soluciones hechas.

26 Combinatoria

El análisis combinatorio o combinatoria, estudia los métodos que permiten calcular sistemáticamente el número de grupos distintos que pueden formarse con los elementos de un conjunto dado, así como también las propiedades de estos agrupamientos.

Existen dos principios fundamentales, que constituyen la base para calcular las diferentes agrupaciones :

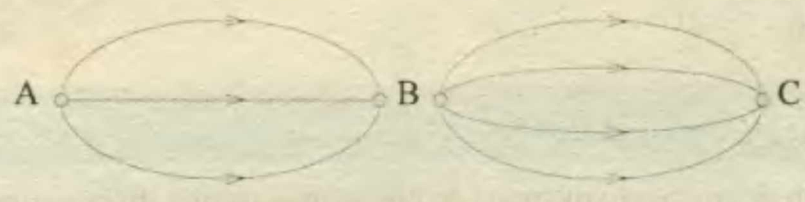
I) PRINCIPIO MULTIPLICATIVO

Si algún suceso puede ocurrir de m maneras diferentes y a continuación de este suceso, otro puede ocurrir de n maneras diferentes, entonces el número de maneras en que los sucesos pueden ocurrir está dada por : $m \cdot n$.

Este principio puede ampliarse a la realización de más de dos sucesos, es decir, si el número de maneras es : $m, n, p, q, ...$; el número total será : $m \cdot n \cdot p \cdot q ...$

Ejm: De una ciudad A a otra ciudad B hay 3 caminos diferentes y de B a la ciudad C hay 4 caminos diferentes. Hallar el número de caminos distintos para ir de A a C, pasando por B.

Resolución:



1^{er} Suceso : Ir de A a B, que puede hacerse por $m = 3$ caminos.

2^{do} Suceso : Ir de B a C, que puede hacerse por $n = 4$ caminos.

$\therefore$ Ambos sucesos pueden ocurrir de : $3 \cdot 4 = 12$ maneras diferentes

Rpta : 12

II) PRINCIPIO ADITIVO

Si un suceso A puede ocurrir de "m" maneras y otro suceso B puede hacerse de "n" maneras, pero cuando ocurre A, no puede ocurrir B, es decir no pueden ocurrir simultáneamente, el número de maneras en que puede ocurrir A ó B es : "$m + n$".

Este principio puede ampliarse a más de dos sucesos del tipo indicado, para ello sólo debe sumarse el número de maneras de cada suceso.

Ejm: Para viajar de una ciudad a otra disponemos de 2 líneas de transporte aéreo o de 3 líneas de transporte terrestre. ¿De cuántas maneras podemos hacer el viaje?

Resolución:

Como no se puede viajar por vía aérea y vía terrestre a la vez, tenemos que elegir así :

Por vía aérea : 2 líneas

Por vía terrestre : 3 líneas

$\therefore$ Hay 2 + 3 = 5 maneras diferentes de hacer el viaje.

Rpta : 5

III) FACTORIAL DE UN NUMERO

El factorial de un número entero positivo se define como el producto de todos los enteros positivos menores o iguales que él y se representa por $n!$.

$$n! = n \cdot (n-1) \; \ldots \; 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ejemplos:

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4!$

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4!$

IV) VARIACIONES

Una variación de un cierto número de elementos es una disposición de una parte de ellos en un orden determinado.

Ejm: Las variaciones de las 3 letras *a*, *b*, *c*; tomadas de 2 en 2 son : *ab*, *ac*, *ba*, *bc*, *ca* y *cb*. Cualquiera de estas disposiciones se llama variación.

Símbolo y fórmula :

El símbolo V_r^n representa el número de variaciones de n elementos tomados de r en r. La fórmula que da el valor de V_r^n es :

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad ; \quad n \geq r$$

Así, V_3^5 representa el número de variaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3 y su valor de acuerdo a la fórmula es :

$$V_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2!} = 60$$

VI) PERMUTACIONES

Una permutación de un cierto número de elementos es una disposición en la que intervienen todos ellos, en un orden determinado. Este orden es el que distingue a una permutación de otra.

Ejm: Las permutaciones de las tres letras : *a*, *b*, *c* son : *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*. Cualquiera de estas disposiciones es una permutación.

Símbolo y fórmula :

El símbolo P_n representa al número de permutaciones de *n* elementos y su valor se obtiene con la fórmula :

$$P_n = n! \qquad ; \qquad n \geq 0$$

Así, P_5 representa las permutaciones de 5 elementos y su valor es :

$$P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$$

Nota: Obsérvese que las permutaciones son un caso particular de las variaciones, pues intervienen todos los elementos en lugar de sólo una parte de ellos. En efecto :

$$V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = P_n$$

VII) COMBINACIONES

Una combinación de un cierto número de elementos es una disposición de una parte de ellos sin tomar en cuenta el orden en que se forma la disposición.

Ejm: Las combinaciones de las tres letras : *a*, *b* y *c* tomadas de 2 en 2 son : *ab*, *bc* y *ac*. Cualquiera de estas disposiciones es una combinación.

Símbolo y fórmula :

El símbolo C_r^n representa al número de combinaciones de *n* elementos tomados de *r* en *r*. La fórmula es :

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

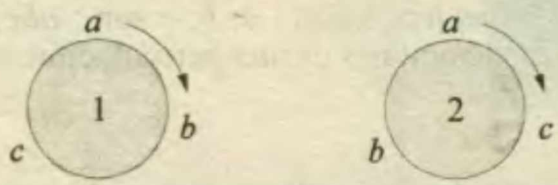
Así, C_3^5 representa al número de combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3. Su valor se obtiene así :

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

VII) PERMUTACIONES CIRCULARES

El número de maneras en que se pueden colocar n elementos alrededor de una circunferencia es igual a $(n - 1)!$

Ejm: 3 personas se pueden sentar alrededor de una circunferencia de $(3 - 1)! = 2!$ maneras distintas.



VIII) PERMUTACIONES CON REPETICION

El número P de permutaciones de n elementos, repitiéndose uno de ellos n_1 veces, otro n_2 veces, etc; viene dado por :

$$P = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots} \qquad \text{donde : } n_1 + n_2 + n_3 + \ldots = n$$

Ejm: ¿Cuántas permutaciones pueden formarse con las letras de la palabra SOCORRO?

Aquí tenemos 7 elementos, de los cuales O se repite 3 veces, R se repite 2 veces, las demás letras 1 vez.

$$\text{\# de permutaciones} = \frac{7!}{3!\,2!\,1!\,1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 420$$

PROBLEMAS RESUELTOS

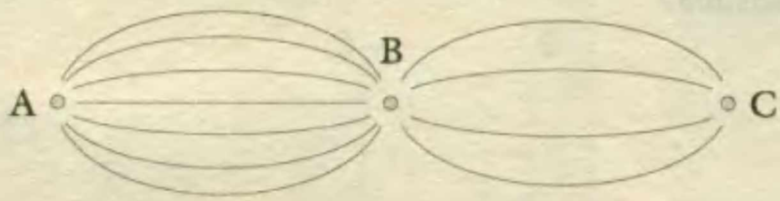
1.- Para ir de la ciudad A a la ciudad B hay 7 caminos; para ir de la ciudad B a la ciudad C hay 4 caminos. El número de caminos distintos que hay para ir de A hacia C, pasando siempre por B, será :

A) 11 *B) 22* *C) 44* *D) 31* *E) 28* ***UNFV - 94***

Resolución:

En este problema, basta con aplicar el principio multiplicativo, según el cual, el primer evento es "ir de A a B" y se puede hacer de 7 maneras; el segundo evento es "ir de B a C" y se puede hacer de 4 maneras, entonces el número de maneras para que se realice un evento después del otro es :

$$7 \cdot 4 = \boxed{28}$$



RPTA. E

2.- En una carrera se tienen 5 participantes; si tomamos uno para el primer lugar. ¿De cuántas formas se pueden ocupar los cuatro puestos restantes?

A) 12 *B) 24* *C) 18* *D) 36* *E) 26* ***PUCP 94 - I***

Resolución:

Sean A, B, C, D, E los cinco participantes. Elegimos A para el primer lugar, que sólo podrá ser ocupado por este participante. Para los demás lugares, los cuatro restantes pueden ubicarse en cualquier orden.

$$A \; \underline{?} \; \underline{?} \; \underline{?} \; \underline{?}$$

Basta con calcular las permutaciones de los 4 restantes, es decir :

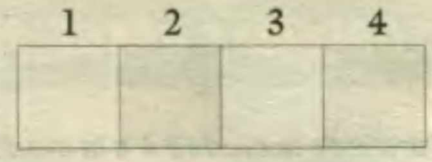
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

De : **24** maneras se puede ocupar los otros cuatro lugares. **RPTA. B**

3.- El número de elementos del conjunto de los números de cuatro cifras tales que las cifras que ocupan la posición par de izquierda a derecha son mayores en uno a la cifra precedente es igual a:

A) 81 *B) 72* *C) 84* *D) 63* *E) 56* ***PUCP 93 - II***

Resolución:



Según la figura que se muestra, las posiciones pares de izquierda a derecha son las zonas sombreadas.

Es decir cada número es de la forma : $\overline{(a-1)\,(a)\,(b-1)\,(b)}$

a puede valer : 2, 3, ... , 9 $\Rightarrow$ 8 valores

b puede valer : 1, 2, 3, ... , 9 $\Rightarrow$ 9 valores

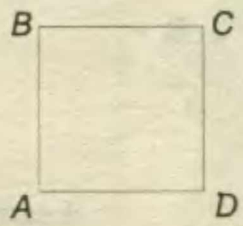
Entonces hay : $8 \cdot 9 =$ **72** posibles números. **RPTA. B**

4.- Una persona está parada en el punto A del cuadrado que se observa en la figura y decide, tirando una moneda hacia cuál de las esquinas próximas se dirigirá. En la próxima esquina volverá a hacer lo mismo. Si tira la moneda 3 veces, diga Ud. ¿Cuál de los recorridos mostrados no es posible?

A) ADCB ***D) ABCD***

B) ADCA ***E) ABAD***

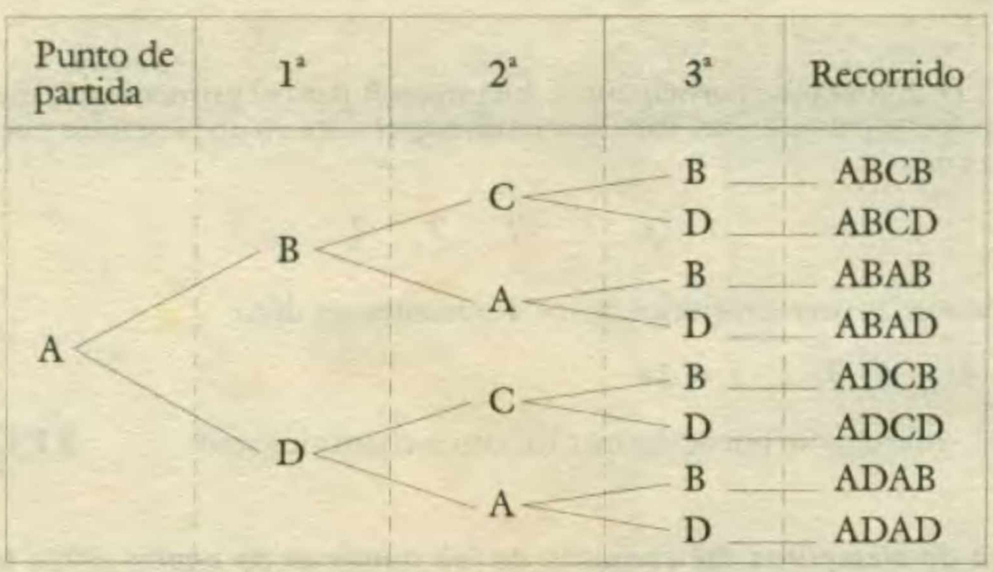
C) ADAB



UNMSM - 84

Resolución:

Determinaremos todas las rutas posibles con 3 tiros sucesivos de moneda, utilizando un diagrama tipo árbol. En el diagrama, cada lanzamiento genera dos opciones, según que la moneda salga CARA ó SELLO:



Observando las alternativas, vemos que el recorrido que no es posible es :

ADCA **RPTA. B**

5.- Se llama capicúa al número de varias cifras que se lee igual de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. ¿Cuántos números capicúas hay entre 100 y 1 000?

A) 500 B) 10 C) 90 D) 200 E) 100 UNMSM - 89

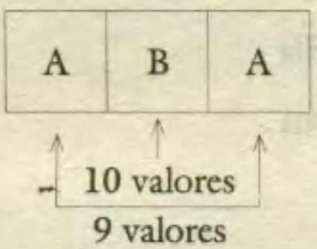
Resolución:

Si son números comprendidos entre 100 y 1 000, éstos deben tener 3 dígitos y para ser capicúas deben ser de la forma $\overline{ABA}$, donde A no puede ser cero, en cambio B sí. Los valores posibles de A y B son :

$$A = 1, 2, 3, \quad ..., 9$$

$$B = 0, 1, 2, 3, ..., 9$$

Luego aplicamos el principio multiplicativo :



$$\# \text{ posibilidades} = 9 \cdot 10 = \boxed{90}$$

RPTA. C

6.- ¿De cuántas formas pueden sentarse 4 personas alrededor de una mesa circular, si una de ellas permanece fija en su asiento?

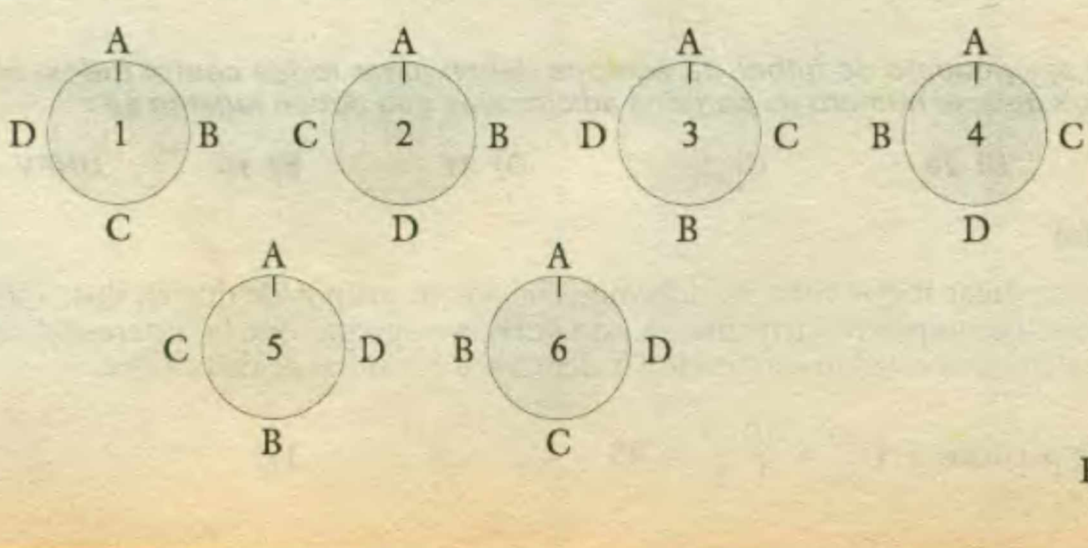
A) 6 B) 24 C) 12 D) 2 E) 1 UNMSM - 89

Resolución:

Se trata de hallar el número de permutaciones circulares con 4 elementos. Sabemos que con n elementos, el número de permutaciones circulares es $(n - 1)!$, entonces :

$$\# \text{ de maneras} = (4 - 1)! = 3! = \boxed{6}$$

En el gráfico, siendo A, B, C, D; las personas, y A la que permanece fija, se indican las 6 permutaciones.



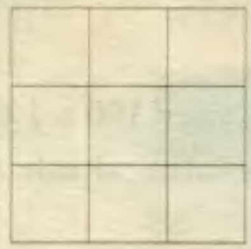
RPTA. A

7.- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar seis libros iguales en un estante, cuya forma es la indicada en la figura, si se desea que en cada casilla haya a lo más un libro en cada fila y en cada columna dos libros?

A) 2 *D) 6*

B) 3 *E) 9*

C) 4

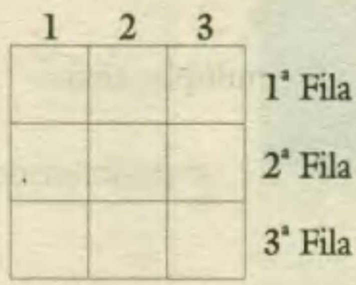


PUCP 90 - I

Resolución:

El proceso equivale a que en cada fila y cada columna haya un casillero vacío.

Procederemos a calcular las diferentes maneras, llenando de arriba hacia abajo.



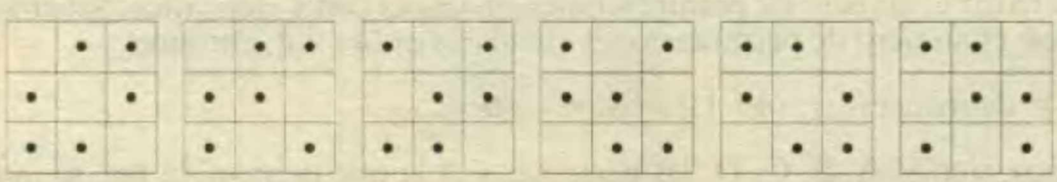
En la 1ª fila : el casillero vacío puede ser cualquiera de los tres.

En la 2ª fila : el casillero vacío puede ser cualquiera de los dos que no se eligieron.

En la 3ª fila : el casillero vacío debe ser el que no se eligió en los dos primeros pasos.

$$\# \text{ de maneras} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Estas 6 disposiciones se indican en el siguiente esquema :



$\therefore$ Se verifica que solo hay : **6** maneras de colocar los libros. **RPTA. D**

8.- En un campeonato de fútbol, 10 equipos deben jugar todos contra todos; si llegan 2 equipos más, el número de partidos adicionales que deben jugarse es :

A) 22 *B) 20* *C) 11* *D) 21* *E) 10* ***UNFV - 94***

Resolución:

Como deben jugar todos entre sí, debemos considerar grupos de dos en dos, a formarse a partir de los 10 equipos participantes, a esto debemos agregar que no interesa el orden, por tanto, calcularemos combinaciones de 10 elementos tomados de dos en dos :

$$\# \text{ de partidos} = C_2^{10} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45 \qquad \dots \qquad (1)$$

Si se incluyen dos equipos más, el número de partidos corresponde al de combinaciones de 12 elementos, tomados de 2 en 2.

$$\# \text{ de partidos} = C_2^{12} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66 \qquad \ldots \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que el número de partidos adicionales a jugarse es:

$$66 - 45 = \boxed{21} \qquad \text{RPTA. D}$$

9.- Se tienen 3 cajas. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden distribuir dos objetos A y B en dichas cajas; pudiendo ser que ambos queden en una misma caja?

A) 3 *B) 6* *C) 1* *D) 9* *E) 2* ***UNI 97 - I***

Resolución:

Representemos las cajas según este esquema:

1ª	2ª	3ª

En ellas puede colocarse A ó B ó simplemente quedará vacía (V) entonces se trata de permutar los elementos A, B, V lo cual da : 3! = 6 maneras.

Además A y B pueden quedar ambos en una misma caja, lo cual puede hacerse de 3 maneras.

Reconociendo que estos sucesos no pueden ocurrir a la vez, diremos que el total de maneras está dado así :

$$6 + 3 = \boxed{9}$$ y las diferentes opciones son:

ABV , AVB , BAV , BVA , VAB , VBA } 6

AB __ __ ; __ AB __ ; __ __ AB } 3

RPTA. D

10.- Dos varones y tres chicas van al cine y encuentran 5 asientos juntos, en un misma fila, donde desean acomodarse. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse, si las 3 chicas no quieren estar una al costado de la otra?

A) 10 *B) 16* *C) 18* *D) 15* *E) 12* ***UNI 94 - I***

Resolución:

Para que se cumplan las condiciones, las mujeres deberán ocupar las posiciones 1; 3 y 5 que aparecen sombreadas y los hombres en las posiciones restantes : 2 y 4.

1	2	3	4	5

$\underline{M_1}$ $\underline{?}$ $\underline{M_2}$ $\underline{?}$ $\underline{M_3}$ $\qquad$ $\underline{?}$ $\underline{H_1}$ $\underline{?}$ $\underline{H_2}$ $\underline{?}$

\# de maneras = 3! $\qquad$ \# de maneras = 2!

Puesto que estos dos sucesos ocurren simultáneamente, aplicaremos el principio multiplicativo, así el número total de personas será :

$$3! \cdot 2! = 6 \cdot 2 = \boxed{12} \qquad \text{RPTA. E}$$

11.- En una reunión hay 10 hombres y 5 mujeres. Se van a formar grupos de 3 personas. ¿Cuántos grupos diferentes se formarán si siempre deben haber 2 mujeres en el grupo?

A) 100 B) 50 C) 10 D) 90 E) 80 UNI 94 - II

Resolución:

De las 3 personas, 2 deben ser mujeres y uno hombre.

1°) Para seleccionar a las mujeres, debemos reconocer que no interesa el orden, por lo tanto el número de maneras es : C_2^5.

2°) Para seleccionar al único hombre, diremos que se dispone de 10 candidatos, por lo tanto habrán 10 opciones.

3°) Por el principio multiplicativo, el número de grupos diferentes es :

$$C_2^5 \cdot 10 = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot 10 = 10 \cdot 10 = \boxed{100} \qquad \text{RPTA. A}$$

12.- En la fecha inaugural de un torneo interclubes de fullbito, los capitanes de equipo intercambiaron banderines y se estrecharon la mano. Un espectador advirtió que la diferencia entre el número de banderines intercambiados y el número de apretones de mano fue 120. ¿Cuántos clubes participaron?

A) 15 B) 16 C) 30 D) 60 E) 61

Resolución:

Sea n el número de clubes participantes. Cada equipo debe llevar banderines para los $(n - 1)$ equipos restantes. Entonces el número de banderines es : $n\,(n - 1)$.

Para los apretones de mano, reconocemos que en cada saludo intervienen los dos capitanes de equipo, asi el número de saludos es:

$$C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$$

La diferencia es 120 : $n\,(n - 1) - \dfrac{n(n-1)}{2} = 120$

ó también : $n\,(n - 1) = 240$; de donde : $n = \boxed{16}$ RPTA. B

13.- Un estudiante tiene 10 posters para colocar en las paredes de su habitación, pero sólo tiene espacio para siete. ¿De cuántas formas posibles puede seleccionar los posters que no va a colocar?

A) 210 *B) 720* *C) 120* *D) 180* *E) 240*

Resolución:

De los 10, debe pegar 7 y descartar : 10 - 7 = 3

Estos 3 que se descartan, no interesan en qué orden se eliminen, por tanto se trata de hallar las combinaciones de los 10 posters, de 3 en 3 es decir : C_3^{10}.

$$C_3^{10} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120 \qquad \text{RPTA. C}$$

14.- Un estudiante debe responder como mínimo 8 preguntas en un examen de 12 preguntas. ¿De cuántas formas posibles puede el estudiante elegir las 8 preguntas a responder?

A) 360 *B) 225* *C) 275* *D) 550* *E) 495*

Resolución:

De las 8 preguntas seleccionadas, no interesa en qué orden las responderá por tanto cada elección es una combinación de 8 elementos tomados de 12 disponibles.

$$\#\text{ de formas} = C_8^{12} = \frac{12!}{8!\,4!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 495 \qquad \text{RPTA. E}$$

15.- Se lanza siete veces una moneda. ¿Cuántos resultados diferentes pueden obtenerse?

A) 70 *B) 120* *C) 128* *D) 49* *E) 98*

Resolución:

Los resultados del lanzamiento de una moneda son dos: CARA y SELLO y el orden en que van apareciendo estos, influye, ya que por ejemplo, no es lo mismo: CCCSSS que CSCSCS.

Se trata, entonces de aplicar el principio multiplicativo de la siguiente manera :

La 1^a vez puede salir C ó S : 2 maneras

La 2^a vez igualmente C ó S : 2 maneras

⋮ ⋮ ⋮

La 7^a vez puede salir C ó S : 2 maneras

Entonces para las 7 veces el número de maneras es :

$$2\cdot 2\cdot 2 \ldots 2 = 2^7 = 128 \qquad \text{RPTA. C}$$

16.- ¿Cuántas banderas bicolores distintas podemos formar usando los colores del arco iris?

A) 42 *B) 56* *C) 63* *D) 98* *E) 105*

Resolución:

Como el arco iris tiene siete colores y observamos que el orden de los colores va a influir en los resultados; el número de banderas coincide con el número de variaciones de siete elementos tomados de dos en dos, es decir :

$$V_2^7 = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 7 \cdot 6 = \boxed{42}$$ RPTA. A

17.- ¿Cuántos números de 5 dígitos tienen como sus dos últimas cifras 2 y 5 en este orden?

A) 900 *B) 899* *C) 999* *D) 998* *E) 990*

Resolución:

Cada número es de la forma :

a	*b*	*c*	2	5

(2 y 5: Fijos)

De aquí : *a* puede tener 9 valores (cifras del 1 al 9)

b puede tener 10 valores (del 0 al 9)

c también 10 valores (del 0 al 9)

En total, la cantidad de números que pueden formarse es :

$9 \cdot 10 \cdot 10 = \boxed{900}$ RPTA. A

18.- ¿Cuántos números de 4 cifras, que sean mayores que 4 000 se pueden formar con los dígitos 1, 3, 5, 7; si estos dígitos pueden repetirse?

A) 140 *B) 128* *C) 90* *D) 108* *E) 120*

Resolución:

Los números son de la forma $\overline{abcd}$ donde los valores que puede tomar *a*, para que supere a 4 000 son 5 ó 7. Los valores siguientes pueden ser cualesquiera de los dígitos dados.

Todo esto se resume en el siguiente esquema :

↑	↑	↑	↑
5	1	1	1
7	3	3	3
	5	5	5
	7	7	7

$2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 4^3$ #s distintos

Se pueden formar entonces :

$2 \cdot 64 = \boxed{128 \text{ números}}$

RPTA. B

19.- Entre las permutaciones de las letras : a, b, c, d. ¿Cuántas principian por "a"?

A) 6 *B) 12* *C) 24* *D) 9* *E) 4*

Resolución:

Las cuatro letras forman : $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ permutaciones, cada una de las letras ocupará el primer lugar un mismo número de veces (4), luego la letra *a*, ocupará el primer lugar.

$$24 / 4 = \boxed{6 \text{ veces}}$$ RPTA. A

20.- Entre las variaciones de a, b, c, d, e; tomadas de 3 en 3. ¿Cuántas contienen a?

A) 60 *B) 36* *C) 30* *D) 72* *E) 120*

Resolución:

Las cinco letras ordenadas de 3 en 3 pueden formar :

$$V_3^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ variaciones}$$

Las cuales contienen : $60 \cdot 3 = 180$ letras y como cada letra entra en los diferentes grupos un mismo número de veces (5), resulta que la letra "*a*" entrará en :

$$\frac{180}{5} = \boxed{36 \text{ grupos}}$$ RPTA. B

21.- ¿De cuántas maneras se pueden colocar 9 libros diferentes sobre una estantería de forma que tres de ellos estén siempre juntos?

A) 7! *B) 2 · 7!* *C) 3 · 7!* *D) 3! · 7!* *E) 6!*

Resolución:

Los 3 libros que irán siempre juntos podrán estarlo de 3! maneras.

Como estos 3 libros han de estar siempre juntos se pueden considerar como uno solo, entonces es como si tuviéramos 7 libros, el bloque anterior y los 6 restantes, que se pueden colocar de 7! maneras.

El total de maneras es : $\boxed{3! \cdot 7!}$ RPTA. D

22.- ¿De cuántas maneras se pueden colocar 4 hombres y 4 mujeres alrededor de una mesa redonda, de manera que cada mujer esté entre dos hombres?

A) 120 *B) 72* *C) 144* *D) 180* *E) 216*

Resolución:

Según la fórmula de permutaciones circulares los 4 hombres se pueden ubicar de: $(4 - 1)! = 6$ maneras diferentes.

En los 4 lugares restantes se pueden permutar las 4 mujeres de : 4! = 24 maneras. Luego, por el principio multiplicativo el total de maneras es :

$$6 \cdot 24 = \boxed{144}$$ **RPTA. C**

23.- ¿Cuántos grupos de 7 miembros se pueden formar con 6 químicos y 5 biólogos de manera que en cada uno se encuentren 4 químicos?

A) 120 B) 225 C) 240 D) 150 E) 90

Resolución:

Los 4 químicos pueden elegirse de entre las 6 disponibles, de acuerdo a la fórmula de combinaciones; el número de maneras es : C_4^6.

Asimismo, los biólogos que deben ser 3 podrán elegirse de entre los 5 disponibles; luego el número de maneras está dado por : C_3^5.

Puesto que ambas elecciones ocurren simultáneamente, el número de maneras viene dado por el producto :

$$C_4^6 \cdot C_3^5 = 15 \cdot 10 = \boxed{150}$$ **RPTA. D**

24.- ¿Cuántos paralelogramos se pueden formar al cortar un sistema de 7 rectas paralelas por otro sistema de 4 rectas paralelas?

A) 180 B) 144 C) 125 D) 216 E) 126

Resolución:

Cada una de las combinaciones de 4 rectas tomadas de 2 en 2 forman un paralelogramo al cortar a cada una de las combinaciones de 7 rectas tomadas de 2 en 2.

El número de paralelogramos es :

$$C_2^4 \cdot C_2^7 = 6 \cdot 21 = \boxed{126}$$ **RPTA. E**

25.- ¿De cuántas maneras pueden distribuirse seis juguetes entre cuatro niños, de modo que a cada niño corresponda un juguete por lo menos?

A) 1 560 B) 960 C) 1 260 D) 2 160 E) 728

Resolución:

A los cuatro niños los nombraremos : A, B, C y D.

1°) Suponemos que a tres niños corresponde un juguete (por ejemplo a: A, B y C) y tres al restante (D). El reparto se podrá efectuar de :

$$V_3^6 = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Pero como cualquiera de los cuatro niños puede ser el que reciba 3 juguetes, el reparto puede hacerse de : 4 · 120 = 480 maneras.

2°) Ahora, que a dos niños (por ejemplo A y B) les toque un juguete y a los otros dos (que serían C y D), dos a cada uno, el número de maneras es :

$$V_2^6 \cdot C_2^4 = 30 \cdot 6 = 180.$$

Pero en lugar de C y D pueden ser cualquiera de los otros dos, entonces el número de maneras esta dado así :

$$C_2^4 \cdot 180 = 1\ 080.$$

3°) Puesto que estos dos sucesos no pueden ocurrir a la vez, el total de maneras viene dado así:

$$480 + 1\ 080 = \mathbf{1\ 560}$$ **RPTA. A**

26.- Un grupo de profesionales asignado a un proyecto está formado por dos ingenieros y tres técnicos y debe ser elegido de una empresa que dispone de cinco ingenieros y ocho técnicos. ¿Cuántos grupos de proyectos distintos pueden formarse a partir de las 13 personas disponibles?

A) 480 ***B) 960*** ***C) 560*** ***D) 1020*** ***E) 720***

Resolución:

Se dispone de 5 ingenieros y 8 técnicos.

Se necesitan 2 ingenieros y 3 técnicos.

El subgrupo de ingenieros puede elegirse de C_2^5 maneras, y el de técnicos, de C_3^8 maneras.

El número de maneras distintas para elegir el grupo completo es :

$$C_2^5 \cdot C_3^8 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \mathbf{560}$$ **RPTA. C**

27.- Diez muchachos desean jugar un partido de baloncesto. ¿De cuántas maneras se pueden hacer dos equipos de cinco jugadores cada uno?

A) 324 ***B) 442*** ***C) 128*** ***D) 252*** ***E) 256***

Resolución:

Si elegimos un equipo que debe tener cinco jugadores, entre los diez muchachos, los que no resulten elegidos formarán el otro equipo; entonces es suficiente con averiguar de cuántas formas se puede elegir un equipo. Veamos :

$$\# \text{ de formas} = C_5^{10} = \frac{10!}{5!\,5!} = \mathbf{252}$$ **RPTA. D**

28.- Una persona puede viajar de "A" a "B" por vía aérea o por vía terrestre y tienen a su disposición 2 líneas aéreas y 5 líneas terrestres. ¿De cuántas maneras distintas puede realizar el viaje?

A) 5 *B) 7* *C) 9* *D) 13* *E) 15*

Resolución:

En este caso, si se elige una opción de viaje, quedan anuladas las demás, porque no pueden ocurrir simultáneamente, entonces se aplica el principio aditivo :

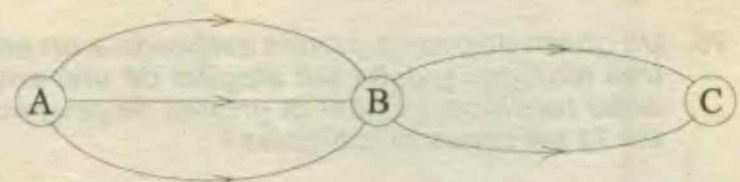
2 líneas aéreas + 5 líneas terrestres = **7 opciones** RPTA. B

29.- Una persona puede viajar de "A" a "B" de 3 formas y de "B" a "C" de 2 formas. ¿De cuántas maneras distintas puede ir de "A" a "C" pasando por "B" y sin retroceder?

A) 5 *B) 6* *C) 7* *D) 8* *E) 9*

Resolución:

Por cada una de las 3 rutas de A a B hay 2 que llevan de B a C.



de maneras = 3 × 2 = **6**

(Principio Multiplicativo) RPTA. B

30.- ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al lanzar una moneda y un dado simultáneamente?

A) 10 *B) 11* *C) 12* *D) 13* *E) 14*

Resolución:

Opciones con la moneda : Cara (C) ó Sello (S) ⇒ 2

Opciones con el dado : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ó 6 ⇒ 6

de resultado diferentes : 2 × 6 = **12**

Ejm : C1 ; S3 ; S6 ; C4 ; ... RPTA. C

31.- En una carrera participan 4 atletas. ¿De cuántas maneras distintas pueden llegar a la meta, si llegan uno a continuación del otro?

A) 20 *B) 21* *C) 22* *D) 23* *E) 24*

Resolución:

Sean *a* , *b* , *c* , *d* los atletas. Pueden llegar a la meta en diverso orden, por ejemplo:

abcd ; *abdc* ; *acdb* ; *bcad* ; ......

Todos los ordenamientos son permutaciones de las 4 letras, y en número está dado por :

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ **24** RPTA. E

32.- Un grupo está formado por 6 personas y desean formar una comisión integrada por un presidente y un secretario. ¿De cuántas maneras puede formarse dicha comisión?

A) 10 *B) 20* *C) 30* *D) 40* *E) 50*

Resolución:

De 6 candidatos se van a elegir 2 y una vez elegidos, se les asignará un cargo, es decir, interesa el orden.

de maneras = Variaciones de 6, tomados de 2 e 2.

$$V_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!} = 30 \qquad \text{RPTA. C}$$

33.- Calcular : $E = \dfrac{15!+16!+17!}{15!\times 17}$

A) 13 *B) 17* *C) 19* *D) 21* *E) 23*

Resolución:

$$E = \frac{15!+16\cdot 15!+17\cdot 16\cdot 15!}{15!\times 17} = \frac{15!(1+16+17\cdot 16)}{15!\times 17}$$

$$E = \frac{17+17\cdot 16}{17} = \frac{17}{17} + \frac{17\cdot 16}{17} = 1 + 16 = 17 \qquad \text{RPTA. B}$$

34.- ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse alrededor de una mesa Juan y sus cinco amigas?

A) 100 *B) 110* *C) 120* *D) 130* *E) 140*

Resolución:

Son en total 6 personas, alrededor de una mesa, y las diferentes maneras son las permutaciones circulares de los 6, cuyo número es:

$$(6-1)! = 5! = 120 \qquad \text{RPTA. C}$$

35.- ¿De cuántas maneras se pueden colocar 10 chicas en una fila, de manera que dos chicas, en particular, no queden juntas?

A) 8 . 9! *B) 9 . 8!* *C) 7 . 9!* *D) 9 . 7!* *E) 5 . 9!*

Resolución:

1º) El número de maneras en que las 10 chicas, sin ninguna restricción, se pueden alinear es 10!.

2º) Si dos de ellas desean estar siempre juntas, el número de maneras en que esto es posible es : 9! 2!.

3º) Para que no queden juntas, el número de maneras es lo que queda al restar los dos resultados anteriores:

$$10! - 9!\,2! = 9!\,(10 - 2) = \boxed{8 \cdot 9!} \qquad \text{RPTA. A}$$

36.- ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra DIVISIBILIDAD?

A) 8 608 640 B) 8 648 600 C) 8 548 670 D) 8 648 640 E) 8 640 650

Resolución:

Contamos en DIVISIBILIDAD : 13 letras → 5 I's; 3 D's; V, S, B, L, A

Es un caso de permutaciones con repetición :

$$\# \text{ de maneras} = \frac{13!}{5!\,3!} = \frac{13!}{6!} = \boxed{8\ 648\ 640} \qquad \text{RPTA. D}$$

37.- Un estante tiene capacidad para 5 libros de R.M. que tienen pasta azul, 4 de R.V. de pasta roja y 3 de matemáticas de pasta amarilla. ¿De cuántas maneras pueden colocarse los libros según los colores?

A) 100 680 B) 103 680 C) 103 600 D) 103 580 E) 105 580

Resolución:

Si los libros de igual color no deben separarse, tenemos :

Los azules : 5! ; los rojos : 4! ; los amarillos : 3!

Y en vista que son 3 grupos, entre ellos : 3!

$$\# \text{ de maneras} = 5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3! = \boxed{103\ 680} \qquad \text{RPTA.B}$$

38.- En una reunión hay 10 hombres y 6 mujeres. Se van a formar grupos de 5 personas. ¿Cuántas grupos diferentes se formarán si siempre deben haber 3 hombres en el grupo?

A) $C_2^6 \,.\, C_3^{10}$ B) $C_6^2 \,.\, C_3^{10}$ C) $C_3^{10} \,.\, C_2^6$ D) $C_6^5 \,.\, C_2^6$ E) N.A.

Resolución:

Para elegir los 3 hombres, el # de maneras es : C_3^{10}

Para completar el grupo de 5 personas, las 2 que faltan, que se elegirán de entre las 6 mujeres; siendo el # de maneras : C_2^6

Por el principio multiplicativo, el # total es : $\boxed{C_3^{10} \,.\, C_2^6}$ RPTA. C

39.- Un estudiante tiene que contestar 8 de 10 preguntas en un examen. ¿De cuántas maneras puede el estudiante escoger las 8 preguntas?

A) 41 *B) 42* *C) 43* *D) 44* *E) 45*

Resolución:

En la selección, no interesará el orden, entonces se aplican combinaciones para elegir 8 de entre 10 preguntas.

$\therefore$ # de maneras = $C_8^{10} \cdot C_2^{10} = $ **45** RPTA. E

40.- En base a los datos del problema anterior, si las 3 primeras preguntas son obligatorias, ¿de cuántas maneras puede escoger las preguntas?

A) 20 *B) 21* *C) 22* *D) 23* *E) 24*

Resolución:

Solo quedarán por escoger : 8 - 3 = 5 preguntas, las cuales estarán disponibles entre las no obligatorias que son 10 - 3 = 7.

El # de maneras será : $C_5^7 \cdot C_2^7 = $ **21** RPTA. B

41.- Se tiene 6 números positivos y 8 números negativos. Se eligen 4 números arbitrariamente sin sustitución y se multiplican. ¿De cuántas formas el producto es un número positivo?

A) 501 *B) 502* *C) 503* *D) 504* *E) 505*

Resolución:

El producto es positivo, en cada uno de estos casos :

A) 4 positivos: C_4^6 B) 2 positivos, 2 negativos: $C_2^6 \cdot C_2^8$ C) 4 negativos: C_4^8

total de maneras : $C_4^6 + C_2^6 \cdot C_2^8 + C_4^8 = $ **505** RPTA. E

42.- ¿De cuántas maneras se pueden sentar en un banco María, Carmen, Esther y Alicia, si Alicia quiere ocupar uno de los extremos del bAnco?

A) 20 *B) 10* *C) 12* *D) 6* *E) 18*

Resolución:

Puesto que Alicia ocupa siempre un extremo, quedan solo 3 lugares para las otras 3, que podrán ser ocupados de 3! = 6 maneras distintas.

Además, como se especifica cual extremo elige Alicia, este número se duplica porque se repetiría el proceso cuando Alicia ocupe el otro extremo.

Entonces, hay $6 \times 2 = 12$ maneras distintas .

RPTA. C

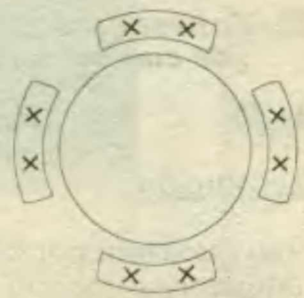
43.- *¿De cuántas maneras 4 parejas de esposos se pueden ubicar en una mesa circular para jugar casino, si éstas parejas juegan siempre juntas?*

A) 90 *B) 93* *C) 96* *D) 99* *E) N.A.*

Resolución:

Las 4 parejas se pueden ubicar según este número de :

$(4 - 1)! = 3! = 6$



Ahora, cada pareja puede permutarse de $2! = 2$ maneras.

El total de maneras $= 6 . 2 . 2 . 2 . 2 =$ **96** RPTA. C

44.- *En un torneo de ajedrez, intervienen 8 jugadores. ¿Cuántas partidas deben programarse, si cada jugador debe enfrentarse 3 veces con cada uno de los restantes?*

A) 56 *B) 48* *C) 72* *D) 60* *E) 84*

Resolución:

Si solo deben enfrentarse una sola vez, el número de partidos de obtiene hallando las combinaciones de los 8, al tomarlos de 2 en 2, esto da :

$$C_2^8 = \frac{8!}{6!\ 2!} = 28$$

Como deben jugar 3 veces el número se triplica :

de partidos $= 28 \times 3 =$ **84** RPTA. E

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 5 personas en un banco?

A) 120 B) 80 C) 100 D) 95 E) 25

2.- ¿De cuántas maneras, diez señoras y diez caballeros pueden formar parejas (señoras y caballeros)?

A) 10! B) 10^2 C) 10^3

D) 10 E) 10 + 10

3.- ¿Cuántas permutaciones pueden ha-cerse con las letras de la palabra PERMUTACION?

A) 11! B) 10! C) 12!

D) 11! - 1 E) 10! + 1

4.- ¿De cuántas maneras se pueden llenar los puestos de jefe, subjefe, secretario y tesorero en un comité de siete?

A) 700 B) 720 C) 840 D) 949 E) 831

5.- Se pueden arrojar dos dados de 36 maneras. ¿En cuántas de éstas, la suma de puntos es igual a 7?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 7 E) 10

6.- ¿De cuántas maneras pueden disponerse seis soldados en una fila, si a uno de ellos no se le permite ocupar los extremos?

A) 300 B) 480 C) 240

D) 360 E) 450

7.- ¿Cuántos impares de 3 cifras se pueden formar con los números 1; 2; 3; ...; 9 sin repetir ninguna cifra?

A) 500 B) 300 C) 408 D) 250 E) 280

8.- ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de la palabra EUFRASIO, de forma que comiencen y terminen por vocal?

A) 12 600 B) 13 200 C) 12 340

D) 12 000 E) 14 400

9.- A una persona se le sirven en cada comida cuatro platos, de los nueve que son de su agrado. ¿Cuántas comidas diferentes puede hacer esa persona?

A) 252 B) 200 C) 126

D) 112 E) N.A.

10.- ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con las cifras 1; 2; ...; 9 sin repetir ninguna cifra?

A) 320 B) 504 C) 650 D) 485 E) 336

NIVEL B

11.- Cuatro delegados se han de escoger entre 8 miembros de un club. ¿En cuántas de ellas participa el miembro A?

A) 70 B) 28 C) 35 D) 14 E) 21

12.- ¿Cuántas señales diferentes, cada una consistente de 6 banderas colocadas en una linea vertical pueden formarse con 4 banderas rojas idénticas y con 2 banderas azules idénticas?

A) 18 B) 15 C) 12 D) 24 E) 30

13.- ¿De cuántas maneras pueden sentarse 3 niños y 2 niñas en una fila, si los niños y las niñas deben sentarse juntos?

A) 36 B) 27 C) 18 D) 24 E) 30

14.- ¿Cuántos números naturales hay que sean menores que 1 000 y que cada uno esté constituído por cifras distintas?

A) 628 B) 739 C) 712 D) 436 E) 519

15.- ¿Cuántas señales se pueden hacer con 4 banderas de diferentes colores izando cada vez 2; 3 ó 4 banderas?

A) 90 B) 48 C) 72 D) 60 E) 56

16.- ¿De cuántas maneras se pueden sentar en fila 3 chicos y 3 chicas alternando chico con chica?

A) 72 B) 60 C) 96 D) 84 E) 120

17.- Con los dígitos 1; 2; 3; 5 y 7. ¿Cuántos números de cuatro cifras mayores que 5 000 se pueden formar?

A) 24 B) 48 C) 56 D) 60 E) 72

18.- ¿De cuántos modos diferentes se pueden repartir dos premios distintos entre Angel, Javier, Pablo y Daniel, de modo que ninguno de ellos reciba los dos premios?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 18

19.- ¿De cuántas maneras puede conformarse un comité que consta de 3 hombres y 2 mujeres, a partir de 7 hombres y 5 mujeres?

A) 360 B) 350 C) 420 D) 210 E) N.A.

20.- Se quiere elegir una comisión integrada por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas maneras podemos elegirla si se presentan 7 candidatos?

A) 640 B) 840 C) 720

D) 500 E) 600

21.- Ana tiene 3 blusas diferentes y 4 faldas también diferentes. ¿De cuántas maneras se puede vestir Ana?

A) 15 B) 12 C) 64 D) 81 E) 7

22.- Reducir : $E = \dfrac{(n)! \times n + (n!)!}{(n! - 1)! \times n!}$

A) $n! + 1$ B) n C) $n + 1$

D) $n - 1$ E) $n! - 1$

23.- Un producto se vende en 3 mercados: en el 1^ro^ se tiene disponible en 6 tiendas, en el 2^do^ en 5 tiendas y en el 3^er^ mercado en 4 tiendas. ¿De cuántas maneras distintas puede adquirir una persona un artículo de dicho producto?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

24.- En la figura : A, B, C y D son ciudades y cada línea es un camino. Si una persona desea viajar, ¿de cuántas maneras puede elegir su recorrido?

a) Sale de A hacia D (pasando por B y C).

b) Sale de A hacia D y luego regresa hacia A.



A) 40 ; 5 680 D) 10 ; 2 200

B) 50 ; 2 320 E) 20 ; 3 100

C) 60 ; 3 600

25.- ¿Cuántos números pares de 3 dígitos se pueden formar con los dígitos 1 ; 2 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9, si cada dígito puede emplearse una vez?

A) 50 B) 60 C) 70 D) 80 E) 90

NIVEL C

26.- ¿De cuántas maneras distintas pueden alinearse 9 personas? Dar como respuesta cuánto tiempo tardarían en ocupar esas posiciones si para cada una de ellas emplean 30 *segundos*.

A) 12 *d* B) 120 *d* C) 126 *d*

D) 98 *d* E) N.A.

27.- Un estudiante debe responder 8 de 10 preguntas en un examen. ¿Cuántas selecciones puede hacer, si debe responder las primeras 3 preguntas?

A) 30 B) 28 C) 21 D) 32 E) 24

28.- Un saco contiene 6 bolas blancas y 5 bolas negras. Encontrar el número de maneras en que se pueden sacar 4 bolas del saco, si dos deben ser blancas y 2 deben ser negras.

A) 150 B) 120 C) 180 D) 240 E) 300

29.- ¿De cuántas maneras pueden arreglarse en una alacena 4 libros de matemáticas, 3 libros de historia, 3 libros de química y 2 libros de sociología, de tal manera que todos los libros sobre el mismo tema estén juntos?

A) 72 126 B) 28 916 C) 12 140

D) 41 472 E) 20 604

30.- 5 amigos salen de paseo en un automóvil en el cual pueden sentarse 2 en la parte delantera y 3 en la parte posterior. ¿De cuántas maneras diferentes podrán sentarse teniendo en cuenta que 2 de ellos no saben manejar?

A) 24 B) 48 C) 72 D) 120 E) 60

31.- ¿De cuántas maneras se pueden colocar 12 niños en una fila, de manera que cuatro niños, en particular queden juntos?

A) 6! 3! B) 1! 6! C) 3! 8!

D) 9! 4! E) 2! 5!

32.- Se quiere tomar una foto a un grupo de 8 alumnos, pero en la foto solo pueden aparecer 5 alumnos sentados en línea recta. ¿De cuántas maneras diferentes se puede tomar dicha foto?

A) 6750 B) 7820 C) 6720

D) 2450 E) 2730

33.- En una tienda hay 6 camisas y 5 pantalones que me gustan. Si decido comprar 3 camisas y 2 pantalones, ¿de cuántas maneras diferentes puedo escoger las prendas que me gustan?

A) 100 B) 500 C) 300 D) 400 E) 200

34.- Alrededor de una mesa circular de 6 asientos se ubican 2 niñas y 3 niños. ¿De cuántas formas podrán hacerlo, si el asiento vacío debe quedar entre las niñas?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

35.- Un grupo de 3 mujeres y 5 hombres se forma en 2 filas iguales. ¿De cuántas formas se podrán ubicar, si en cada fila debe haber por lo menos 1 mujer?

A) 30.3! B) 22.1! C) 42.3!

D) 32.6! E) 69.2!

36.- Una persona descansa 2 días cualesquiera por semana. ¿Cuántas semanas podrán transcurrir para que no se repitan dos días de descanso?

A) 56 B) 28 C) 35 D) 21 E) 14

37.- El número de permutaciones de x letras diferentes tomadas cuatro a cuatro, es al número de permutaciones tomadas cinco a cinco como 1 es a 8. Hallar x.

A) 9 B) 12 C) 16 D) 8 E) 10

38.- ¿Cuántos ordenamientos diferentes pueden obtenerse con las letras de la palabra blanquiazul?

A) $\frac{11!}{6}$ B) 11! C) $\frac{11!}{8}$

D) 8 . 11! E) $\frac{11!}{3}$

39.- De 7 hombres y 5 mujeres se van a formar grupos mixtos de 6 personas. ¿De cuántas maneras se podrán formar, si en el grupo debe haber por lo menos 4 mujeres?

A) 96 B) 56 C) 144

D) 120 E) 112

40.- Un club tiene 15 miembros, 10 hombres y 5 mujeres. ¿Cuántos comités de 8 miembros se pueden formar, si cada comité debe tener 3 mujeres?

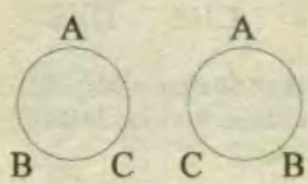
A) 1 960 B) 2 420 C) 1 728

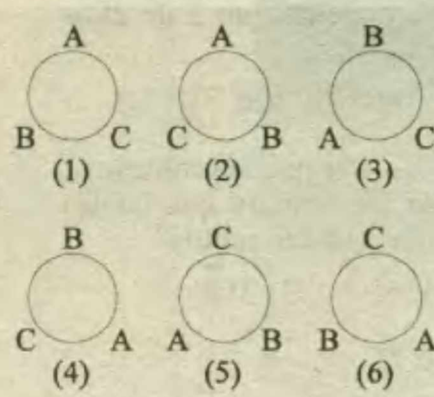
D) 2 520 E) 1 260

PERMUTACIONES CIRCULARES Y COMBINACIONES

Se sabe que el número de permutaciones de n objetos distintos es $n!$. Por lo tanto, si se desea sentar a tres personas en una mesa, en frente del anfitrión, el número de arreglos posibles es 3! Sin embargo, si las tres personas son sentadas en una mesa circular, el número posible de arreglos es de sólo $2! = 2$. Si se denota con A, B y C a las personas, los arreglos serán como los de la Fig.1

A primera vista, parecería que debería haber $3! = 6$ arreglos diferentes como los de la Fig.2 . Sin embargo, mediante un análisis más detallado se observará que los arreglos 1, 4 y 5 son idénticos: B está a la derecha y C a la izquierda de A. De modo semejante 2 , 3 y 6 son iguales, ya que en cada caso C está a la derecha y B a la izquierda de A.





Para evitar esta dificultad, si se tienen que sentar cuatro personas en una mesa circular, se coloca a una de ellas y se le toma como referencia. El resto de las personas, pueden sentarse de 3! formas. Se tiene la siguiente relación :

Número de personas	Números de maneras diferentes en las que pueden ser sentadas a una mesa circular.
3	2 !
4	3 !

En algunos casos se desea contar el número de subconjuntos de n objetos que pueden ser seleccionados sin importar el orden en el que se eligen los objetos. Tales subconjuntos reciben el nombre de combinaciones. Se usará el símbolo $C(n, r)$ para denotar el número de combinaciones de r objetos que pueden formarse de un conjunto de n objetos. Los símbolos ${}_nC_r$, $C_{n,r}$, C_n^r y $\binom{n}{r}$ se usan también para represe‑tar a $C(n, r)$

27 Razonamiento Lógico

Este capítulo estará dedicado a los acertijos y rompecabezas lógicos, cuestiones que, aún cuando pueden resolverse sin especial preparación en Matemáticas, sí tienen una relación con esta disciplina.

Es sabido que los problemas matemáticos, se resuelven razonando dentro de un sistema deductivo donde están integradas ya, las reglas lógicas fundamentales, por eso, los problemas que se proponen, requieren un razonamiento idéntico al que usan los matemáticos y científicos al estudiar situaciones enigmáticas, pero esto no implica poseer demasiados conocimientos de lógica formal, pues será suficiente conocer los principios fundamentales de aquella y agregarles algo de ingenio y creatividad.

I) ACERTIJOS SOBRE VERDADES Y MENTIRAS

Para resolver este tipo de acertijos se va eliminando progresivamente todas las combinaciones posibles de valores de verdad que sean imposibles, hasta que nos queda una sola combinación que será la correcta, al modo en que le decía Sherlock Holmes a Watson : "Cuando se ha eliminado todo lo imposible, el residuo por improbable que parezca, tiene que ser verdad."

Ejemplo 1 :

Un profesor utiliza para un examen de verdadero y falso, cinco preguntas, y el estudiante sabe que:

1.- Hay más preguntas falsas que verdaderas.

2.- No hay tres preguntas seguidas con el mismo valor de verdad.

3.- La primera y la última tienen valores contrarios.

¿Cuántas son verdaderas y cuántas falsas?

Resolución:

Puesto que son cinco preguntas que se responden con falso o verdadero, se presentan las siguientes posibilidades.

(a) 5 falsas y 0 verdaderas

(b) 4 falsas y 1 verdadera

(c) 3 falsas y 2 verdaderas

(d) 2 falsas y 3 verdaderas

(e) 1 falsa y 4 verdaderas

(f) 0 falsas y 5 verdaderas

Las posibilidades (d), (e) y (f) quedan eliminadas por la condición 1.

La posibilidad (a) queda eliminada por la condición 2 ó por la 3.

Sólo quedan las posibilidades (b) y (c).

La posibilidad (b) queda eliminada por las condiciones 2 y 3.

Queda como única posibilidad factible la (c), que no se puede eliminar, pues está de acuerdo en 1, 2 y 3.

En conclusión, había 3 falsas y 2 verdaderas.

II) ARGUMENTOS LOGICOS

Un argumento lógico es un razonamiento en el que a partir de una serie de enunciados llamados PREMISAS se llega a una proposición conocida como CONCLUSION.

Los siguientes ejemplos ilustran algunos argumentos simples. Observe la forma como se presentan estos argumentos: Se escribe cada premisa en una línea por encima de una línea horizontal y debajo de ésta la conclusión.

Para que una argumentación sea válida, la conclusión debe ser verdadera cuando las premisas son verdaderas.

Ejemplo 2 :

Si hoy es domingo, entonces iré a la iglesia
Hoy es domingo

Iré a la iglesia

Ejemplo 3 :

El número es par o impar
El número no es par

El número es impar

Ejemplo 4 :

Obtenga una conclusión válida utilizando las siguientes premisas :

1. Si Alicia ve televisión, Benjamín también lo hace.
2. Carol ve televisión si y solo sí Benjamín también la ve.
3. Daniel nunca ve televisión si Carol la está viendo.
4. Daniel siempre ve televisión si Eduardo la está viendo.

Resolución:

El argumento en símbolos se puede expresar así :

1. $a \to b$		a : Alicia ve televisión.
2. $c \leftrightarrow b$		b : Benjamín ve televisión.
3. $c \to \sim d$	Donde	c : Carol ve televisión.
4. $e \to d$		d : Eduardo ve televisión.
		e : Eduardo ve televisión.

Si cambiamos el orden en 2 y usamos la contrapuesta de 4 se obtiene:

1. $a \to b$
2. $b \leftrightarrow c$
3. $c \to \sim d$
4. $\sim d \to \sim e$

Y se forma la cadena : $a \to b \to c \to \sim d \to \sim e$

entonces, puede concluirse que : $a \to \sim e$, cuya traducción es :

Si Alicia ve televisión, entonces Eduardo no lo hace. Rpta.

En el razonamiento cotidiano no elaboramos tablas de verdad ni verificamos las argumentaciones de una manera formal, en lugar de esto, se aprenden (tal vez inconscientemente) algunas formas de argumentaciones las cuales se usan según se requiera de ellas.

Las formas de razonamiento comúnmente empleadas son :

Modus ponens	Modus Tollens	Silogismo Hipotético	Silogismo Disyuntivo
$p \to q$	$p \to q$	$p \to q$	$p \vee q$
p	$\sim q$	$q \to r$	$\sim p$
q	$\sim p$	$p \to r$	q

Para recordar : $\underbrace{p}_{\text{antecedente}} \to \underbrace{q}_{\text{consecuente}}$

III) CUADRO DE DECISIONES

En este caso se trata de asignar a un conjunto de elementos un conjunto de cualidades correspondientes, para lo cual se dispone de ciertos datos que después de ser analizados conducirán a la solución, la cual es fácil de obtener si se usa un cuadro para organizar la recopilación de los datos.

Ejemplo :

Arturo (A); Benjamín (B); Carlos (C) y Daniel (D); corrieron 100 *metros* planos.

1.- Carlos no ganó pero llegó antes que Benjamín.

2.- Daniel solo superó a Benjamín.

¿En qué orden llegaron a la meta?

Resolución:

A los cuatro personajes A, B, C, D les corresponde un respectivo orden de llegada : 1º, 2º, 3º, 4º y anotamos poco a poco la información en el siguiente cuadro.

De (2) se deduce que Daniel fue tercero y Benjamín fue cuarto.

Esto permite descartar las otras posiciones que podrían tomar Daniel y Benjamín; esto se indica sombreando los casilleros descartados.

	1	2	3	4
A				
B				✓
C				
D			✓	

De (1), si Carlos no ganó, y estando ocupadas las posiciones 3º y 4º, debemos asignarle la posición 2 y queda la 1ª para Arturo.

	1	2	3	4
A	✓			
B				✓
C		✓		
D			✓	

El orden de llegada fue :

4º	3º	2º	1º
B	D	C	A

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Ana, Bertha, Carlos y Diana están sentados en una fila de cuatro sillas numeradas del 1 al 4. José los mira y dice :

"Bertha está al lado de Carlos" ;

"Ana está entre Bertha y Carlos"

Pero sucede que las dos afirmaciones que hizo José son falsas. En realidad, Bertha está en la silla Nº 3.

¿Quién está en la silla Nº 2?

A) Bertha B) Carlos C) No hay suficiente información para estar seguro

D) Diana E) Ana UNMSM - 91

Resolución:

Puesto que las dos afirmaciones son falsas, serán verdaderas sus respectivas negaciones :

FALSAS		VERDADERAS
Bertha está al lado de Carlos	...	Bertha no está al lado de Carlos (1)
Ana está entre Bertha y Carlos	...	Ana no está entre Bertha y Carlos (2)

De (1) y sabiendo que Bertha está en la silla Nº 3, obtenemos la siguiente disposición :

1	2	3	4
Carlos		Bertha	

Además, como Ana no está entre Bertha y Carlos, sólo puede ocupar la silla Nº 4 y la 2 queda para Diana.

La disposición final es :

1	2	3	4
Carlos	Diana	Bertha	Ana

Diana RPTA. D

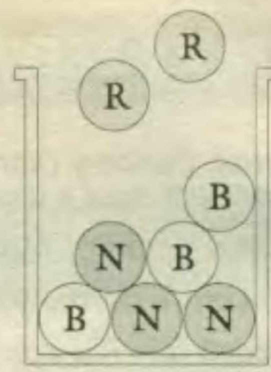
2.- En una urna hay tres bolas blancas, tres negras y dos rojas. Si se extraen tres bolas al azar y dos de ellas son rojas. ¿De qué color puede ser la tercera?

A) solamente blanca D) negra o roja

B) solamente negra E) solamente roja

C) blanca o negra UNFV - 96

Resolución:



De las tres bolas extraídas, dos son rojas, que son todas las rojas que contenía la urna.

La tercera sólo puede ser de uno de los otros dos colores :

Blanca ó Negra

RPTA. C

3.- Si admitimos como Verdadero, el siguiente conjunto de premisas :

(a) "El aumento del precio de la gasolina" IMPLICA "el aumento del precio de los pasajes."

(b) "El aumento del precio de los pasajes" IMPLICA "el aumento del costo de vida."

(c) "La crisis económica" IMPLICA "el aumento del precio de la gasolina."

Entonces la conclusión que se deduce correctamente es :

1. "El aumento del precio de la gasolina" IMPLICA "el aumento del costo de vida."

2. "La crisis económica" IMPLICA "el aumento del precio de los pasajes."

3. "El aumento del costo de vida" IMPLICA "la crisis económica."

A) Sólo 1 B) Sólo 2 C) Sólo 3 D) Sólo 1 y 2 E) Sólo 2 y 3 PUCP 97 - I

Resolución:

A cada proposición le asignamos una variable que la identifique :

p = el aumento del precio de la gasolina

q = el aumento del precio de los pasajes

r = el aumento del costo de vida

s = la crisis económica

Las 3 premisas consideradas Verdaderas son :

$(a)\ p \to q$

$(b)\ q \to r$

$(c)\ s \to p$

Por transitividad, se puede deducir esta cadena de implicaciones : $s \to p \to q \to r$

En (1), se afirma : $p \to r$, que es **Verdadera**, según la cadena de implicaciones que se ha obtenido.

En (2) se afirma : $s \to q$, que también es **Verdadera**.

En (3) se afirma : $r \to s$, que no es lo mismo que $s \to r$ que sí aparece en la cadena de implicaciones, entonces, no podemos afirmar que $r \to s$, lo cual es **Falso**.

Sólo : **1 y 2** son Verdaderas. RPTA. D

4.- Silva, Herrera y Gómez son tres profesores que enseñan Matemática, Historia y Geografía, no necesariamente en este orden.

(1) Si el que enseña Geografía es el mejor amigo de Herrera y el menor de los tres.

(2) Silva es mayor que el de Historia.

¿Cuál es la correcta?

I. Gómez es el mayor.

II. Gómez enseña Geografía.

III. El de Matemática es mayor que Silva.

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III D) I y II E) II y III PUCP 94 - I

Resolución:

De (1), el menor de los tres enseña Geografía.

De (1) y (2), ni Herrera, ni Silva enseñan Geografía, por tanto este curso lo enseña Gómez.

Además, Silva no enseña Historia, tampoco Geografía, por tanto enseña Matemática y se obtiene este cuadro :

	Mat.	Hist.	Geog.
Silva	si	no	no
Herrera	no	si	no
Gómez	no	no	si

Respecto al orden de edad de menor a mayor, tenemos que :

El de Geografía (Gómez) es el menor.

El de Historia (Herrera) no es el mayor, es el mediano, y

El de Matemática (Silva) es el mayor.

Entonces las proposiciones tienen estos valores de verdad :

I es F ; **II es V** ; III es F **RPTA. B**

5.- "Si Aquiles corre, no alcanzará a la tortuga.
Aquiles corre, por lo tanto : No alcanzará a la tortuga"
Esta proposición se caracteriza por ser :

A) Una contradicción

B) Una falacia

C) Un razonamiento válido

D) Un razonamiento inductivo

E) Un razonamiento cuestionable

UNMSM - 93

Resolución:

Este razonamiento es de la forma :

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \therefore\ q \end{array}$$

Donde se afirma el antecedente, esto constituye una forma válida, de razonamiento directo, conocido como *modus ponens*.

Es un : **razonamiento válido** RPTA. C

6.- Los diamantes cuestan mucho dinero, además se sabe que los diamantes son eternos y por lo general, los reyes compran diamantes. Se deduce :

A) Los reyes quieren ser eternos

B) Los que compran diamantes son reyes

C) Los reyes suelen comprar diamantes

D) Los reyes no compran diamantes

E) Por lo general los reyes tienen mucho dinero ***PUCP 95 - I***

Resolución:

Si por lo general los reyes compran diamantes y los diamantes cuestan mucho dinero. Se deduce válidamente que :

Por lo general los reyes tienen mucho dinero RPTA. E

7.- Si consideramos que todos los artistas son ególatras y que algunos artistas son indigentes; es correcto afirmar que :

A) Algunos indigentes son ególatras

B) Todos los artistas son ególatras e indigentes

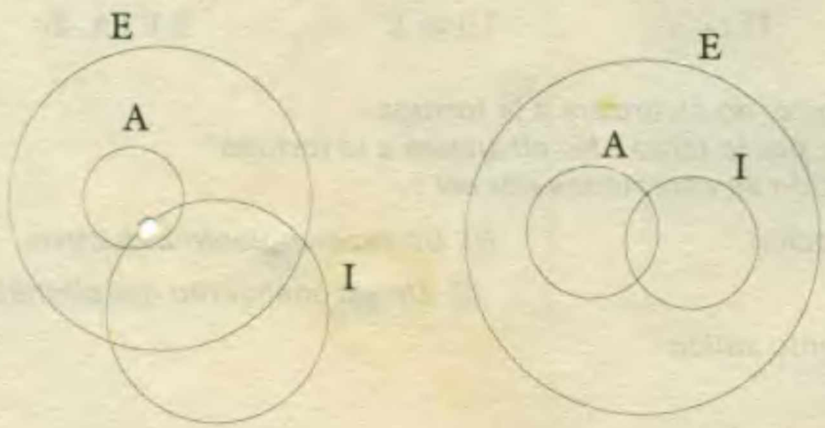
C) Si un artista no es ególatra debe ser un indigente

D) Ningún indigente es ególatra

E) Nadie es al mismo tiempo ególatra e indigente ***PUCP 96 - II***

Resolución:

Todos los artistas (A) son ególatras (E) y algunos artistas son indigentes (I), son proposiciones se muestran en estos dos diagramas.



Entre las alternativas dadas, la única que es verdadera en cada uno de los diagramas es la A.

Algunos indigentes son ególatras RPTA. A

8.- Un distribuidor de productos alimenticios tiene tres diferentes vendedores en tres diferentes ciudades : Trujillo, Lima y Arequipa. Cada uno de los vendedores comercializan productos distintos : arroz, leche y azúcar. Además se sabe que :

(1) Javier no vende en Trujillo.

(2) Darío no está en Lima.

(3) El que vive en Trujillo no vende arroz.

(4) El que vive en Lima vende leche.

(5) Darío no vende azúcar.

¿Qué vende Teófilo? ¿Dónde vive?

A) Leche en Trujillo ***B) Leche en Lima*** ***C) Azúcar en Arequipa***

D) Azúcar en Lima ***E) Azúcar en Trujillo*** ***UNALM 94 - I***

Resolución:

De (2) y (4) se deduce que Darío no vende leche.

De (5), Darío no vende azúcar, por lo tanto :

Darío vende arroz

De (3), y de la conclusión anterior se deduce que Darío no vive en Trujillo (T) y por (2) tampoco vive en Lima (L), por tanto vive en Arequipa (A).

Entonces : Darío vende arroz y vive en Arequipa

Luego se deducen las demás correspondencias que se indican en los siguientes cuadros :

	arroz	leche	azúcar
Javier	×	✓	×
Darío	✓	×	×
Teófilo	×	×	✓

	T	L	A
Javier	×	✓	×
Darío	×	×	✓
Teófilo	✓	×	×

Ahora, se puede afirmar que :

Teófilo vende azúcar y vive en Trujillo RPTA. E

9.- Si vas al cine no terminarás el cuestionario.

Terminas el cuestionario o no eres un estudiante responsable.

Vas al cine o me acompañas a la biblioteca.

Es notorio tu amplio sentido de la responsabilidad.

De acuerdo a las premisas anteriores se afirma :

1. Vas al cine.

2. Me acompañas a la biblioteca.

3. No terminarás el cuestionario.

A) Sólo 1 y 2 ***B) Sólo 1 y 3*** ***C) Sólo 2*** ***D) Sólo 3*** ***E) Sólo 2 y 3*** ***PUCP 90 - I***

Resolución:

De la última afirmación se deduce que es responsable y por lo tanto termina el cuestionario y no va al cine luego. (1) es Falsa.

O vas al cine o me acompañas a la biblioteca. Como sucede que no va al cine, entonces se cumple la otra : me acompañas a la biblioteca.

Entonces : **(2) es Verdadera**

Ya se dedujo que terminaba el cuestionario, entonces (3) es Falsa. **RPTA. C**

10.- Se tienen los siguiente datos :

(1) A, B, C y D son cuatro ingenieros

A no trabaja en la oficina a

B no trabaja en la oficina b

C no trabaja en la oficina c

D no trabaja en la oficina d

(2) El ingeniero que trabaja en la oficina «a» es hermano del que trabaja en la oficina «c».

(3) La esposa del ingeniero B y la esposa del ingeniero D son hermanas de los ingenieros que trabajan en las oficinas «a» y «c».

¿En qué oficinas trabajan el ingeniero A y el ingeniero C?

	A		C
A)	c	;	d
B)	b	;	a
C)	c	;	a
D)	b	;	d
E)	c	;	b

UNI - 92

Resolución:

De (1): B no trabaja en *b*.

De (3): B no trabaja en *a*, ni en *c*.

Se deduce que B trabaja en *d*.

De (1): D no trabaja en *d*.

De (3): D no trabaja en *a*, ni en *c*.

Se concluye que D trabaja en *b*.

	a	*b*	*c*	*d*
A				
B				✓
C				
D		✓		

Hasta aquí se puede determinar el siguiente cuadro de correspondencias :

Y como A no trabaja en *a*, entonces :

A trabaja en *c*

Y como C no trabaja en *c*, entonces :

C trabaja en *a* RPTA. C

	a	*b*	*c*	*d*
A		×	✓	×
B	×	×	×	✓
C	✓	×		×
D	×	✓	×	×

11.- La negación de la proposición : "Todos los hombres son honestos" es :

A) Los hombres no son honestos

B) Todos los hombres son deshonestos

C) Algunos hombres son deshonestos

D) Ningún hombre es deshonesto

E) Algunos hombres son honestos

<u>Resolución</u>:

La negación de una proposición de la forma : "Todos ...."

Es otra proposición de la forma : "Algunos .... no "

En nuestro caso, la negación sería :

"Algunos hombres no son honestos"

Y como decir "no son honestos" equivale a decir "son deshonestos" la alternativa correcta es C.

Algunos hombres son deshonestos **RPTA. C**

12.- Dada la proposición verdadera :

"Si un cuadrilátero es un cuadrado, entonces es un rectángulo"

Se concluye el recíproco y el inverso de la proposición dada que:

A) Solamente el recíproco es verdadero

B) Solamente el inverso es verdadero

C) Ambos son verdaderos

D) Ninguno es verdadero

E) El inverso es verdadero, pero el recíproco es algunas veces verdadero.

<u>Resolución</u>:

Debemos aclarar que dado : $p \rightarrow q$

1. El recíproco es : $q \rightarrow p$
2. El inverso es : $\sim p \rightarrow \sim q$
3. El contrarrecíproco es : $\sim q \rightarrow \sim p$

En la proposición dada : p : un cuadrilátero es un cuadrado

q : un cuadrilátero es un rectángulo

El recíproco es : "Si un cuadrilátero es un rectángulo, entonces es un cuadrado."

Esta afirmación resulta falsa.

El inverso es : "Si un cuadrilátero no es un cuadrado, entonces no es un rectángulo."

Esta afirmación es falsa.

Ninguno es verdadero **RPTA. D**

13.- Dadas las dos hipótesis :

I) Algunos estudiantes no son honestos.

II) Todos los miembros de fraternidades son honestos.

Si "algunos" significa "por lo menos uno", podemos concluir que:

A) Algunos estudiantes son miembros de fraternidades

B) Algunos miembros de fraternidades no son estudiantes

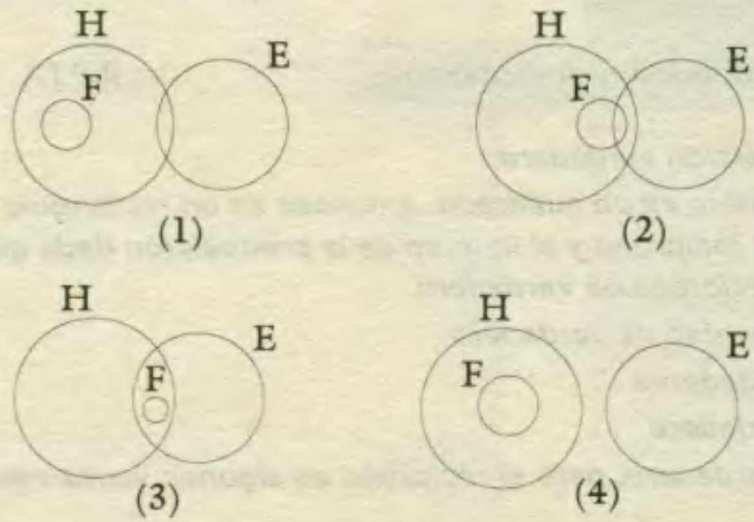
C) Algunos estudiantes no son miembros de fraternidades

D) Ningún miembro de fraternidad es estudiante

E) Ningún estudiante es miembro de fraternidades

Resolución:

Las hipótesis dadas resultan verdaderas en cada uno de los siguientes diagramas : H = honestos; E = estudiantes ; F = fraternidad.



Será válida, la alternativa que es correcta en todos los diagramas.

A es invalidada por (1) ó (4)

B es invalidada por (3)

C es válida en todos

D es invalidada por (2) ó (3)

E es invalidada por (2) ó (3)

$\therefore$ Algunos estudiantes no son miembros de fraternidades RPTA. C

14.- El señor Blanco, el señor Rojo y el señor Pardo, almorzaban juntos. Uno llevaba corbata blanca, otro roja, y el otro parda. Es curioso -dijo el de la roja-, las corbatas que llevamos corresponden a nuestros apellidos, pero ninguno la lleva del color de su apellido.

En efecto tiene usted razón -repuso el señor Blanco.

¿De qué color era la corbata del señor Pardo?

A) blanco B) pardo C) rojo D) negro E) N.A.

Resolución:

Blanco no podría tener la blanca, porque correspondería con su propio apellido; tampoco podría llevar la roja, porque el de la corbata roja dialogaba con él, por consiguiente la corbata del señor Blanco tenía que ser parda.

Quedan lás corbatas roja y blanca, que las llevaban respectivamente los señores Pardo y Rojo.

Respondiendo a la pregunta, la corbata del señor Pardo, era de color :

rojo RPTA. C

15.- Tres señoritas : Isabel, Rosario y Teresa, conversan. En un orden cualquiera, sus profesiones son : maestra, secretaria y cajera.

- Isabel, que es la esposa del hermano de Teresa, es mayor que la cajera.

- La maestra, que es hija única, es la menor de las tres.

¿Cuál es la correspondencia correcta?

A) Isabel - maestra ***B) Teresa - secretaria*** ***C) Rosario - cajera***

D) Isabel - cajera ***E) Rosario - maestra***

Resolución:

1°) Teresa (T) tiene un hermano, así que no puede ser la maestra, que es hija única.

Isabel (I) tampoco, pues es mayor que la cajera (C), así que no es la menor de las tres.

(1)

	m	*s*	*c*
I	×		
R	✓	×	×
T	×		

La maestra es Rosario (R)

2°) Isabel no puede ser la cajera porque es mayor que la cajera así que es secretaria.

(2)

	m	*s*	*c*
I	×	✓	×
R	✓	×	×
T	×	×	✓

Isabel es secretaria

3°) Teresa es la cajera

RPTA. E

16.- En el problema anterior, al ordenarlas de mayor a menor edad, mencionándolas por sus nombres, el orden correcto es :

A) $R > I > T$ ***B)*** $I > R > T$ ***C)*** $I > T > R$

D) $R > T > I$ ***E)*** $T > R > I$

Resolución:

La menor de las tres es la maestra, es decir, Rosario (R).

Entre las otras dos, Isabel es mayor que la cajera, que es Teresa, es decir, Isabel es la mayor de las tres y Teresa es la mediana.

El orden de mayor a menor es :

Isabel, Teresa, Rosario RPTA. C

17.- Sobre una mesa hay tres cajas, una que contiene sólo manzanas, una que contiene sólo naranjas y una que contiene manzanas y naranjas. Las cajas están rotuladas, según la figura :

Naranjas	Manzanas	Naranjas y Manzanas
1ª	2ª	3ª

Pero, ninguna de las leyendas corresponde al contenido, es decir, todas las cajas están mal marcadas.

Si usted puede sacar una sola fruta de una sola caja. ¿De cuál de ellas la sacaría para determinar los contenidos de todas las cajas?

A) De la 1ª ***B) De la 2ª*** ***C) De la 3ª***

D) De la 1ª ó 2ª indistintamente ***E) No es posible determinar nada con una sola extracción***

Resolución:

Se saca una fruta de la caja que dice "naranjas y manzanas".

(1) Si es una manzana, entonces la tercera caja contiene sólo manzanas, la segunda naranjas y la primera, manzanas y naranjas, pues todas están mal rotuladas.

(2) Si es una naranja, entonces la tercera caja contiene naranjas, la segunda naranjas y manzanas, y la primera manzanas.

$\therefore$ **De la 3ª caja** RPTA. C

18.- Si la proposición compuesta :

$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee t)$ es falsa

Indicar las proposiciones que son verdaderas.

A) p , r ***B) p , q*** ***C) r , t*** ***D) q , t*** ***E) p , r , t***

Resolución:

Una implicación es falsa sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, por tanto :

$p \wedge q$ es V ; $r \vee t$ es F

Para que $p \wedge q$ sea Verdadera, es necesario que p y q sean verdaderas.

Para que $r \wedge t$ sea Falsa, tanto r como t deben ser falsas.

Los valores de verdad son :

$p = V$; $q = V$; $r = F$; $t = F$ RPTA. B

19.- Sabiendo que la proposición :

"Todos los mamíferos son vertebrados", es verdadera.

Entre las siguientes proposiciones :

1. Es falso que algunos mamíferos no son vertebrados.

2. Es verdad que ningún mamífero es vertebrado.

3. Es cierto que algún mamífero es vertebrado.

Son correctas :

A) Sólo 1 B) Sólo 2 C) 1 y 3 D) 2 y 3 E) N. A.

Resolución:

La 1 es la doble negación de la proposición dada, por lo tanto es correcta.

La 2 es falsa porque contradice lo que afirma la proposición dada.

La 3 es consecuencia válida de la proposición dada.

1 y 3 RPTA. C

20.- Si se sabe que : $p \wedge \sim r$ ***es F***

$r \rightarrow q$ ***es V***

$q \vee t$ ***es F***

Determine los valores de verdad de p, q, r y t.

A) VVVV B) VVFF C) VFVF D) FVFF E) FFFF

Resolución:

En la última proposición, $q \vee t$ es F sólo cuando q es F y t es F.

En la segunda proposición, $r \rightarrow q$ es V, se sabe ya que q es F, luego r debe ser F, de lo contrario, habría contradicción.

En la primera proposición, $p \wedge \sim r$ es F, pero $\sim r$ es V, luego p debe ser F.

Los valores de verdad de p, q, r y t son : F, F, F y F RPTA. E

21.- Dadas las premisas:

Algunos gatos no son cazadores.

Todos los gatos tienen garras.

La conclusión lógica es :

A) Algunos cazadores no son animales con garras

B) Ningún animal con garras es cazador

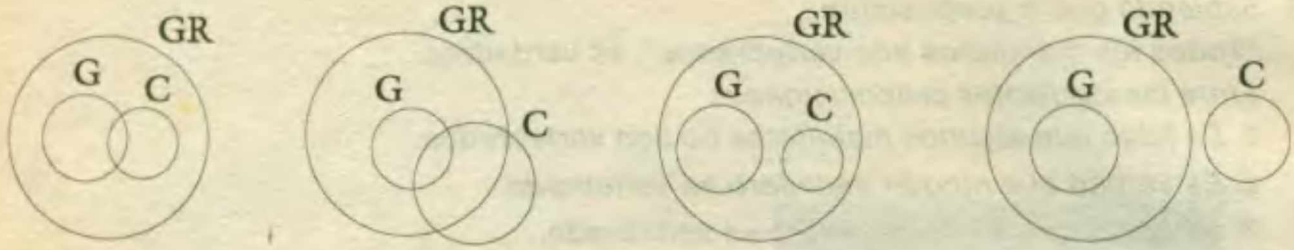
C) Ningún cazador es animal con garras

D) Algunos animales con garras son cazadores

E) Algunos animales con garras no son cazadores

Resolución:

Las premisas dadas son verdaderas en cada uno de los cuatro diagramas que mostramos a continuación:



donde G : gatos ; C : cazadores ; GR : con garras

La única afirmación válida en todos los diagramas es :

"Algunos animales con garras no son cazadores" RPTA. E

Las preguntas 22 a 25 se refieren a la siguiente información :

- 6 carros están estacionados formando una fila.
- El carro azul está a dos lugares del carro verde.
- El carro amarillo está a tres lugares del carro rojo.
- El carro negro está en uno de los extremos de la fila.
- El carro blanco está próximo al carro rojo.
- El carro verde está a tres lugares del carro negro.
- El carro azul no está próximo al carro negro.

22.- El carro blanco está próximo a :

A) el azul ***B) el negro*** ***C) el verde*** ***D) el amarillo*** ***E) el azul o el verde***

Resolución:

Ubicamos al negro en un extremo; y a tres lugares, al verde.

N			V		

Luego, el azul a dos lugares del verde, pero sin que quede próximo al negro, es decir, el azul al otro extremo.

N			V		Az

Luego se completan las otras ubicaciones obteniéndose :

N	R	B	V	Am	Az

Entonces, las respuestas a las preguntas son :

El blanco está próximo al verde y al rojo, pero en las alternativas sólo aparece el verde.

RPTA. C

23.- El carro más alejado del verde es :

A) el azul B) el rojo C) el negro D) el amarillo E) el blanco

Resolución:

El más alejado del verde es el negro, que está en el extremo más alejado. RPTA. C

24.- En el otro extremo está el carro :

A) azul B) rojo C) amarillo D) verde E) blanco

Resolución:

En el otro extremo está el azul. RPTA. A

25.- Dos carros intercambian su respectiva posición de manera que en la nueva distribución, el verde está próximo al rojo y el blanco está a tres lugares del negro.

¿Cuáles de estas nuevas afirmaciones son correctas?

I.- El carro blanco está próximo al amarillo.

II.- El verde no está próximo al amarillo.

III.- El rojo es uno de los que se han cambiado.

A) Solo I B) Solo II C) I y III D) II y III E) I y II

Resolución:

Para que se cumplan las nuevas condiciones, se deben intercambiar el blanco y el verde, obteniéndose :

N R V B Am Az

Son verdaderas : **I y II** RPTA. E

26.- ¿Qué parentesco tiene Juan con la hija de la esposa del único vástago de su madre?

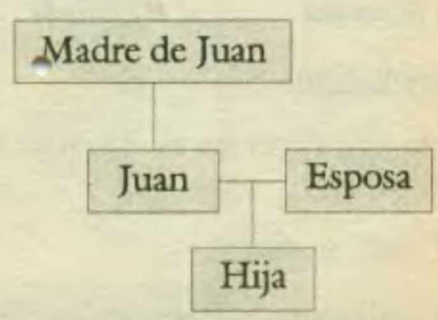
A) Padre - Hija B) Hermano - Hermana C) Hijo - Madre D) Primo - Prima E) N.A.

Resolución:

La madre de Juan tiene un hijo único que no es otro que Juan.

La esposa del único vástago (hijo) de su madre, es la esposa de Juan.

Con estos datos podemos elaborar el cuadro adjunto :



El parentesco entre Juan y la hija mencionada es :

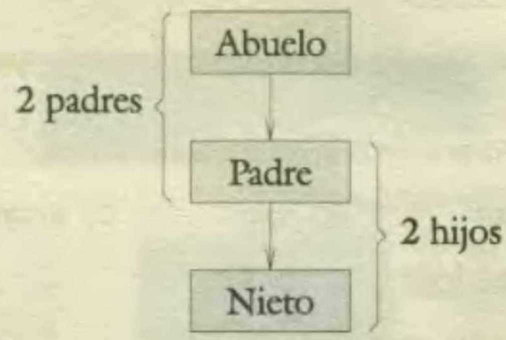
Padre - Hija RPTA. A

27.- En una reunión se encuentran 2 padres, 2 hijos y 1 nieto. ¿Cuántas personas como mínimo se encuentran en dicha reunión?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

<u>Resolución</u>:

El número mínimo, como se demuestra en el esquema adjunto, es tres personas: 1 abuelo, 1 padre y 1 nieto.



RPTA. C

28.- Ricardo, César, Percy y Manuel, tienen diferente ocupación:

a.- Ricardo y el carpintero están enojados con Manuel.

b.- César es amigo del electricista.

c.- El comerciante es familiar de Manuel.

d.- El sastre es muy amigo de Percy y del electricista.

e.- Ricardo desde muy Joven se dedica a vender abarrotes.

¿Quién es el electricista?

A) Percy ***B) Manuel*** ***C) César*** ***D) Ricardo*** ***E) Ninguno***

<u>Resolución</u>:

- De (2) y (4), ni César ni Percy son el electricista.

- Por (5) Ricardo tampoco, pues es comerciante.

∴ **Manuel es el electricista** RPTA. B

	Car	Elec	Com	Sas
Ri		×	•	
Ce		×		
Pe		×		
Ma	×	•	×	×

29.- Según los datos del problema anterior. ¿Quién es el carpintero?

A) Ricardo ***B) César*** ***C) Percy*** ***D) Manuel*** ***E) Ninguno***

<u>Resolución</u>:

- De (3), Percy no es el sastre, entonces solo puede ser César.

César: sastre

- Finalmente, **Percy es el carpintero**

	Car	Elec	Com	Sas
Ri	×	×	•	×
Ce		×	×	
Pe		×	×	×
Ma	×	•	×	×

RPTA. C

30.- Tres hermanos estudian en tres universidades distintas: Católica, UNI, Callao. Cada uno estudia carreras distintas : Ing. Industrial, Ing. Mecánica y Economía. Juan no estudia en la Católica, Carlos no está en la UNI, el que está en la Católica no estudia ingeniería Industrial, el que está en la UNI estudia Ing. Mecánica. Carlos no estudia economía. ¿Qué estudia Carlos?

A) Ing. Industrial ***B) Ing. Mecánica*** ***C) Economía*** ***D)*** ***E)***

Resolución:

- Si Carlos no está en la UNI, por lo tanto no estudia Ingeniería Mecánica.

- Además se sabe que Carlos no estudia Economía.

∴ Carlos estudia Ingeniería Industrial. RPTA. A

31.- Según los datos del problema anterior : ¿Qué estudia Eduardo? ¿En qué universidad?

A) Economía ; Católica ***B) Ing. Mecánica ; UNI*** ***C) Ing. Industrial ; Callao***

D) Economía ; Callao ***E) ng. Mecánica ; Católica***

Resolución:

- Carlos estudia ingeniería industrial, pero no puede hacerlo en la Católica, ni en la UNI, pues habría contradicción con los datos, luego estudia en la universidad del Callao.

- Juan no estudia en la Católica, pues si estudia Ing. Mecánica, lo debe hacer en la UNI

- Finalmente, si Eduardo estudia en la Católica, entonces estudia Economía

RPTA. A

La siguiente información permitirá responder las preguntas: 32, 33 y 34.

En una pequeña empresa trabajan las siguientes personas : El Sr. Franco, el Sr. Padilla, la Sra. García, la Srta. Gálvez, el Sr. Ventura y la Srta. Merino. Los cargos que ocupan son: Gerente, Subgerente, Contador, Taquígrafo, Cajero y Oficinista, aunque no necesariamente en ese orden.
El subgerente es nieto del Gerente, el Contador es yerno del Taquígrafo. El Sr. Padilla tiene 23 años, la Srta. Gálvez es la hermanastra del Cajero, el Sr. Ventura es vecino del Gerente, y el Sr. Franco es soltero.

32.- ¿Quién es el taquígrafo?

A) Sr. Franco ***B) Sr. Padilla*** ***C) Sr. Ventura*** ***D) Srta. Merino*** ***E) Srta. Gálvez***

Resolución:

- Como el contador es yerno del Taquígrafo, éste debe ser un Sr. con hija casadera, entonces se destacan:

a) El Sr. Padilla, por ser muy joven (23 años)

b) El señor Franco, por ser soltero.

c) Todas las damas.

∴Debe ser **el Sr. Ventura.** **RPTA. C**

33.- ¿Quién es el gerente?

A) Srta. Gálvez ***B) Sra. García*** ***C) Sr. Franco*** ***D) Sr. Padilla*** ***E) Srta. Merino***

Resolución:

- Sabemos que el subgerente es **nieto** del gerente, es decir el subgerente es hombre.

- Si el gerente también fuese hombre, tendría el mismo apellido que el subgerente, pero todos tienen apellido distinto, por lo tanto el gerente es abuela del subgerente.

- Entre las mujeres la única opción es **la Sra. García.** **RPTA. B**

34.- ¿Qué cargo desempeña la Srta. Merino?

A) Gerente ***B) Oficinista*** ***C) Cajero*** ***D) Contador*** ***E) Taquígrafo***

Resolución:

Luego de las conclusiones anteriores, se obtiene el cuadro adjunto, en el que se observa que la Srta. Merino se desempeña como:

Cajero RPTA. C

	Ge.	Sub.	Con.	taq.	Caj.	Ofic.
Fra	×	•	×	×	×	×
Pa	×	×	•	×	×	×
Gar	•	×	×	×	×	×
Gal	×	×	×	×	×	•
Ven	×	×	×	•	×	×
Mer	×	×	×	×	•	×

Utilice la siguiente información para responder a las preguntas 35 y 36.

Cinco amigas: Norma, Jéssica , Martha, Marisol y Karina viven en un edificio de 6 pisos, cada una en un piso, diferente. Si se sabe que :

- El cuarto piso está desocupado.

- Marisol vive en un piso adyacente al de Norma y al de Martha.

- Karina no vive en el último piso.

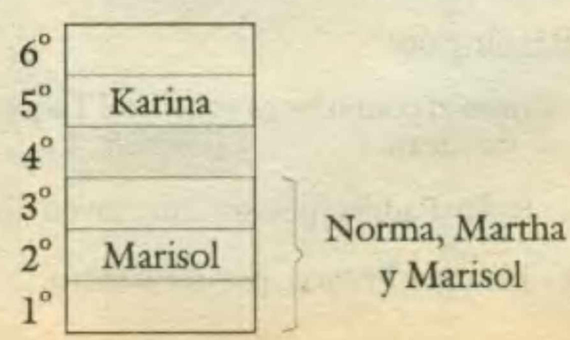
35.- ¿Quién vive en el último piso?

A) Norma ***B) Jéssica*** ***C) Martha***

D) Marisol ***E) Karina***

Resolución:

Si el cuarto piso está desocupado, y Marisol, Norma y Martha están en pisos contiguos, deben ser los tres primeros pisos.



Si Karina no vive en el último piso, debe vivir en el 5to piso

Finalmente queda el 6to piso para **Jéssica** RPTA. B

36.- Si Martha no ocupa el primer piso. ¿Cuál le corresponde?

A) Primer piso B) Segundo piso C) Cuarto piso D) Quinto piso E) Sexto piso

Resolución:

A Martha y Norma deben corresponderles el 1ro y 3er piso; si Martha no ocupa el 1ro, deberá corresponderle **el 3ro.**

RPTA. C

37.- Se deben de realizar cinco actividades A; B; C; D y E, una por día, desde el lunes hasta el viernes; si :

*** B se realiza después de D***

*** C se realiza dos días después de A***

*** B se realiza jueves o viernes***

¿Qué actividad realiza el martes?

A) Actividad E B) Actividad D C) Actividad B D) Actividad C E) Actividad A

Resolución:

- D no se puede realizar el viernes, porque B se realiza después, entonces :

Lu.	Ma.	Mi.	Jv.	Vi.
			D	B

D se realiza el jueves, entonces B el viernes, entonces :

Lu.	Ma.	Mi.	Jv.	Vi.
A		C	D	B

- Si C se realiza dos días después que A, este día debe ser el miércoles y A el lunes .

- Finalmente solo queda el martes para : **E** RPTA. A

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- La negación de la proposición : "los estudiantes mediocres no asisten a esta escuela" es :

A) Todos los estudiantes mediocres asisten a esta escuela.

B) Todos los estudiantes mediocres no asisten a esta escuela.

C) Algunos estudiantes mediocres asisten a esta escuela.

D) Algunos estudiantes mediocres no asisten a esta escuela.

E) Ningún estudiante mediocre asiste a esta escuela.

2.- Si vas al estadio, pierdes tu dinero.
Si no vas al estadio, vas a la playa.
Si no fuiste a la playa, entonces :

A) No fuiste al estadio.

B) No perdiste tu dinero.

C) Pierdes tu dinero.

D) Fuiste al estadio y ganaste dinero.

E) Perdiste tu dinero y no fuiste a la playa.

3.- Tres amigas : Karen, Augusta y Alejandra van al circo, cada una con un polo de diferente color: azul, rojo y blanco.

Se sabe que :

- La que llevó el polo rojo quedó fascinada con los payasos.
- Karen, que no gusta del color blanco, quedó impresionada con los caballos amaestrados.
- El espectáculo de los trapecistas fue seguido atentamente por Alejandra.

Se afirma :

A) Augusta fue con un polo blanco.

B) Karen fue con un polo rojo.

C) Alejandra fue con un polo azul.

D) La que fue con un polo azul prefirió los trapecistas.

E) Karen fue con un polo azul.

4.- Dadas las 6 proposiciones siguientes :

(1) Todas las mujeres son buenas conductoras.

(2) Algunas mujeres son buenas conductoras.

(3) Los hombres no son buenos conductores.

(4) Todos los hombres son malos conductores.

(5) Por lo menos un hombre es mal conductor.

(6) Todos los hombres son buenos conductores.

La proposición que niega a (6) es :

A) (1) B) (2) C) (3) D) (4) E) (5)

5.- Un tren tiene 6 vagones, además del vagón donde van los maquinistas, que va adelante, se sabe que :

(1) "CARGA" no está detrás de "ANIMALES".

(2) "SEGUNDA CLASE" está entre "CARGA" y "TERCERA CLASE".

(3) "TERCERA CLASE" está junto a "CARGA" y "CORREO".

(4) "CORREO" está junto al vagón donde van los maquinistas.

¿Cuántos vagones hay entre el vagón donde van los maquinistas y segunda clase?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.- Según el problema anterior :

I) "CARGA" está más cerca al vagón de los maquinistas que "PRIMERA CLASE".

II) "ANIMALES" es el último vagón.

III) "SEGUNDA CLASE" está más alejado del vagón de los maquinistas que "TERCERA CLASE".

Son ciertas :

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III

D) Sólo I y III E) II y III

7.- Dada la proposición verdadera :

«El picnic del domingo se realizará sólo si el tiempo no es soleado»

Podemos deducir que :

A) Si se realiza el picnic, el tiempo del domingo es indudablemente soleado.

B) Si no se realiza el picnic, el tiempo del domingo posiblemente sea nublado.

C) Si no es un domingo soleado, el picnic no se realizará.

D) Si es un domingo soleado, el picnic puede ser que se realice.

E) Si es un domingo soleado, el picnic debe realizarse.

Las preguntas 8, 9 y 10 se refieren a esta información :

Seis personas juegan al póker alrededor de una mesa redonda. Luis no está sentado al lado de Enrique ni de José. Fernando no está al lado de Gustavo ni de José. Enrique no está al lado de Gustavo ni de Fernando. Pedro está junto a Enrique y a su derecha.

8.- ¿Quién está sentado a la izquierda de Enrique?

A) Pedro B) José C) Gustavo

D) Luis E) Fernando

9.- ¿Quién está sentado a la derecha de Pedro?

A) Gustavo B) Enrique C) Fernando

D) Luis E) José

10.- ¿Cuántas personas están entre José y Fernando?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

11.- Si "Todos los pianistas son músicos". ¿Qué proposición no se deduce de la anterior?

A) Algunos músicos son pianistas

B) Algunos pianistas son músicos

C) Ningún pianistas es no músico

D) Ningún no músico es pianista

E) Ningún no músico es no pianista

12.- La proposición "Hay muchos postulantes", equivale a afirmar :

A) No hay muchos postulantes

B) Es absurdo que haya muchos postulantes

C) Hay muchísimos postulantes

D) Es falso que no haya muchos postulantes

E) Ninguna de las anteriores

13.- La proposición "Siempre que haya paz es obvio que habrá tranquilidad".

A) Paz equivale a tranquilidad

B) Si no hay paz no hay tranquilidad

C) Siempre que no haya tranquilidad no habrá paz.

D) A y B

E) Ninguna de las anteriores

14.- Cuatro amigos : Aída, Carmen, Juan y Enrique, se sientan alrededor de una mesa circular de 4 asientos distribuídos simétricamente.

Si sabemos que :

- Carmen se sienta a la izquierda de Enrique.
- Dos personas del mismo sexo no se sientan juntas.

Podemos afirmar :

A) Enrique se sienta a la derecha de Aída.

B) Juan se sienta a la derecha de Carmen.

C) Aída se sienta frente a Juan.

D) Carmen se sienta a la izquierda de Juan.

E) Aída se sienta a la izquierda de Juan.

15.- Cinco amigos : A, B, C, D y E se sientan en una fila del cine que tiene seis sitios

libres juntos. Si sabemos que : B no se sienta junto a D, pero hay una persona a cada uno de sus lados. E se sienta en uno de los extremos de la fila. C se sienta 3 sitios a la izquierda de E. Hay 2 sitios entre A y el sitio vacío. D se sienta en el quinto asiento a partir de la izquierda. ¿Qué asiento a partir de la izquierda está vacío?

A) 1ro B) 2do C) 3ro D) 4to E) 6to

16.- Seis amigos : A, B, C, D, E y F se sientan alrededor de una mesa circular. Si se sabe que :

- A se sienta frente a B.
- C no se sienta junto a D ni a F.
- F se sienta a la derecha de B.

Podemos afirmar :

I. D se sienta junto a F.
II. D se sienta junto a A.
III. C se sienta junto a E.

A) Sólo I y II D) Todas
B) Solo II y III E) Ninguna de las anteriores
C) Sólo I y III

NIVEL B

Las preguntas 11, 12, 13 y 14 se refieren al siguiente enunciado :

Un entrenador está tratando de conformar un equipo de cuatro jugadores para un torneo de tenis.

Tiene siete jugadores disponibles : los hombres A, B y C y las mujeres M, N, O y P.

Todos los jugadores son de igual capacidad y deben pertenecer al equipo por lo menos dos hombres. Para un equipo de cuatro, todos los integrantes deben comprenderse y colaborar entre sí, pero :

El tenista B no puede jugar con el tenista M.

El tenista C no puede jugar con el tenista P.

El tenista M no puede jugar con el tenista O.

Responda a las siguientes preguntas suponiendo que usted es el entrenador :

17.- Si es seleccionado el jugador O y rechazado el jugador B, el equipo de cuatro personas deberá ser el siguiente :

A) A, C, M y O D) A, N, P y O
B) A, C, N y O E) C, P, N y O
C) A, C, P y O

18.- Si el jugador M pertenece al equipo, los otros tres tenistas escogidos son :

A) A, B y N B) A, C y N C) A, C, y O
D) A, C y P E) P, C y N

19.- ¿Cuál o cuáles de estas afirmaciones deben ser falsas?

I) Los jugadores B y P nunca pueden ser ambos seleccionados.

II) Los jugadores C y O nunca pueden ser ambos seleccionados.

III) Los jugadores C y N nunca pueden ser ambos seleccionados.

A) I solamente D) I y III solamente
B) II solamente E) Todas son falsas
C) III solamente

20.- ¿Cuál o cuáles de las siguientes proposiciones deben ser siempre cierta?

I) Si M juega, A juega.
II) Si O juega, B juega.
III) Si M juega, N juega.

A) I solamente D) I y III solamente
B) II solamente E) Todas son ciertas
C) III solamente

21.- Suponga que las tres proposiciones siguientes son verdaderas :

I) Todos los estudiantes de primer año son humanos.

II) Todos los estudiantes son humanos.

III) Algunos estudiantes piensan.

Dadas las siguientes proposiciones :

(1) Todos los alumnos de primer año son estudiantes.

(2) Algunos humanos piensan.

(3) Ningún estudiante de primer año piensa.

(4) Algunos humanos que piensan no son estudiantes.

Las proposiciones que son consecuencias lógicas de I, II y III son :

A) 2 B) 4 C) 2 ; 3

D) 2 ; 4 E) 1 ; 2

22.- - Todos los taxistas son unos abusivos.
- Algunas mujeres son taxistas.

Por lo tanto :

A) Todas las mujeres son abusivas

B) Todos los taxistas son mujeres

C) Todos los abusivos son mujeres

D) Algunos no abusivos son mujeres

E) Ningún taxista es no abusivo

23.- Tres personas : Luis, Pedro y David estudian en 3 universidades X, Y, Z; cada uno de los tres estudia una carrera diferente : A, B ó C. Luis no está en X, David no está en Y. El que está en X no estudia en A. El que está en Y estudia en B. David no estudia en C.

¿Qué estudia Pedro y dónde?

A) D en Y D) C en X

B) A en Z E) No se puede determinar

C) C en Z

24.- Sabiendo que la proposición compuesta: $p \rightarrow (\sim r \vee s)$, es falsa :

$t \rightarrow (p \vee s)$; $p \leftrightarrow r$; $\sim s \rightarrow t$; $t \rightarrow p$

¿Cuántas son verdaderas?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

25.- Considere las proposiciones :

(1) p y q son ambas verdaderas.

(2) p es verdadera y q es falsa.

(3) p es falsa y q es verdadera.

(4) p es falsa y q es falsa.

¿Cuántas de ellas implican la negación de la proposición p y q son ambas verdaderas?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

26.- Si la proposición "$a = 0$" es verdadera, la negación de la proposición "Para valores reales de a y b, si $a = 0$, entonces $ab = 0$" es :

A) Si $a \neq 0$, entonces $ab \neq 0$

B) Si $a \neq 0$, entonces $ab = 0$

C) Si $a = 0$, entonces $ab \neq 0$

D) Si $ab \neq 0$, entonces $a \neq 0$

E) Si $ab = 0$, entonces $a \neq 0$

27.- ¿Qué parentesco tengo con la madre del nieto de mi padre, si soy su hijo único?

A) hijo B) esposo C) padre

D) abuelo E) nieto

28.- Si anteayer del mañana del pasado mañana es viernes, ¿qué día fue ayer?

A) Lunes B) Jueves C) Miércoles

D) Martes E) Sábado

29.- En un aula de primer día de clases, dos hermanas gemelas de nombres Nena y Nina se presentan ante sus compañeros. Una de ellas dice "yo soy Nana", "si lo que ella dice es cierto, yo soy Nina".
Si una de las dos miente siempre y la otra nunca lo hace, indicar el nombre de la sincera y si fue la 1ra o la 2da en hablar

A) Nina 1ra B) Nena 1ra C) Nina 2da

D) Nena 2da E) No se puede determinar

30.- Los esposos Ramirez tienen 4 hijos (varones). Cada hijo tiene una hermana y cada hermano tiene 3 sobrinos. ¿Cuál es el nú-

mero mínimo de perdonas que conforman esta familia?

A) 12 B) 9 C) 8 D) 14 E) 10

31.- Seis amigos se sientan a comer helados alrededor de una mesa.

- Julio esta al lado de Carlos y al frente de Ana.
- David no se sienta nunca al lado de Ana y de Carlos.

Entonces es siempre cierto que :

A) Ana y Carlos se sientan juntos

B) David está a la derecha de Julio

C) David está a la izquierda de Julio

D) Ana y Carlos están separados por un asiento

E) B y C

NIVEL C

32.- Dado el siguiente teorema : "Si dos ángulos de un triángulo son iguales, el triángulo es isósceles" y las siguientes proposiciones :

1) Si dos ángulos de un triángulo no son iguales, el triángulo no es isósceles.

2) Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.

3) Si un triángulo no es isósceles, entonces dos de sus ángulos no son iguales.

4) Una condición necesaria para que dos ángulos de un triángulo sean iguales es que el triángulo sea isósceles.

¿Qué combinación de proposiciones contienen únicamente las que son equivalentes, desde el punto de vista lógico, al teorema dado?

A) 1 , 2 , 3 , 4 B) 1 , 2 , 3 C) 2 , 3 , 4

D) 1 , 2 E) 3 , 4

33.- Si M : $p \vee q$; N : $(\sim p \wedge q) \vee p$;

R : $q \rightarrow p$ son proposiciones compuestas, donde p y q tienen valores de verdad distintos. El valor de verdad de M, N, R en ese orden es :

A) VVV B) VFV C) VFF

D) VVF E) FVV

34.- Un pueblo estaba dividido en dos barrios A y B. Los de A decían siempre la verdad y los de B siempre mentían. En cierta ocasión llegó un turista a las afueras del pueblo y encontró un grupo de tres personas. Preguntó a uno de ellos de qué barrio era y no entendió la contestación. Entonces el turista preguntó a los otros dos : ¿Qué ha dicho?

La segunda persona le dijo : "Ha dicho que es de A"

La tercera persona le dijo : "Ha dicho que es de B"

¿Cuál de estas personas es la embustera?

A) la primera D) ninguna

B) la segunda E) faltan datos para decidir

C) la tercera

35.- Los domingos solo se pueden hacer dos cosas : Ir a la playa o estudiar.

Si los que estudian los domingos siempre ingresan, entonces :

A) El que ingresó, no fue los domingos a la playa

B) El que no ingresó, fue los domingos a la playa

C) El que va los domingos a la playa, no ingresa

D) El que no va los domingos a la playa no ingresa

E) Todas son verdaderas

36.- Dadas las dos hipótesis :

I) Algunos Mems no son Ens

II) Ningún En es Vee

Si "algunos", significa "por lo menos uno", podemos concluir que :

A) Algunos Mems no son Vees

B) Algunos Vees no son Mems

C) Ningún Mem es un Vee

D) Algunos Mems son Vees

E) Ninguna de las anteriores es deducible de las hipótesis dadas

37.- Seis amigos viven en un edificio de tres pisos en el cual hay dos departamentos por piso. Sergio y Marco viven en el mismo piso; la casa de Antonio se encuentra más abajo que la de Marco y para ir de la casa de Jorge a la casa de Pepe hay que bajar dos pisos.

Se afirma :

A) Pepe vive en el tercer piso

B) No es cierto que Arturo viva en el tercer piso

C) Arturo vive en el segundo piso

D) No es cierto que Pepe viva en el tercer piso.

E) Pepe y Arturo no viven en el mismo piso.

Utilice la siguiente información para responder a las preguntas 7, 8, 9.

Si A, B, C y D corresponden a los nombres Roberto, Carlos, Manuel y Jesús. (no necesariamente en ese orden)

I) Roberto. C y D fueron al teatro el domingo pasado.

II) Carlos. A y B trabajan en la misma fábrica.

III) A, C y Manuel concurren al juego mecánico con regularidad.

IV) D, B y Jesús juegan en el mismo equipo.

V) C es pobre en cambio Carlos es adinerado

38.- ¿Quién es pobre?

A) Roberto B) Carlos C) Manuel

D) Jesús E) N.A..

39.- ¿Quiénes juegan en el mismo equipo?

A) Roberto, Carlos y Jesús

B) Manuel, Carlos y Jesús

C) Roberto, Manuel y Jesús

D) Carlos, Manuel y Roberto

E) N.A.

40.- ¿Quién es A?

A) Roberto B) Manuel C) Carlos

D) Jesús E) N.A.

De acuerdo a l a siguiente información responda las preguntas 41 y 42.

Un choque en cadena de seis autos, es causado por una imprudente parada de Carla, que tiene un carro azul.

- El auto blande de María está adyacente al de José y al de gloria.
- Juan no tiene carro azul y chocó a José.
- Un carro rojo choco a Juan. Sabiendo que hay 2 carros rojos, 2 azules y 1 verde y 1 blanco y que no hay 2 colores iguales consecutivos.

41.- ¿De qué color era el último auto que chocó?

A) Rojo B) Azul C) Verde

D) Blanco E) N.A.

42.- Determine el cuarto auto de la cadena y su chofer.

A) Blanco ; María D) Verde ; María

B) Azul ; José E) Rojo ; José

C) Rojo ; Juan

43.- En una carrera participan 3 parejas los Zavala, los Arias y los Fartán. Si :

- Los esposos llegaron antes que sus respectivas esposas.

- La Sra. Fartán llegó antes que el Sr. Zavala.

- El Sr. Arias no llegó primero y fue superado por una dama.

- La Sra. Zavala llegó quinta justo después de su esposo.

En qué posición llegaron el Sr. y la Sra. Far tán.

A) 3 - 6 B) 2 - 4 C) 3 - 4

D) 1 - 2 E) 3 - 5

RAZONAMIENTO LOGICO

La lógica es el estudio de las reglas por medio de las cuales determinadas proposiciones relacionadas entre sí, pueden agruparse de modo adecuado para arribar a otras nuevas. Estas últimas, al derivarse lógicamente - es decir, siguiendo las reglas de la lógica- de otras, se llaman deducciones. Las deducciones pueden usarse a su vez para obtener otras más y así, mediante una secuela de pensamientos lógicos, llegar a una nueva y más importante información.

En las definiciones de lo que es lógica y deducción no mencionamos los hechos como si éstos fuesen puntos de partida para crear otros más. En lugar de ello mencionamos "*proposiciones*". Las reglas de la lógica han sido elaboradas sin consideración a la verdad o falsedad de las proposiciones que sirven como punto de partida y que se llaman *premisas*. En muchas situaciones prácticas diferirán los criterios sobre si las premisas son o no ciertas. De ahí que el problema de llegar a conclusiones correctas en las situaciones reales, se separe en dos partes. El lógico tan sólo tiene que ver con el proceso de arribar a una deducción o deducciones partiendo de las premisas, que dará por ciertas, dejando a otros la tarea de decidir si dicha premisas y las deducciones derivadas de las mismas, encajan o no en la realidad. Como hemos visto, lo que para un hombres es cierto, para otro puede serlo sólo a medias y para otro no serlo por completo.

A fin de evitar cualquier mala interpretación de los términos cierto y falso, es preferible no usarlos al describir los procesos lógicos. La palabra válido es mucho mejor para indicar si una decisión es o no correcta. En otras palabras, una deducción proveniente de dos proposiciones puede ser válida *-o sea correctamente obtenida-* ; empero, si las proposiciones originales *-las premisas-* no son ciertas, es probable, aunque no de una manera absoluta, que la conclusión *-sea la afirmación con que termina el proceso del razonamiento-* no sea cierta. Por otra parte, se puede partir de afirmaciones lógicas como premisas y, siguiendo un procedimiento ilógico llegar a conclusiones descartadas.

A fin de razonar correctamente en las situaciones que se nos presentan a diario, es de la mayor importancia empezar con premisas correctas y hacer uso de procedimiento lógicos y sanos. Se necesita contar con hechos *-o sea afirmaciones sobre cosas ciertas-* y manejarlos lógicamente para obtener deducciones verdaderas.

Pasemos a considerar la naturaleza de una deducción de un modo más detallado, considerando un ejemplo sencillo. Aquí tenemos dos premisas :

1. La monarquía es el mejor sistema de gobierno.

2. El gobierno de Angola es una monarquía.

Nótese que la afirmación 1 es una opinión con la cual podemos no estar de acuerdo. Asumamos que la afirmación 2 es un hecho. Pero independientemente de la naturaleza de las afirmaciones, para el propósito de sacar una conclusión podemos aceptarlas como premisas cuya certeza o falsedad pueden ser ignoradas por el momento. De estas dos premisas deducimos la siguiente afirmación :

3. Luego, Angola tiene la mejor forma de gobierno.

La conclusión - *afirmación* 3 - , es una deducción correcta de las premisas 1 y 2. En otras palabras, es una deducción válida. Pero podemos negar con energía que la conclusión sea cierta. En tal caso, los intentos que se hagan para probar que es falsa deberán concernir no al procedimiento lógico por el cual se llegó a tal deducción, sino a la verdad o falsedad de las premisas.

El conjunto de afirmaciones que hemos citado arriba, es un ejemplo de estructura lógica conocida como *silogismo*. En el silogismo se da una premisa mayor (proposición 1), otra menor (proposición 2), y en seguida una conclusión deducida de aquéllas (proposición 3).

28 Axiomas de Orden

En el conjunto de los números reales, existen leyes para efectuar operaciones, a las que se denominan AXIOMAS DE CAMPO, pero según estos axiomas no es posible establecer por ejemplo que 2 es mayor que 1; que 3 es mayor que 2; etc. Entonces, para tratar este punto, se dispone de los AXIOMAS DE ORDEN, que permiten establecer un ordenamiento entre los número reales; asimismo, plantear proposiciones acerca de un número real que es mayor o menor que otro. Es así que el conjunto $\mathbb{R}$ de los reales, satisface los axiomas de orden y los axiomas de campo, entonces se dice que $\mathbb{R}$ es un campo ordenado.

I) LISTA DE SIMBOLOS

En el desarrollo de este capítulo, se utilizarán los siguientes símbolos :

1.- $>$ "mayor" 2.- $<$ "menor"

3.- $\neq$ "desigual" 4.- $\geq$ "mayor o igual"

5.- $\not<$ "no es menor" 6.- $\leq$ "menor o igual"

7.- $\not>$ "no es mayor"

Las anotaciones 4 y 5 ; 6 y 7 tienen un mismo significado y pueden ser reemplazadas una por otra.

II) AXIOMAS DE ORDEN

1.- Para cualesquiera dos números reales a y b, una y sólo una de las siguientes relaciones se cumple :

$a<b$; $a>b$; $a=b$ (Ley de Tricotomia)

2.- Si $a<b$ y $b<c$; entonces $a<c$ (Ley Transitiva)

3.- Si $a<b$; entonces para todos $c \in \mathbb{R}$, $a+c < b+c$

4.- Si a , b y si c es positivo entonces : $ac < bc$

Las definiciones de los símbolos $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, se dan a continuación :

$x<y$; significa que : $y - x$ es positivo

$y>x$; significa que : $x<y$

$x \leq y$; significa que : ó $x<y$, ó , $x=y$

$y \geq x$; significa que : $x \leq y$

Si un número es positivo, escribimos : $a > 0$; en caso de ser negativo se escribirá: $a < 0$.

Los enunciados $a < b$; $a > b$; $a \leq b$; $a \geq b$ reciben el nombre de desigualdades y de los axiomas de orden podemos derivar todas las reglas para operar con ellas.

Un grupo de desigualdades tales como : $x < y$; $y < z$ se escribirá más brevemente: $x < y < z$. Análogamente : $x \leq y$; $y \leq z$, se escribirá : $x \leq y \leq z$.

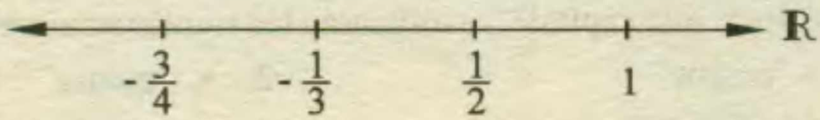
Ejemplos :

a. $6 > -6$; porque : $6 - (-6) = 12$, que es positivo

b. $8 < 11$; porque : $8 - 11 = -3$, que es negativo

c. $-4 < -1$; porque : $-4 - (-1) = -3$, que es negativo

Muchos de los conceptos de las desigualdades son fácilmente entendibles cuando se toma como referencia la recta numérica. Aquí debemos recordar que a cada punto de la recta, le corresponde un solo número real.



$a > b$, significa : "a está a la derecha de b"

$a < b$, significa : "a está a la izquierda de b"

En el diagrama mostrado : $-\frac{3}{4} < \frac{1}{2}$; $1 > \frac{1}{2}$

Cuando en una desigualdad aparecen cantidades desconocidas o incógnitas, recibe el nombre de inecuación y para resolverla se utilizan los diferentes axiomas y leyes derivadas.

Ejemplos :

a. $x - 4 > 15$

Sumando 4 a cada lado se obtiene : $x > 19$

b. $x + 5 \leq 3$

Sustrayendo 5 a cada lado : $x \leq -2$

La multiplicación o división son ligeramente más complicadas. Cada lado puede ser multiplicado o dividido por una cantidad positiva sin cambiar el sentido de la desigualdad.

Si se multiplica o divide por una cantidad negativa, se debe cambiar el sentido de la desigualdad.

Por ejemplo, si : $3 < 4$ y multiplicamos cada lado por (-1), la nueva desigualdad es : $-3 > -4$.

Ejemplos :

a) Resolver : $3x > 12$

Dividiendo entre 3 : $x > 4$

b) Resolver : $-4x + 6 < 30$

Restando 6 : $-4x < 24$

Dividiendo entre -4 : $x > -6$

(El sentido de la desigualdad cambia porque se ha dividido por un número negativo)

c) Resolver : $x + 3 < \frac{3}{2}x - 1$

Efectuamos paso por paso : $3 < \frac{1}{2}x - 1$

Transponiendo términos : $4 < \frac{1}{2}x$

Multiplicando por 2 : $8 < x$

Entonces : $x > 8$

d) Resolver : $3x \geq 7x - 8$

Transponiendo términos : $-4x \geq -8$

Dividiendo por -4 : $x \leq 2$

Dos desigualdades pueden ser sumadas si sus símbolos tienen el mismo sentido, con solo sumar ambos lados y colocando el mismo símbolo. Si no tiene la misma dirección, una de ellas cambia, puesto que $a < b$, ello significa que: $b > a$.

Ejemplos :

a) Si $x > 3$ é $y > 8$, entonces : $x + y > 11$

b) Si $x > y$ é $y < z$, entonces $x > y$; $z > y$, luego : $x + z > 2y$

c) Si $x > 16$ é $y < 15$, entonces : $x - y > 1$

(porque $x > 16$; $-y > -15$ y luego de sumar : $x - y > 1$)

Si $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ y a , b son ambos positivos, ó, ambos negativos, entonces $a > b$.

En otras palabras, las fracciones pueden ser invertidas, solo si ambas son del mismo signo, aunque para esto debe cambiarse el sentido de la desigualdad.

Ejemplos :

a) $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$, entonces : $2 > \frac{4}{3}$

b) Si $x > 0$ y $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$, entonces : $x > 2$

III) APLICACION AL ORDENAMIENTO DE DATOS

Cuando se tiene un conjunto de elementos que pueden disponerse en cierto orden, ya sea creciente o decreciente, la información que permite hallar este ordenamiento, se da en forma de desigualdades y el procedimiento de solución se fundamenta en las propiedades estudiadas en el item anterior .

Ejemplo :

Pedro(P) es mayor que Luis(L); Antonio(A) es menor que Juan(J); Sonia(S) es menor que Antonio y Luis es mayor que Juan ¿Cuál es el mayor de todos los mencionados? ¿Cuál es el menor?.

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo con los datos , podemos establecer las siguientes desigualdades :

$$P > L \quad ; \quad A < J \quad ; \quad S < A \quad ; \quad L > J$$

Ordenando de modo que todos los signos de desigualdad estén orientados hacia la derecha ,tendremos :

$$P > L \quad ; \quad L > J \quad ; \quad J > A \quad ; \quad A > S$$

Estas relaciones nos permiten establecer que :

$$\mathbf{P > L > J > A > S}$$

Entonces, el mayor es Pedro y la menor es Sonia.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- X tiene más habitantes que W ; W tiene menos habitantes que Y pero más que X ¿Cuál de las siguientes conclusiones es necesariamente cierta?

A) X tiene más habitantes que Y.

B) Y tiene menos habitantes que Z.

C) X tiene menos habitantes que Y.

D) X tiene más habitantes que Z.

E) X tiene igual número de habitantes que Y. ***UNFV - 84***

Resolución:

Escribimos los datos empleando desigualdades :

X tiene más habitantes que W .... $X > W$ ó $W < X$

W tiene menos que Y pero más que Z .... $Z < W < Y$

De estas dos relaciones podemos determinar esta otra : $Z < W < X$

De donde se deduce que : $Z < X$, ó , $X > Z$. RPTA. D

2.- Hallar el número de valores enteros que toma "x" sabiendo que :

$$0{,}333........ < \frac{x}{22} < 0{,}888........$$

A) 11 ***B) 12*** ***C) 13*** ***D) 14*** ***E) 15*** ***PUCP 97 - II***

Resolución:

Sabemos que : $0{,}333...... = \frac{1}{3}$; $0{,}888...... = \frac{8}{9}$

Entonces la desigualdad es : $\frac{1}{3} < \frac{x}{22} < \frac{8}{9}$

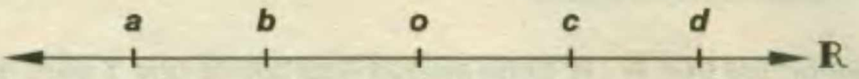
Multiplicamos por 22 : $\frac{22}{3} < x < \frac{8\cdot 22}{9}$

$$7{,}33...... < x < 19{,}55.....$$

Los valores enteros de x son : 8 ; 9 ; 10 ; ...... ; 19

Es decir, **12 valores.** RPTA. B

3.- Si los números reales a, b , o, c y d están situados en una recta numérica real, en el siguiente orden :



Es correcto afirmar que : ***1. (a + b) (a - b) > 0***

2. (a / b) (c / d) < 0

3. (d - c) (b - a) > 0

A) Solo 1 ***B) Solo 2*** ***C) Solo 3*** ***D) Solo 1 y 3*** ***E) Solo 2 y 3*** ***PUCP 96 - II***

Resolución:

1. a y b son ambos negativos, luego $(a + b)$ es negativo.

También, del gráfico $(a - b)$ es negativo, luego :

$(a + b) \cdot (a - b)$, es positivo

Luego : (1) es verdadero

2. Como a y b tienen igual signo, $\frac{a}{b}$ es positivo; igualmente, $\frac{c}{d}$ es positivo, entonces :

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ es positivo

Luego : (2) es falsa.

3. d está más a la derecha que c, luego, $d - c$ es positivo. También b está más a la derecha que a, luego $b - a$ es positivo.

$(d - c) \cdot (b - a)$ es positivo

Luego : (3) es verdadera. **RPTA. D**

4.- Si a y b son números reales tales que : $-5 \le a \le 7$ y $2 \le b \le 6{,}5$; entonces : $\frac{a-2b}{3}$, varía entre :

A) -3 y -2 ***B) -15 y 2*** ***C) -18 y 3*** ***D) -16 y 6*** ***E) -6 y 1*** ***UNMSM 91***

Resolución:

Si : $2 \le b \le 6{,}5$, luego de multiplicar por -2, tendremos :

$$-4 \ge -2b \ge -13 \ , \ \text{ó} \ , \ -13 \le -2b \le -4$$

Y como del otro dato, $-5 \le a \le 7$, podemos sumar las desigualdades por ser del mismo sentido :

$$-13 - 5 \le -2b + a \le -4 + 7$$

$$\Rightarrow \quad -18 \le a - 2b \le 3$$

Dividiendo entre 3 : $-6 \le \frac{a-2b}{3} \le 1$

Es decir : $\frac{a-2b}{3}$ varía entre **-6 y 1.** **RPTA E**

5.- Dado el siguiente conjunto de enunciados :

- ***Carlos es mayor que Luis.***
- ***Pedro y Luis tienen la misma edad.***
- ***Luis y Juan son hermanos mellizos.***
- ***Julio es mayor que Carlos pero menor que José.***

La conclusión que se deduce necesariamente es :

I. Pedro y Juan no son mayores que Carlos

II. José no es mayor que Carlos.

III. José no es menor que Juan y Pedro.

A) solo I y II ***B) solo I y III*** ***C) solo II y III*** ***D) I, II y III*** ***E) N.A.*** ***PUCP 95 - II***

Resolución:

Escribiendo los datos como desigualdades o igualdades según el caso :

C > L ; P = L ; L = Juan ; Julio > C ; Julio < José

Luego : Jo > Julio > C > L

Pero P = L ; L = Juan, luego : José > Julio > C > Luis / Pedro / Juan

Ahora, según esto :

I : Pedro y Juan no son mayores que Carlos, es verdadera.

II : José no es mayor que Carlos, es falsa.

III : José no es mayor que Juan y Pedro, es verdadera.

Se concluye que I y III son verdaderas. **RPTA. B**

6.- Si se sabe que : 0 < m < n < 1 , ¿Cuál de las siguientes expresiones es la mayor?

A) $\frac{2m}{n}$ *B)* $\frac{2n}{m}$ *C)* $\frac{n}{m}$ *D)* $\frac{n}{m+1}$ *E)* $\frac{m}{n+1}$ ***PUCP 95 - II***

Resolución:

Si : $0 < m < n < 1$, podemos tomar de manera arbitraria : $m = \frac{1}{3}$; $n = \frac{1}{2}$ y reemplazarlos en cada alternativa. Veamos:

$$\frac{2m}{n} = \frac{2(1/3)}{1/2} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2n}{m} = \frac{2(1/2)}{1/3} = \frac{1}{1/3} = 3$$

$$\frac{n}{m} = \frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{n}{m+1} = \frac{1/2}{(1/3)+1} = \frac{1/2}{4/3} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{m}{n+1} = \frac{1/3}{(1/2)+1} = \frac{1/3}{3/2} = \frac{2}{9}$$

Entre $\frac{4}{3}$; 3 ; $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{2}{9}$, la mayor es 3, que corresponde a :

$\frac{2n}{m}$ **RPTA. B**

7.- Hallar 2 fracciones que tengan por numerador la unidad, por denominadores dos números naturales consecutivos, tales que entre ellas se encuentre la fracción 5/39.

A) 1/10 ; 1/9 *B) 1/12 ; 1/11* *C) 1/6 ; 1/7* *D) 1/5 ; 1/6* *E) 1/7 ; 1/8* ***UNFV 92***

Resolución:

Sean las fracciones : $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n+1}$

Entre ellas se encuentra la fracción $\frac{5}{39}$, entonces planteamos la desigualdad :

$$\frac{1}{n+1} < \frac{5}{39} < \frac{1}{n}$$

Que equivale a resolver por separado :

a) $\frac{1}{n+1} < \frac{5}{39}$
$\Rightarrow$ $39 < 5n + 5$
$\Rightarrow$ $34 < 5n$
$\therefore$ $6{,}8 < n$

b) $\frac{5}{39} < \frac{1}{n}$
$\Rightarrow$ $5n < 39$
$\therefore$ $n < 7{,}8$

Es decir, n es un número natural que debe cumplir: $6{,}8 < n < 7{,}8$; lo cual solo es posible cuando $n = 7$.

$\therefore$ Las fracciones son : $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{8}$ **RPTA. E**

8.- Un número entero disminuído en 5 resulta mayor que su duplo aumentado en 2; disminuído en 10 resulta menor que su duplo disminuído en 1. El número es :

A) - 8 *B) 10* *C) -10* *D) -9* *E) 8* ***UNMSM 95***

Resolución:

Designemos por x al número, luego según las condiciones del problema planteamos :

Un número entero disminuído en 5 resulta mayor que su duplo aumentado en 2 .... $x - 5 > 2x + 2$ ...(1)

Disminuído en 10 resulta menor que su duplo disminuído en 1........ $x - 10 < 2x - 1$ ...(2)

De (1) y (2) : $-7 > x$ y $-9 < x$

Que se puede escribir así : $-9 < x < -7$ ...(3)

El único valor entero que cumple (3) es : $x = -8$ RPTA. A

9.- Un matrimonio desea ir al cine con sus hijos, disponiendo para las entradas 15 soles. Se sabe que si compran entradas de 1,80 soles les sobra dinero; pero si compran entradas de 2,00 soles les falta dinero. ¿Cuántos hijos tenía el matrimonio?

A) 6 B) 8 C) 7 D) 5 E) 4 UNFV 93

Resolución:

Sea "n" el número de entradas que compraron, según los datos :

$$1{,}8n < 15 \quad ; \quad 2n > 15$$

$$n < 8{,}33.... \qquad n > 7{,}5$$

Reuniendo estos resultados : $7{,}5 < n < 8{,}333.....$

Como n debe ser entero,concluímos que : $n=8$ entradas.

Número de hijos = número de entradas - 2 = 8 - 2 = 6 RPTA. A

10.- «a» representa un número entre 3 y 5 ; «b», entre 10 y 15; entonces b/a representa un número entre:

A) 2 y 3 B) 3 y 5 C) 2 y 5 D) 3 y 15 E) 5 y 10 UNMSM 96

Resolución:

Según los datos : $3 < a < 5$ y $10 < b < 15$

Para determinar en qué intervalo se encuentra $\frac{b}{a}$,debemos multiplicar : $b \cdot \frac{1}{a}$ y para esto, transformamos la primera desigualdad :

$$3 < a < 5 \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{a} > \frac{1}{5} \quad , \quad ó \quad , \quad \frac{1}{5} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$$

Luego, multiplicamos miembro a miembro las desigualdades del mismo sentido :

$$10 < b < 15$$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$$

Multiplicando m.a.m : $10 \cdot \frac{1}{5} < b \cdot \frac{1}{a} < 15 \cdot \frac{1}{3}$

Efectuando : $2 < \frac{b}{a} < 5$

Entonces, el valor de $\frac{b}{a}$ está entre : **2 y 5** RPTA. C

11.- Si a y b son mayores que cero la expresión :

$$(a+b)\ \left(a^{-1}+b^{-1}\right),\ es:$$

A) mayor o igual que 4 *B) igual a 2* *C) igual a 4*
D) menor que 4 *E) igual a 1* ***UNMSM 90***

Resolución:

La expresión dada la transformamos progresivamente :

$$E = (a+b)\left(a^{-1}+b^{-1}\right) = (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = (a+b)\,.\,\frac{a+b}{ab}$$

$$E = \frac{a^2+2ab+b^2}{ab} = \frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{2ab}{ab}$$

$$E = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \quad ...(1)$$

Ahora tendremos que determinar la variación de : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

Partiremos de esta desigualdad que se cumple siempre para cualquier valor de a y b :

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \geq 2 + 2$$

Aquí el primer miembro es justamente la expresión E, luego :

$E \geq 4$ RPTA. A

12.- Si : x - y > x , ∧ , x + y < y ; entonces :

A) y < x *B) x < y* *C) x < y < 0* *D) x < 0 ; y < 0* *E) x < 0 ; y > 0*

Resolución:

De : $x - y > x$, deducimos : $x - x > y$, luego : $y < 0$

Además de : $x + y < y$, obtenemos : $x < y - y$, ó , $x < 0$

La conclusión correcta es **$x < 0$; $y < 0$** RPTA. D

13.- Si : - El membrillo no es más alto que el naranjo
- El manzano no es más alto que el naranjo
- El naranjo no es más alto que el manzano
Entonces es cierto que :

A) El naranjo es el más bajo
B) El manzano es el más bajo
C) El membrillo es más bajo que el naranjo
D) El manzano no es más bajo que el membrillo
E) Ninguna es correcta.

Resolución:

Escribiendo los datos en forma de desigualdades :

$$\text{Mem} \ngtr \text{Na} \quad \Rightarrow \quad \text{Mem} \leq \text{Na} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{Man} \ngtr \text{Na} \quad \Rightarrow \quad \text{Man} \leq \text{Na} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\text{Na} \ngtr \text{Man} \quad \Rightarrow \quad \text{Na} \leq \text{Man} \quad \ldots\ldots (3)$$

De (2) y (3) se deduce que el manzano y el naranjo tienen la misma altura.

De la primera se deduce que :

El membrillo no es más alto que el manzano

Esto concuerda con D. **RPTA. D**

14.- Pedro es mayor que Juan; Pedro es mayor que Luis; Enrique es menor que Luis y Juan es mayor que Enrique. Si a los cuatro los ordenamos de mayor a menor, quién es el 4º?

A) Juan ***B) Enrique*** ***C) Pedro*** ***D) Luis*** ***E) Ninguno***

Resolución:

Pedro = P ; Juan = J ; Luis = L ; Enrique = E

Escribimos los datos en forma de desigualdades :

$$P > J \ ; \ P > L \ ; \ E < L \ ; \ J > E$$

De la 1ra y la última : $P > J > E$

De la 2da y la 3ra : $P > L > E$

1ro	2do	3ro	4to
P			E

Se puede deducir que P y E son el mayor y menor respectivamente, siendo J y L los intermedios.

Esto es suficiente para afirmar que Enrique es el cuarto, en el orden de mayor a menor.

RPTA. B

15.- La expresión : $x^2 - x - 6 < 0$, es equivalente a la expresión :

A) $-2 < x < 3$ B) $x > -2$ C) $x < 3$ D) $x > 3$ y $x < -2$ E) $x > 3$ ó $x < -2$

Resolución:

Podemos factorizar la expresión y tendremos :

$$x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) < 0$$

Esta última inecuación se satisface si : $x - 3 < 0$, y , $x + 2 > 0$

ó : $x - 3 > 0$, y , $x + 2 < 0$

El primer conjunto de inecuaciones implica : $-2 < x < 3$.

El segundo conjunto es imposible de satisfacer. **RPTA. A**

16.- Si a y b son dos números positivos y distintos, entonces :

A) $\frac{2ab}{a+b} > \sqrt{ab} > \frac{a+b}{2}$ B) $\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b} > \frac{a+b}{2}$ C) $\frac{2ab}{a+b} > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

D) $\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b} > \sqrt{ab}$ E) $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

Resolución:

Partiremos de : $(a - b)^2 > 0$

Luego : $a^2 + b^2 > 2ab$

Entonces : $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab \Rightarrow a + b > 2\sqrt{ab}$

$$\therefore \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \quad ....(1)$$

Por otro lado : $\underbrace{a^2 + 2ab + b^2}> 4ab \Rightarrow 1 > \frac{4ab}{(a+b)^2}$

$$\Rightarrow ab > \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \Rightarrow \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b} \quad ....(2)$$

De (1) y (2) : $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$ **RPTA. E**

17.- Si se tiene que : $-1 < x - 1 < 1$; entonces se cumple que : $a < x^2 - 1 < b$; donde :

A) $a = -1$; $b = 3$ B) $a = -5$; $b = -2$ C) $a = 3$; $b = 5$

D) $a = 4$; $b = 8$ E) $a = -4$; $b = -3$

Resolución:

Se trata de transformar la desigualdad inicial hasta obtener la otra, aplicando las propiedades correctamente :

$$-1 < x - 1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 2$$

Elevamos al cuadrado : $0 < x^2 < 4$

Restamos 1 : $-1 < x^2 - 1 < 3$

Entonces : $a = -1 \ ; \ b = 3$ RPTA. A

18.- De los siguientes conjuntos, el que incluye todos los valores de x que satisfacen la inecuación : 2x - 3 > 7 - x , es :

A) $x > 4$ ***B)*** $x < \frac{10}{3}$ ***C)*** $x = \frac{10}{3}$ ***D)*** $x > \frac{10}{3}$ ***E)*** $x < 0$

Resolución:

Sumamos $(x + 3)$ a ambos lados de la igualdad :

$$2x - 3 > 7 - x$$

$$\Rightarrow \quad 2x - 3 + x + 3 > 7 - x + x + 3$$

$$\Rightarrow \quad 3x > 10$$

$$\therefore \quad x > \frac{10}{3}$$ RPTA. D

19.- Sea x un número tal que : - 1 < x < 0 ; luego :

A) $x^2 < x$ ***B)*** $x^2 > 1$ ***C)*** $x^3 > x$ ***D)*** $x > 2x$ ***E)*** N.A.

Resolución:

De $-1 < x < 0$, se tiene : $x < 0$

Sumamos x a cada miembro : $x + x < x$

$2x < x$, ó , $x > 2x$ RPTA. D

20.- Si x > 1 ¿Cuáles de las siguientes expresiones aumentan cuando x aumenta?

I) $\frac{1}{x^3 - x}$ ***II)*** $x - \frac{1}{x}$ ***III)*** $3(x^3 - x^2)$

A) I solamente ***B) II solamente*** ***C) II y III solamente***

D) III solamente ***E) I , II y III***

Resolución:

Demos valores de x que cumplan : $x > 1$, de este modo podemos elaborar la siguiente tabla :

		$x = 2$	$x = 3$
I.	$\frac{1}{x^3 - x}$	$\frac{1}{8-2} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{27-3} = \frac{1}{24}$
II.	$x - \frac{1}{x}$	$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$
III.	$3\left(x^3 - x^2\right)$	$3(8-4) = 12$	$3(27-9) = 54$

Se observa que a medida que x aumenta I disminuye ; II aumenta, y , III aumenta.

Solo II y III aumentan. RPTA. C

21.- María tiene 5 años menos que el doble de la edad de Julia y las dos edades suman más de 35 años. Si x es el número de años de Julia, se tiene que :

A) x - (2x + 5) < 35 *B) x + (2x - 5) > 35* *C) (2x - 5) -x > 35*

D) x + (2x + 5) < 35 *E) x + (2x - 5) = 35*

Resolución:

Edad de Julia : x

Edad de María : $2x - 5$

Las dos edades suman más de 35 años :

$\therefore$ $x + (2x - 5) > 35$ RPTA. B

22.- Si el numerador de una fracción es (6x + 1) , el denominador (7- 4x), ∧ x puede tomar cualquier valor entre -2 y 2 , ambos incluidos; entonces los valores de x para los cuales el numerador es mayor que el denominador , está dado por :

A) $\frac{3}{5} < x \leq 2$ *B)* $\frac{3}{5} \leq x \leq 2$ *C)* $0 < x \leq 2$ *D)* $0 \leq x \leq 2$ *E)* $-2 \leq x \leq 2$

Resolución:

Numerador : $6x + 1$; Denominador : $7 - 4x$

El primero es mayor que el segundo : $6x + 1 > 7 - 4x$

$$\Rightarrow \quad 6x + 4x > 7 - 1$$

$$\Rightarrow \quad 10x > 6$$

$\therefore \qquad x > \frac{3}{5}$ .... (1)

Como x varía entre -2 y 2 : $-2 \leq x \leq 2$ .... (2)

De (1) y (2) : $\frac{3}{5} < x \leq 2$ RPTA. A

23.- Cinco veces el dinero de A más el dinero de B es una cantidad mayor que 51 soles. Tres veces el dinero de A menos el dinero de B es igual a 21 soles. Si «a» representa el dinero de A y «b» el de B, en soles, entonces :

A) a > 9 ; b > 6 ***B) a > 9 ; b < 6*** ***C) a > 9 ; b = 6***

D) a > 9 pero no se pueden fijar extremos para b ***E) 2a = 3b***

Resolución:

De los datos : $5a + b > 51$; $3a - b = 21$

Puesto que : $b = 3a - 21$, la 1ra desigualdad se convierte en :

$5a + (3a - 21) > 51 \Rightarrow 8a > 72 \Rightarrow a > 9$

Luego : $3a > 27 \Rightarrow 3a - 21 > 6 \Rightarrow b > 6$ RPTA. A

24.- Entre 3 cazadores A, B y C reúnen más de 8 perros. B piensa adquirir 4 perros más, con lo que tendrá más perros que A y C juntos. Se sabe que B tiene menos perros que C y los que éste tiene no llegan a 5 ¿Cuántos perros tiene cada cazador?

A) 2 ; 3 ; 4 ***B) 4 ; 2 ; 3*** ***C) 4 ; 3 ; 2*** ***D) 3 ; 3 ; 4*** ***E) 3 ; 2 ; 4***

Resolución:

Sean a , b , c la cantidad de perros que tienen A, B y C, respectivamente. Luego de acuerdo con los datos, se puede plantear que :

$a + b + c > 8$ .... (1)

$b + 4 > a + c$ .... (2)

$b < c$ .... (3)

$c < 5$ .... (4)

Considerando que se trata de números enteros, de (3) y (4) se deduce que : $b < 4$

De (1) y (2) : $2b + 4 > 8 \Rightarrow b > 2$

De este modo se establece que : $2 < b < 4$, entonces : $b = 3$

De (3) y (4) : $3 < c < 5$, entonces : $c = 4$

En (1) : $a + 7 > 8 \Rightarrow a > 1$

En (2) : $7 > a + 4 \Rightarrow a < 3$

Como : $1 < a < 3$, entonces : $a = 2$

A, B y C tienen respectivamente : 2 ; 3 y 4 perros **RPTA. A**

25.- Se desea saber el mayor número de alumnos que hay en un aula. Si al doble del número de éstos se le disminuye en 7, el resultado es mayor que 29 y si al triple se le disminuye en 5, el resultado es menor que el doble del número aumentado en 16.

A) 20 ***B) 22*** ***C) 21*** ***D) 18*** ***E) 19***

<u>Resolución</u>:

Sea x el número de alumnos, entonces según los datos, planteamos :

$$2x - 7 > 29 \quad \Rightarrow \quad x > 18$$

$$3x - 5 < 2x + 16 \quad \Rightarrow \quad x < 21$$

Luego : $18 < x < 21$

Los valores de x pueden ser : 19 ó 20

Pero como x debe ser máximo : $x = 20$ **RPTA. A**

26.- Se sabe que Luis no es mayor que Miguel; Rocío no es mayor que Jorge. Jorge no es el mayor , además Boris es mayor que Luis, y Jorge es mayor que Boris. ¿Cuál es el mayor?

A) Luis ***B) Boris*** ***C) Rocío*** ***D) Jorge*** ***E) Miguel***

<u>Resolución</u>:

De los datos se puede establecer que :

Luis no es mayor que Miguel : $L \leq M$ .... (1)

Rocío no es mayor que Jorge : $R \leq J$

Boris es mayor que Luis : $B > L$

Jorge es mayor que Boris : $J > B$

De esto último deducimos que Boris no es el mayor

Ordenando : $L < B < J$ .... (2)

$R \leq J$ .... (3)

Puesto que Jorge no es el mayor; de 1, 2, y 3 ; se deduce que el único que puede ser el mayor es Miguel .

RPTA. E

27.- M ; N ; Q ; R y S son cinco números diferentes tales que :

I) $R < N$

II) $Q > S$

III) $M < N < Q$

IV) Entre Q y S hay un número intermedio.

¿Qué número ocupa la posición central?

A) M B) N C) Q D) R E) S

Resolución:

Datos : $R < N$

$S < Q$

$M < N < Q$

Si entre Q y S hay un número intermedio, este debe ser N. Esto nos permite afirmar que hay dos posibilidades :

$$R < M < S < N < Q$$

$$M < R < S < N < Q$$

En ambas la posición central la ocupa : **S** RPTA. E

28.- Luego de resolver la inecuación : $\frac{5x}{11} - x < 3(x - 91)$; indique el menor valor entero de x.

A) 75 B) 76 C) 77 D) 78 E) 79

Resolución:

Efectuando operaciones : $\frac{5x}{11} - x < 3x - 273$

Transponiendo términos : $\frac{5x}{11} - 4x < -273$

Efectuando operaciones : $-\frac{39}{11}x < -273$

Despejando , encontramos : $x > 77$

El menor valor entero de x, es **78** RPTA. D

29.- Si : $2 < \frac{x+1}{x} < 4$ ¿Qué valores puede tomar x?

A) $\left\langle \frac{1}{3} ; 1 \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{1}{2} ; 2 \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{2}{3} ; 2 \right\rangle$ D) $\left\langle \frac{2}{3} ; 1 \right\rangle$ E) N.A.

Resolución:

Operando : $2 < \frac{x}{x} + \frac{1}{x} < 4$

$2 < 1 + \frac{1}{x} < 4$

Restando 1 : $1 < \frac{1}{x} < 3$

por propiedad : $x < 1 \wedge x > \frac{1}{3}$

$\therefore$ Puede tomar cualquier valor del intervalo $\left\langle \frac{1}{3} ; 1 \right\rangle$ RPTA. A

30.- Si: $m > 4$ y $m + n < -5$. ¿Cuál ó cuales son correctas?

I) $n < -9$ *II) $mn < 0$* *III) $n - m < -4$*

A) I, II y III ***B) Solo I*** ***C) Solo III*** ***D) Solo II*** ***E) Ninguna***

Resolución:

1°) Si $m > 4 \Rightarrow -m < -4$

Agregamos: $m + n < -5$

Y obtenemos: $n < -9$

Esto demuestra que **I es correcta.**

2°) m es positivo, pues es mayor que 4; n es negativo, pues es menor que - 9, luego :

$m \cdot n$ = (positivo) . (negativo) = negativo

Esto demuestra que **II es correcta.**

3°) Hemos deducido que : $n < -9$

$-m < -4$

Luego : $n - m < -13$

Si es menor que - 13; será menor que - 4 ; **III es correcta.** RPTA. A

31.- Si $x > 0$, $y > 0$, además $xy = 1$; $x + y \geq a$; hallar "a"

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Si: $xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

Luego : $x + y = x + \frac{1}{x}$ ... (α)

Sabemos que toda expresión elevada al cuadrado, da un número positivo, entonces :

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0$$

Luego de transponer -2 : $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ... (β)

De (α) y (β) : $x + y \geq 2$; $a = 2$ **RPTA. B**

32.- Si a > 0 y b < 0 ¿Cuál o cuáles son verdaderas?

I) $a^{-1} > b^{-1}$ *II)* $b^2 > a^2$ *III)* $a \,.\, b > 0$

A) Solo I ***B) Solo II*** ***C) Solo III*** ***D) I, II y III*** ***E) Ninguna***

Resolución.-

1°) Si : $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$

Si : $b < 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < 0$

Por transtitividad : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ó $a^{-1} > b^{-1}$ ∴ **I es Verdadera**

2°) Si : $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$

Si : $b < 0 \Rightarrow b^2 > 0$

No se puede concluir que $b^2 > a^2$ ∴ II es incierta

3°) Si : $a > 0 \Rightarrow a$ es positivo

Si : $b < 0 \Rightarrow b$ es negativo

∴ El producto $a \,.\, b$ es negativo ∴ III es incorrecta RPTA. A

33.- Un número entero disminuido en 5 resulta ser mayor que su duplo aumentado en 2; disminuido en 10 resulta menor que su duplo disminuido en 1. El número es :

A) 7 ***B) 8*** ***C) -6*** ***D) -8*** ***E) 10***

Resolución:

Sea x el número : $x - 5 > 2x + 2$ ... (1)

$x - 10 < 2x - 1$ ... (2)

De (1) obtenemos : $x < -7$; de (2) : $x > -9$

Si x es entero, sólo se cumple con $x = -8$ **RPTA. D**

34.- Hallar un número de dos cifras, sabiendo que la suma de ellas es mayor que 10 y que la diferencia entre la cifra de las decenas y el duplo de la cifra de unidades es mayor que 4.

A) 90 *B) 91* *C) 92* *D) 93* *E) 94*

Resolución:

Sea $\overline{ab}$ el número , entonces : $a + b > 10$ ... (1)

Asimismo por condición se tiene : $a - 2b > 4$ ... (2)

El doble de (1), sumado con (2) : $3a > 24 \Rightarrow a > 8$

El único valor posible es : $a = 9$

Esto implica que : $b > 1 \wedge b < 2,5$, es decir : $b = 2$

$\therefore$ El número es **92** **RPTA. C**

35.- En un avión, viajan un número par de pasajeros. Al hacer escala en un aeropuerto, si bajaran la cuarta parte, continuarían viajando menos de 120 personas; en cambio, si bajaran la sexta parte, continuarían viajando más de 131 personas.

A) 150 *B) 153* *C) 156* *D) 158* *E) 160*

Resolución:

Sea x el # de pasajeros : $\frac{3x}{4} < 120$ ... (1)

$\frac{5}{6}x < 131$ ... (2)

De (1) : $x < 160$; de (2) : $x > 157,2$

Posibles valores de x : 158 ; 159 , pero por ser par : $x = 158$ **RPTA. D**

36.- Si : $-4 < x \leq 5$ ¿Cuántos valores enteros puede tomar x^2?

A) 20 *B) 25* *C) 30* *D) 35* *E) 40*

Resolución:

Descomponemos : $-4 < x \leq 5$ en : $-4 < x < 0 \vee 0 \leq x \leq 5$

Elevando al cuadrado, obtenemos : $0 < x^2 < 16 \vee 0 \leq x^2 \leq 25$

Es decir : $0 < x^2 \leq 25$; x^2 puede tomar **25 valores enteros** **RPTA. B**

37.- María es mayor que Sara; Ana es más joven que Sara pero mayor que Nataly y Nataly es más joven que Vannesa. ¿Cuál de las cinco es la más joven?

A) María ***B) Sara*** ***C) Nataly*** ***D) Ana*** ***E) Vannesa***

Resolución:

De los datos : $M > S$; $N < A < S$; $N < V$

Ordenando de menor a mayor : $N < A < S < M$

$\Rightarrow \quad N < V$

$\therefore$ Nataly es la más joven **RPTA. C**

38.- En un examen Sara obtuvo menos puntos que Manuel, Enrique menos puntos que Sara y Nancy más puntos que Vannesa. Si Vannesa obtuvo más puntos que Manuel. ¿Quién obtuvo el puntaje más alto?

A) Nancy ***B) Manuel*** ***C) Sara*** ***D) Enrique*** ***E) Vannesa***

Resolución:

Por datos : $S < M$; $E < S$; $N > V$; $V > M$

Ordenando : $S < M$; $E < S$; $V < N$; $M < V$

Por transitividad : $E < S < M < V < N$

Nancy obtuvo el puntaje más alto **RPTA. A**

39.- Manuel es mayor que Pedro y Carlos es menor que Oscar, pero este y Manuel tienen la misma edad; además Carlos es menor que Pedro. De las siguientes afirmaciones son correctas :

I. Manuel es menor que Carlos ***II. Manuel es mayor que Carlos***

III. Pedro es mayor que Oscar ***IV. Pedro es menor que Oscar***

A) Solo I ***B) I y II*** ***C) II y III*** ***D) I y IV*** ***E) II y IV***

Resolución:

$M > P$; $C < O$; $O = M$; $C < P$

Ordenando : $C < P < M$

ó : $C < P < O$

Se puede afirmar que :

Manuel es mayor que Carlos (II)

Pedro es menor que Oscar (IV) **RPTA. E**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Si: $C > A$; $C - D < 0$

$B - A > 0$; $A - E > 0$

¿Cuál de estos valores es el menor?

A) E B) A C) B D) C E) D

2.- ¿Cuál es el menor valor de x que puede satisfacer la siguiente desigualdad :

$$3x - \frac{1}{4} > 20 - \frac{2x}{3} \quad ?$$

A) 10 B) 8 C) 7 D) 0 E) 6

3.- Si: $\frac{a}{b} > 1$, entonces : $\frac{b+a}{b-a}$

A) es siempre positivo

B) es siempre negativo

C) es igual a 1

D) puede ser cero

E) no se puede determinar

4.- Se sabe que un libro de Psicología es más caro que uno de Inglés; uno de Matemática más caro que uno de Historia, pero más barato que uno de Psicología ¿Cuál es el más caro?

A) Psicología D) Inglés

B) Historia E) No se puede determinar

C) Matemática

5.- Si : $\frac{a}{b} > 2$; entonces : $\frac{a-b}{b}$, será :

A) positivo mayor que 1

B) positivo menor que 1

C) negativo mayor que - 1

D) negativo menor que - 1

E) no se puede determinar

6.- Dada la relación : $2a < b < 3b$; donde a, b son números reales ; afirmaremos que se cumple si y sólo si :

A) $a < 0$ y $b < 0$

B) $a < 0$ y $b > 0$

C) $a < b/2$, y , $b > 0$

D) $a > 0$ y $b < 0$

E) $0 < a < b/2$, y , $b < 0$

7.- Si : $x > 0$; $y < -1$; $z < -2$

Entonces : $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x}$

A) es siempre negativo

B) es siempre positivo

C) puede ser siempre positivo o negativo

D) puede ser cero

E) no se puede determinar

8.- ¿Cuántos números múltiplos de 5 existen, de modo que sus cuádruplos sean mayores que 80 y menores que 180?

A) tres B) cuatro C) dos

D) cinco E) seis

9.- Si : $x > y$; $y - w > 0$;

$x - z < 0$; $v - y < 0$

¿Cuál de estos valores es el mayor?

A) x B) z C) y D) w E) v

10.- Si x es un número real se puede afirmar que:

A) $2x > x$

B) $x^2 > x$; si : $-1 < x < 0$

C) $x^3 > x^2$; si : $x > 0$

D) $x^2 < x$; si : $x < 1$

E) N.A.

11.- ¿Cuántos valores enteros puede tomar x en:

$$-6 \leq 2x + 4 < 10 \quad ?$$

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

12.- Si $a > b$; $a - c < 0$; $d - b < 0$; $b - e < 0$. De mayor a menor, ¿Cuál es el cuarto término?

A) a B) b C) c D) d E) e

13.- Si $0 < x < 1$ ¿Cuáles son verdaderas?

I. $x^2 > x$ II. $\frac{1}{x} > 1$ III. $x^2 > 1$

A) solo I B) solo II C) solo III

D) I y II E) I y III

14.- Sabiendo que :

- Roberto nació 5 años después que Jorge, pero 5 años antes que Manuel.
- Carlos nació 2 años después que Roberto.
- Pepe nació después que Roberto.

Podemos afirmar :

A) Pepe es el menor

B) Manuel no es el menor

C) Carlos es mayor que Pepe

D) Pepe es mayor que Manuel

E) Manuel es menor que Carlos

NIVEL B

15.- Si a varía entre 4 y 40 y b varía entre 5 y 12, entonces a/b varía entre :

A) 3 /8 y 3 B) 2.4 y 10 C) 0.8 y 10/3

D) 8 y 3 E) 1/3 y 8

16.- Hallar el conjunto de números enteros tal que su duplo más cinco es mayor o igual que su mitad disminuída en 7 y que su tercio menos 7 es mayor o igual que su cuádruplo más 15.

A) {-6 ; -7 ; -8} B) {7} C) {6 ; 7 ; 8}

D) ϕ E) {-7}

17.- Si x e y son números enteros positivos tal que $x > y$, entonces el valor de verdad de las proposiciones siguientes (en el orden que se presentan), es :

$$(\ )\ \frac{x-y}{y} < 0 \quad ;(\ )\ \frac{y-x}{y} < 0 \quad ;(\ )\ \frac{x-y}{x} > 0$$

Es :

A) FVV B) FVF C) VVF

D) FFV E) VVV

18.- Marque verdadero (V) o falso (F)

I. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces : $-x < x$

II. Si $x \in \mathbb{R}^+$, entonces : $\sqrt{x} < x$

III. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces : $\frac{x}{2} < x$

A) VVV B) VFV C) FVF

D) FFF E) FVV

19.- Si : $a > b$ y $a^2 < b^2$, siendo a, b números reales, entonces debe cumplirse que :

A) a, b son siempre positivos

B) a, b son siempre negativos

C) a es positivo y b es negativo siempre

D) a es negativo y b es positivo siempre

E) N.A.

20.- El mayor número entero M que satisface la desigualdad :

$$2x^2 - 4x + 1 > 2M \ ;$$

para todo valor real de x, es :

A) -1 B) 1 C) 0 D) -2 E) 2

21.- Un matrimonio dispone de 32 *soles* para ir al cine con sus hijos. Si compran entradas de 5 *soles* les faltaría dinero y si adquieren las de 4 *soles* les sobraría dinero.

¿Cuántos hijos tiene el matrimonio?

A) 5 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

22.- A un estudiante le dieron a vender una cierta cantidad de pollitos, de los que vendió 35 y le quedaron más de la mitad. Luego le devuelven 3 y vende después 18 con lo que le restan menos de 22 pollitos. ¿Cuántos pollitos le dieron ?

A) 69 B) 70 C) 71 D) 72 E) 73

23.- Si :

- Los carros franceses no son mejores que los japoneses.
- Los carros franceses no son peores que los ingleses.
- Los carros americanos no son mejores que los franceses.

Podemos afirmar que :

A) Los carros franceses son los mejores

B) Los carros americanos son mejors que los japoneses

C) Los carros ingleses no son mejores que los japoneses

D) Los carros americanos son mejores que los ingleses

E) Los carros ingleses son mejores que los japoneses

24.- A no es más alto que B y éste no es más bajo que C; D es más alto que E y éste último es más alto que F, que no es más bajo que A.

Si C no es más alto que D pero tampoco más bajo que E ¿Cuál es el más bajo de todos?

A) F B) B C) C D) C E) A

25.- Si : $0 < a < 1$, entonces :

A) $a > \sqrt{a}$ B) $a < \sqrt{a}$ C) $a \geq \sqrt{a}$

D) $a^{-1} < 0$ E) N.A.

26.- Si : $b < a < 0$, entonces :

A) $a^2 > b^2$ B) $a^2 < b^2$ C) $a^2 \geq b^2$

D) $b^2 < a$ E) N.A.

27.- Si : $x > y$; $x > 0$; $z \neq 0$, no siempre es verdad que :

A) $xz > yz$ D) $xz^2 > yz^2$

B) $x + z > y + z$ E) $\frac{x}{z^2} > \frac{y}{z^2}$

C) $x - z > y - z$

28.- ¿Cuál es la menor fracción mayor que 5/12 tal que al sumar "n" veces el denominador al numerador y "n" veces el numerador al denominador, se obtiene 2 como resultado?

A) 3/7 B) 8/19 C) 9/20 D) 7/1 E) 2/9

29.- Hallar el mayor número entero que cumple con:

$$(x - 4)(x + 5) < (x - 3)(x - 2)$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

NIVEL C

30.- $0 < 1 - x < 1$, x es un número real. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

A) $0 < 1 - x^2 < 1 - x < 1$ D) $0 < 1 - x < x < 1$

B) $0 < x^2 < x^3 < 1$ E) $0 < x < 1 - x < 1$

C) $0 < x^3 < x^2 < 1$

31.- Dada la relación : $x > x^2 > x^3$, donde x es un número real, se puede afirmar que:

A) Se cumple solo si x es negativo mayor que -1

B) Se cumple solo si x es negativo menor que -1

C) Se cumple solo si x es positivo mayor que 1

D) Se cumple solo si x es positivo menor que 1

E) Es imposible

32.- El cuadrado de la edad de Juan menos 3 es mayor que 165. En cambio el doble de su edad más 3 da un número menor que 30.

¿Cuántos años tiene Juan?

A) 20 B) 18 C) 15 D) 13 E) 11

33.- Al analizar una fracción, el denominador es menor en una unidad que el cuadrado del numerador.

Si al numerador y denominador :

I. Se le restan 3 unidades la fracción sigue positiva pero menor que 1/10

II. Se le agregan 2 unidades, el valor de la fracción será mayor que 1/3

Hallar el valor del numerador.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

34.- Manuel es mayor que Carlos, Oscar es mayor que Pedro y éste mayor que Carlos. Si Manuel y Oscar tienen la misma edad, diga cuáles son verdaderas :

I. Oscar es mayor que Carlos

II. Carlos es mayor que Oscar

III. Manuel es mayor que Pedro

A) I B) II C) III

D) I y III E) II y III

35.- Resuelva el sistema : $2x - 3 \leq x + 10$ ... (1)

$6x - 4 \geq 5x + 6$ ... (2)

y señale cuántos enteros los cumplen :

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

36.- Hallar la suma de los números enteros cuyo triple menos 6 sea mayor que su mitad más 4 y cuyo cuádruple aumentado en 8 sea menor que su triple aumentado en 15.

A) 11 B) 6 C) 3 D) 5 E) 8

37.- Un estante tiene capacidad para el triple de libros que otro y entre los dos pueden guardar menos de 120 libros. Si el primer estante tiene capacidad parar guardar más de 84 libros. ¿Cuántos libros puede guardar el segundo estante?

A) 28 B) 29 C) 30 D) 84 E) 90

38.- Se sabe que el cuádruplo del número de monedas que hay dentro de una bolsa es tal, que disminuido en 8 no puede exceder a 30 y que el quíntuplo del mismo número de monedas aumentado en 7 no es menor que 50. Hallar el total de monedas.

A) 10 B) 11 C) 9 D) 7 E) N.A.

39.- Javier es más alto que Luis y más bajo que Alex. Si la altura de Javier es A, la de Alex es L y la de Luis es J.
¿Cuál es la alternativa correcta?

A) $J < L < A$ D) $A < L < J$

B) $L < A < J$ E) $J < A < L$

C) $A < J < L$

40.- Si se sabe que :

- A es más alto que C
- B es más bajo que D
- E y D son más bajos que C

Se puede afirmar que :

A) El más bajo es B

B) C no es más alto que B

C) E es más bajo que A

D) No es cierto que A sea más alto

E) D es más alto que E

41.- Jorge es mayor que Juan, pero menor que Jacinto. Jesús es menor que Jorge y mayor que Julio. José es mayor que Jorge.

Se puede afirmar que :

A) No es cierto que José sea mayor que Julio

B) José es mayor que Jacinto

C) No es cierto que Juan sea menor que José

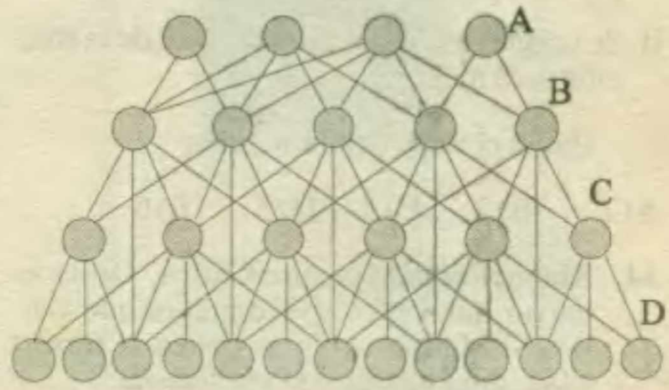
D) Jesús es menor que Juan

E) Jacinto es mayor que Julio

LA NATURALEZA DEDUCTIVA DE LA MATEMATICA

El poder de los métodos deductivos de razonar es ejemplificado por la matemática. Cualquier rama de la matemática se inicia con unas cuantas definiciones, algunos términos indefinidos y axiomas (proposiciones cuya verdad es aceptada; mas no probada). En la geometría, por ejemplo empezamos con palabras como "línea" y "punto" que en realidad no pueden definirse a satisfacción. Existen ciertos términos definidos como "triángulo" y "círculo". Un axioma típico es : "Existe una y tan sólo una línea recta que puede ser trazada entre dos puntos". No tenemos manera de probar esta proposición; pero la aceptamos como una premisa sobre la cual podemos estructurar un sistema de geometría.

Representemos las premisas de la geometría por los pequeños círculos en la línea A de la figura adjunta, los cuales utilizaremos para hacer algunas deducciones (línea B).En seguida las deducciones se combinan con las definiciones, términos indefinidos y axiomas para efectuar nuevas deducciones (línea C). Continuando de esta manera, los matemáticos van formando la estructura lógica de la geometría. La misma clase de proceso es el que se sigue para el desarrollo de la aritmética, álgebra, trigonometría, cálculo, etc.



El sistema numeral común con el que todos estamos familiarizados, se basa en el "diez", con los símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 como dígitos. Una vez que se define el significado de estos símbolos y se admiten ciertas reglas básicas para trabajar con ellos (los axiomas), el matemático, en cualquier parte del mundo, puede elaborar un sistema completo para sumar, restar, multiplicar y dividir cualquier número que desee. Y todos sus colegas estarán de acuerdo, porque la matemática es una ciencia deductiva, y como hemos visto, las deducciones son las "consecuencias necesarias" de las premisas. Deben seguir a éstas una vez que han quedado aceptadas como verdaderas.

Los hombres de negocios, banqueros, contadores, carpinteros y tenderos aprovechan porciones importantes de estos sistemas matemáticos para realizar sus cotidianas operaciones tales como manejar dinero, pesar correctamente y construir casas. Han encontrado que los sistemas desarrollados por los procesos deductivos de los matemáticos les son útiles. Pero esta no es la razón original por la que los matemáticos trabajan. Con mucha frecuencia idean sistemas matemáticos que carecen de utilidad práctica, aunque con posibilidades de que en su oportunidad llegue a encontrárseles algún empleo. En la actualidad se están utilizando muy prácticamente sistemas matemáticos que hace muchos años llegaron a considerarse como "imprácticos".

Consideremos, por ejemplo, la siguiente proposición : 1 + 1 = 10. A primera vista, podría considerarse como "errónea"; pero puede no serlo. Sería errónea según nuestro sistema decimal; mas si la consideramos según el sistema de contar basado en "dos", llamado sistema binario, será correcta. Este último sistema utiliza tan sólo los símbolos "1" y "0". Podríamos preguntarnos qué utilidad tiene un sistema diferente de números. Hasta hace poco, era muy limitado el uso que se hacía de la aritmética basada en el sistema binario; pero actualmente es de inmensa importancia en la operación de computadores gigantes que tan profundos cambios están causando en nuestro mundo práctico.

29 Máximos y Mínimos

Cuando se trata de resolver un problema que puede tener varias soluciones, surge la idea de elegir la solución óptima, es decir aquella que garantice un máximo de eficiencia o un mínimo de esfuerzo. Entonces, esta búsqueda de optimización, es la idea central en el tratamiento de los problemas que resolveremos en este capítulo.

En algunos casos la solución que se busca puede estar relacionada con un valor MINIMO, como por ejemplo, los cálculos del tiempo necesario para hacer una tarea, o el cálculo del número de intentos para obtener una estrategia ganadora en determinada circunstancia, o el cálculo de costos al comprar mercancías,... etc. En otros casos, interesa conseguir un valor MAXIMO, como por ejemplo, al calcular la ganancia generada en una operación mercantil , o la cantidad de aciertos en un juego de azar, o el puntaje alcanzado en una competencia,... etc. Todo esto implica enfrentar una diversidad de situaciones que intentaremos resumir en la presente muestra de problemas seleccionados.

Ejemplo 1 :

Hay 10 gorros rojos y 10 gorros azules mezclados en el cajón de un armario. Los veinte gorros son exactamente iguales, salvo por el color. Si la habitación está absolutamente a oscuras y queremos conseguir dos gorros del mismo color. ¿Cuál es el menor número de gorros que debemos sacar para estar seguros de haber obtenido el par del mismo color?

Resolución:

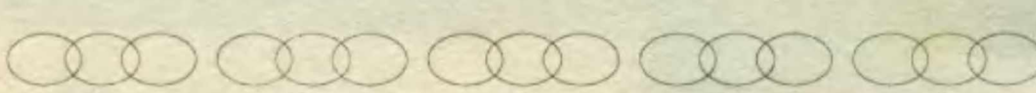
Mucha gente al tratar de resolver este problema, suele afirmar así :

"*Supongamos que el primer gorro es rojo, entonces necesito otro rojo para conseguir el par, pero el próximo puede ser azul, y el próximo también y así sucesivamente hasta retirar los diez gorros azules. Asi, agotados todos los azules, el siguiente gorro deberá ser rojo, de modo que la respuesta debe ser : doce gorros.*"

Pero este razonamiento ha considerado que el par de gorros sea rojo, cuando en realidad, solo es necesario que los dos gorros extraidos sean del mismo color. Por tanto, si los dos primeros gorros extraídos no son del mismo color, es seguro que el tercero será de un color igual a uno de los otros dos, de modo que la respuesta correcta es : *tres gorros.*

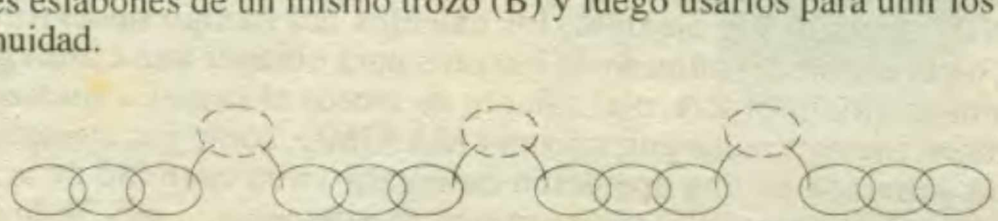
Ejemplo 2 :

Tenemos cinco trozos de cadena de tres eslabones cada uno y queremos unirlos en un solo trozo de quince eslabones. Si cortar y soldar cada eslabón cuesta 4 *soles*. ¿Qué cantidad mínima tenemos que invertir para lograr el objetivo?



Resolución:

La solución aparente es hacer cortar cuatro eslabones, puesto que los cinco trozos determinan cuatro espacios intermedios que hay que unir ; pero en realidad , basta con abrir los tres eslabones de un mismo trozo (B) y luego usarlos para unir los tres puntos de discontinuidad.



Entonces el pago debería ser : $3 \cdot 4 = 12$ *soles* **Rpta : 12 *soles***

OBSERVACION.- Según estos ejemplos, ante alguna solución aparente y que salta a la vista, debemos reflexionar para mejorar esta solución y lograr el objetivo propuesto. Para adquirir la familiaridad necesaria con las técnicas y estrategias disponibles, es necesario practicar con la mayor cantidad posible de ejemplos.

Existen además, otras aplicaciones, que requieren la utilización de operaciones algebraicas para analizar el comportamiento de alguna expresión y obtener su valor máximo o mínimo, según sea el caso.

Ejemplo 3 :

Si x, y representan a números reales tales que : $x + y = 1$: entonces el valor máximo de : $x.y$, es :

Resolución:

Si $x + y = 1$, entonces analizamos el valor de $x.y$, así :

$P = x.y$; aquí reemplazamos : $y = 1 - x$

$$P = x(1 - x) = x - x^2 = -(x^2 - x) = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \qquad \dots (\alpha)$$

Según (α) el valor de P será igual a $\frac{1}{4}$ disminuído en $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, y como queremos que P sea máximo, lo ideal es no disminuirle nada, es decir, P será máximo si : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ es igual a cero, lo cual solo es posible si : $x = \frac{1}{2}$, luego, en (α) :

$$P\,(máx) = \frac{1}{4} - (0)^2 = \frac{1}{4} \qquad \textbf{Rpta : } \frac{1}{4}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Una urna contiene 13 bolas negras, 12 rojas y 7 blancas. La menor cantidad que debe sacarse para obtener al menos una de cada color es :

A) 25 *B) 19* *C) 21* *D) 28* *E) 26*

Resolución:

Como estamos ante un caso de mínimos , debemos considerar los casos menos favorables para obtener por lo menos una bola de cada color, luego ,en estas circunstancias el proceso sería :

13 primeros intentos → todas negras

12 siguientes intentos → todas rojas

Nótese que hasta aquí hemos sacado : 13 + 12 = 25 y sólo tenemos bolas de 2 colores, pero todas las que quedan son blancas, luego, en la siguiente ya tendremos el de tercer color.

\# de intentos = 13 + 12 + 1 = **26** RPTA. E

2.- Dos padres y dos hijos comieron en el desayuno un huevo cada uno. ¿Cuál es el menor número de huevos posible que pueden haber comido?

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 1* *E) N.A.* *UNALM 92 - I*

Resolución:

La solución aparente se establece asumiendo que el # de personas es 2 + 2 = 4, sin embargo por ser un problema orientado a determinar un mínimo, diremos que este número (4), puede reducirse si asumimos que es un grupo familiar más pequeño . Veamos:

ABUELO → HIJO → NIETO

A B C

Donde los dos padres serían A y B ;y los dos hijos serían B y C ; por lo tanto sólo existen 3 personas y el mínimo número de huevos es :

3 **RPTA. B**

3.- Un amigo desea enviar una carta, pero sólo se acuerda que el código de su correo es un número de 3 cifras que empieza en 2 y cuya cifra de las unidades es siempre impar y la suma de las 3 es 11. ¿Cuántas cartas como mínimo debería enviar para tener la seguridad de que una de ellas llegue a su destino?

A) 5 ***B) 7*** ***C) 8*** ***D) 10*** ***E) 12*** ***PUCP 95 - I***

Resolución:

El código es de la forma :

2	a	b

donde : $2 + a + b = 11$, es decir : $a + b = 9$ ... (α)

Pero, b debe ser impar y hay 5 opciones : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 y todas pueden ser utilizadas en (α), por lo tanto los códigos que debe anotar para los envíos son : 281 ; 263 ; 245 ; 227 y 209

$\therefore$ # mínimo de envíos = **5** **RPTA. A**

4.- El menor número M con la propiedad de que : $3 + 6x - x^2 \leq M$, para todo valor real x es :

A) 6 ***B) 13*** ***C) 12*** ***D) 3*** ***E) 11*** ***UNMSM - 94***

Resolución:

La expresión del lado izquierdo debe tener un valor máximo y M debe elegirse de modo que supere a dicho valor, con lo cual la desigualdad se cumpliría para todo valor de x.

Entonces procederemos a hallar el máximo valor de : $3 + 6x - x^2$:

$$y = 3 + 6x - x^2 = -(x^2 - 6x) + 3$$

$$y = -(x^2 - 6x + 9) + 3 + 9$$

$$y = 12 - (x - 3)^2$$

En esta última igualdad, notamos que y siempre será menor que 12 y como máximo será igual a 12.

El valor máximo de : $3 + 6x - x^2$, es : 12 ; luego debemos elegir M:

M = 12 **RPTA. C**

5.- Jorge y Alberto al asistir a una fiesta saludan a todos los presentes, estrechando 37 manos cada uno; todos gustan de bailar y cuando lo hacen, Jorge observa que 5 personas no pueden hacerlo. Cuando se retiran 6 hombres, el máximo número de mujeres que deben retirarse de la fiesta para que todos puedan bailar, es :

A) 17 ***B) 15*** ***C) 13*** ***D) 11*** ***E) N.A.*** ***UNFV - 87***

Resolución:

Antes de la llegada de Jorge y Alberto, ya había en la fiesta 37 personas,luego si asumimos que hay h hombres y m mujeres , tendremos :

$$h + m = 37 \qquad ....(*)$$

Cuando Jorge y Alberto ingresan, el # de hombres es $h + 2$ y según los datos todos bailan excepto 5 personas, que en el caso más adverso serían 5 mujeres, es decir hay más mujeres que hombres.

El valor de m se puede calcular así : $h + 2 = m - 5$, que se reemplaza en la ecuación (*) : $m - 7 + m = 37$; $m = 22$ y el valor de h sería :

$$h + 22 = 37 \quad ; \quad h = 15.$$

Recuerda que en $h = 15$, no se incluye a Jorge ni a Alberto.

En la fiesta, entonces, en el peor de los casos hay : 17 hombres y 22 mujeres.

Si se retiran 6 hombres, quedan 11 hombres y 22 mujeres y para que todos puedan bailar deben retirarse 11 mujeres.

11 mujeres **RPTA. D**

6.- En la figura adjunta se indica el número de intersecciones de dos y tres rectas. Identifique el número máximo de intersecciones de 4 rectas.

A) 4

B) 5

C) 6

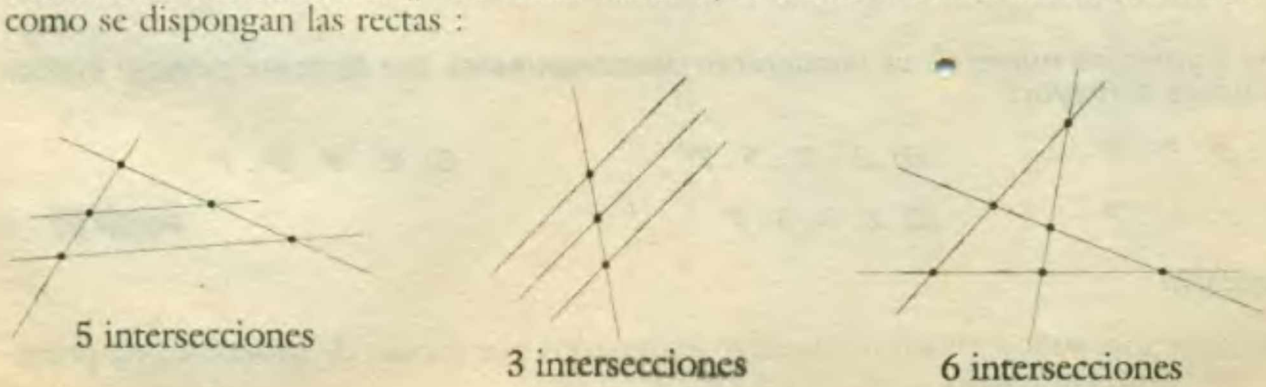
D) 7

E) 8



Resolución:

Cuando se incrementa el # de rectas hasta 4, el número de intersecciones varía según como se dispongan las rectas :



El número máximo de intersecciones es 6, lo cual también se puede obtener si se aplica la fórmula de combinatoria :

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(3)}{2} = 6 \qquad \text{RPTA. C}$$

7.- Dadas las fracciones : $-\frac{5}{32}$; $\frac{23}{128}$; $-\frac{11}{64}$; $\frac{45}{256}$ ***; determinar el promedio entre el mayor valor negativo y el mayor valor positivo.***

A) $\frac{1}{128}$ *B)* $\frac{3}{256}$ *C)* $\frac{1}{256}$ *D)* $\frac{3}{128}$ *E) N. A.* ***PUCP 96 - II***

Resolución:

1º) Los valores negativos son : $-\frac{5}{32}$, y , $-\frac{11}{64}$

De estos valores el mayor es el que tenga *menor* valor absoluto y lo comprobamos, seguiendo el siguiente procedimiento :

$$\frac{5}{32} \times \frac{11}{64} \rightarrow 320 < 352 \Rightarrow \frac{5}{32} < \frac{11}{64}$$

Por lo tanto , el mayor valor negativo será : $-\frac{5}{32}$

2º) Los valores positivos son : $\frac{23}{128}$ y $\frac{45}{256}$, entonces procederemos de un modo semejante:

$$\frac{23}{128} \times \frac{45}{256} \Rightarrow 5\,888 > 5\,760 \Rightarrow \frac{23}{128} > \frac{45}{256}$$

Por lo tanto el mayor valor positivo es : $\frac{23}{128}$

3º) El promedio (M.A.) entre estos valores es :

$$\frac{\frac{23}{128}+\left(-\frac{5}{32}\right)}{2} = \frac{\frac{3}{128}}{\frac{2}{1}} = \frac{3}{256} \qquad \text{RPTA. B}$$

8.- Los siguientes números se encuentran descompuestos por factores primos; indicar, ¿Cuál es el mayor?

A) $2^6 . 3^4 . 5^4 . 7^5$ *B)* $2^7 . 3^5 . 5 . 7^4$ *C)* $2^5 . 3^3 . 5^4 . 7^4$

D) $2^9 . 3^4 . 5^4 . 7^4$ *E)* $2 . 3 . 5 . 7^4$ ***PUCP 97 - II***

Resolución:

Observamos que todos los números están expresados por medio de productos de potencias cuyas bases son iguales a : 2 ; 3 ; 5 ; 7.

1°) Deducimos que : $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 > 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^4$

Es decir : $C > E$

2°) Luego : $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^5 > 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4$

Es decir : $A > C$

Hasta aquí, tenemos : $A > C > E$

3°) Comparamos ahora : $2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4$ y $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^5$

Ambas cantidades tienen en común : $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4$ y solo debemos comparar : 2^3 con 7, concluyendo que $2^3 > 7$, luego :

$$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 > 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^5 \text{, es decir } D > A$$

Ahora, sabemos que : $D > A > C > E$

4°) Falta comparar D con B, es decir :

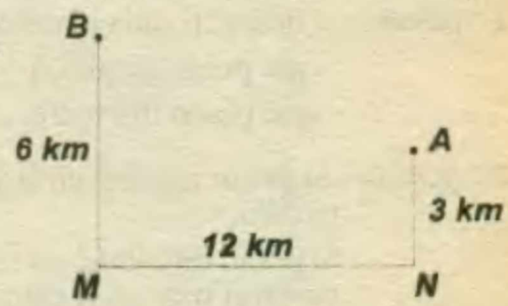
$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \quad ... \quad 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^4$

$2^2 \cdot 5^3 \quad ... \quad 3$

$500 > 3$; luego , $D > B$

En conclusión : $2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4$ es la mayor. **RPTA. D**

9.- Según el gráfico una persona debe ir de A a B tocando un punto del segmento MN. ¿Cuál es la menor distancia que debe recorrer?



A) $15\ km$ *D)* $9\sqrt{5}\ km$

B) $(3+\sqrt{180})\ km$ *E)* $21\ km$

C) $(6+\sqrt{153})\ km$

<u>**Resolución**</u>:

Existe una manera de transformar el problema en otro donde la distancia a calcular sea una línea recta única, que sabemos es la menor distancia entre dos puntos. Para esto se grafica el simétrico del punto A y luego hallamos BA' :

$$BA' = \sqrt{(6+3)^2 + 12^2}$$

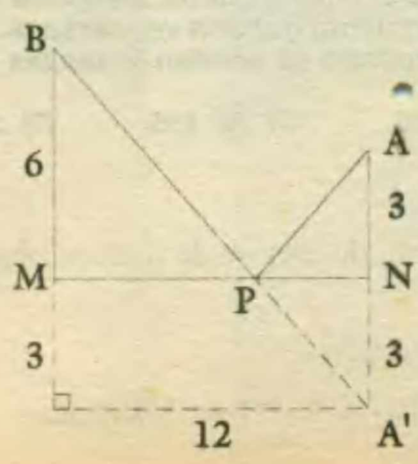
$$= \sqrt{81+144}$$

$$= 15$$

Menor distancia :

$$BP + PA' = BP + PA$$

$$= BA' = \mathbf{15}$$



RPTA. A

10.- La diferencia entre el mayor número par de 3 cifras diferentes y el mayor número de 3 cifras pares diferentes es :

A) 114 B) 122 C) 100 D) 134 E) 200 UNALM 94 - II

Resolución:

1°) El mayor número par de 3 cifras diferentes se obtiene con la cifra 9 como centenas : $9ab$, aquí, b debe ser par y a, debe ser diferente, luego tenemos que asumir $b = 6$; $a = 8$ y el número es : 986.

2°) El mayor número de 3 cifras pares diferentes se tendrá que formar con las cifras : 4, 6 y 8 y el número que se forma es : 864.

3°) La diferencia es : 986 - 864 = **122** RPTA. B

11.- Poseo una balanza de dos platillos y 9 bolas de billar. Todas son del mismo color pero una de ellas es ligeramente más pesada que las 8 restantes. ¿Cuántas pesadas como mínimo se deben realizar para tener la certeza de encontrar la bola diferente?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

El número mínimo es 2 pesadas, procediendo de la siguiente manera:

1ra pesada : 3 bolas en cada platillo y se pueden presentar dos posibilidades:
- que pesen iguales ó
- que pesen diferente

2da pesada : Si pesan iguales, en la segunda pesada se colocará de las 3 restantes, una en cada platillo.

Si pesan diferente, en la segunda pesada se coloca una en cada platillo de las 3 que pesaron más en la primera pesada.

2a pesada RPTA. B

12.- Una locería tiene 6 docenas de tazas al precio de S/. 105 la media docena y 8 docenas de platos al precio de S/. 90 la docena. Se forma el máximo número posible de juegos de tazas y platos. ¿A cuánto debería venderse la docena de estos juegos para obtener igual ganancia que cuando se vendan todas las piezas individualmente?

A) S/. 250 B) S/. 220 C) S/. 195 D) S/. 225 E) S/. 330 PUCP 97 - I

Resolución:

El máximo número posible de juegos de tazas y platos es 6 docenas, porque hay menos tazas que platos.

Pero al comprar se ha invertido :

$$6(210) + 8(90) = 1\,980 \text{ soles}$$

Como sólo se van a vender 6 docenas de juegos, cada una debe venderse a :

$1980 \div 6 =$ **330 *soles*** RPTA. E

13.- En una joyería se tiene en una caja 5 sortijas de fantasía y 6 de oro. Si se extraen de una en una. ¿Cuántas extracciones deben realizarse para obtener con certeza un par de sortijas del mismo tipo?

A) 6 *B) 7* *C) 2* *D) 3* *E) 1* ***UNALM 93 - II***

Resolución:

En las dos primeras extracciones, como caso más desfavorable, pueden salir una de fantasía y una de oro, y no se tendría completo el par, pero en la siguiente extracción, cualquiera que salga, completará el par.

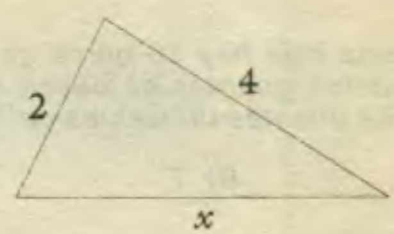
de extracciones $= 2 + 1 =$ **3** RPTA. D

14.- De todos los triángulos, dos de cuyos lados miden 2 cm y 4 cm, halle los que tienen la propiedad de que su tercer lado tiene por longitud un número entero y señale a qué es igual la suma de los perímetros de los triángulos hallados.

A) 28 cm *B) 30 cm* *C) 24 cm* *D) 26 cm* *E) 25 cm* ***UNMSM - 91***

Resolución:

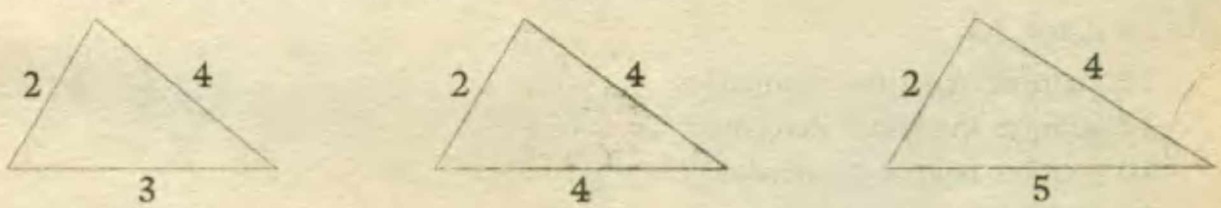
Recordando que en todo triángulo: "*un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia*":



$4 - 2 < x < 4 + 2 \Rightarrow 2 < x < 6$

Los valores enteros de x son :

3; 4;, 5 y hay 3 triángulos que se pueden formar :



Suma de perímetros $= (2+3+4) + (2+4+4) + (2+5+4)$

$= 9 + 10 + 11 =$ **30** RPTA. B

15.- ¿Cuál es el menor número por el que se debe multiplicar 1 155 para que sea divisible por 252?

A) 36 *B) 24* *C) 14* *D) 12* *E) 28* ***PUCP 97 - I***

Resolución:

Sea k el menor número buscado, luego de multiplicar 1 155 por k el producto 1 155 k debe ser divisible por 252.

Es decir : $\dfrac{1\,155\,k}{252} = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot k}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7}$ debe ser entero

Entonces : $k = 2^2 \cdot 3 =$ **12** RPTA. D

16.- Si m es la porción de personas que usan cierto producto y n es la porción de los que no la usan. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar el producto m . n?

A) 1 *B) 3/4* *C) 1/2* *D) 1/4* *E) N.A.* ***PUCP 97 - I***

Resolución:

El total de personas se representa por la unidad (1); siendo m y n partes de esta unidad, entonces :

$$m + n = 1$$

La condición exige que m . n sea máximo y esto implica despejar m, de donde : $m = 1 - n$ y reemplazando en el producto.

$$m \,.\, n = (1 - n) \,.\, n = n - n^2 = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

m . n (máximo) $= \dfrac{1}{4} - 0 =$ $\dfrac{1}{4}$ RPTA. D

17.- En una caja hay 10 pares de guantes de color marrón y 10 pares de color negro. ¿Cuántos guantes se deben sacar como mínimo necesariamente para conseguir 1 par de guantes utilizables del mismo color?

A) 3 *B) 7* *C) 11* *D) 21* *E) 24*

Resolución:

Según los datos, hay :

- 10 guantes marrones izquierdos
- 10 guantes marrones derechos
- 10 guantes negros izquierdos
- 10 guantes negros derechos

En el peor de los casos no pueden salir primero todos los derechos de ambos colores, es decir 10 + 10 = 20 guantes derechos y no tendríamos un par utilizable. El próximo guante que salga, saldrá izquierdo necesariamente y así podremos formar un par utilizable.

Idéntico raciocinio se haría si primero salen todos los izquierdos.

\# mínimo de intentos = 10 + 10 + 1 = **21** RPTA. D

18.- Si se tira dos dados. ¿Qué número de puntos se espera que salga con mayor frecuencia al realizar varias tiradas?

A) 5 *B) 6* *C) 7* *D) 8* *E) N.A.*

Resolución:

Los resultados posibles de cada dado son : {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} y las parejas de puntos que pueden salir son :

(1 ; 1) ; (1 ; 2) ; (1 ; 3) ; ....; **(1 ; 6)**
(2 ; 1) ; (2 ; 2) ; ....; **(2 ; 6)** ; (2 ; 6)
(3 ; 1) ; ....; **(3 ; 4)** ; .... ; (3 ; 6)
(4 ; 1) ; ....; **(4 ; 3)** ; ....; (4 ; 6)
(5 ; 1) ; **(5 ; 2)** ; ....; (5 ; 6)
(6 ; 1) ; .... ; (6 ; 6)

El puntaje que sale con mayor frecuencia es el que corresponde a la diagonal marcada, es decir:

7 RPTA. C

19.- Un carpintero cobra S/. 250 por hacer una cómoda y S/. 150 por un velador. Con las maderas que le han dado puede confeccionar cualquiera de los grupos de los muebles que se mencionan. ¿Cuál de los grupos le convendrá más?

A) 9 veladores ***B) 1 cómoda y 9 veladores*** ***C) 7 cómodas***

D) 5 cómodas y 3 veladores ***E) 3 cómodas y 6 veladores***

Resolución:

Calculamos los ingresos correspondientes a cada grupo de muebles y escogemos el que alcance un máximo valor :

9 veladores : $9 \cdot 150 = 1\,350$
1 cómoda y 9 veladores : $1 \cdot 250 + 9 \cdot 150 = 1\,600$
3 cómodas y 6 veladores : $3 \cdot 250 + 6 \cdot 150 = 1\,650$
5 cómodas y 3 veladores : $5 \cdot 250 + 3 \cdot 150 = 1\,700$
7 cómodas : $7 \cdot 250 = 1\,750$

Le conviene más el último grupo : 7 cómodas RPTA. C

20.- Se compran pares de zapatos que varían en precios desde 200 soles hasta 350 soles y se venden a precios que varían desde 300 soles a 450 soles. ¿Cuál es la mayor ganancia posible que puede obtenerse de la venta de 8 pares de zapatos?

A) S/. 250 ***B) S/. 400*** ***C) S/. 600*** ***D) S/. 2 000*** ***E) S/. 2 200***

Resolución:

Para obtener la máxima ganancia en un negocio de compra y venta, debe comprarse al menor precio posible y venderse al mayor precio.

Esto implica comprar a 200 *soles* y vender a 450 *soles* que dejaría una ganancia por par de : $450 - 200 = 250$.

En total se ganará : $8 \cdot 250 =$ 2 000 *soles* RPTA. D

21.- Las dimensiones en metros de un rectángulo de área máxima, cuyo perímetro es 48 metros, son :

A) 12 y 12 B) 23 y 1 C) 16 y 8 D) 15 y 9 E) Faltan datos UNMSM - 92

<u>Resolución:</u>

Según la figura : $A = x \cdot y$ ... (1)



Pero sabemos que el perímetro es 48 *m*, luego :

$$2x + 2y = 48$$

$$x + y = 24 \Rightarrow y = 24x$$

En (1) : $A = x(24 - x) = 24x - x^2 = -(x^2 - 24x)$

Completando cuadrados : $A = 144 - (x - 12)^2$

A es máximo si $x = 12$, lo cual implica que : $y = 12$

Entonces las dimensiones son : $x = y = 12$, es decir se trata de un cuadrado, que es un caso particular de rectángulo.

12 y 12 RPTA. A

22.- Si el menor promedio de dos números es 15 y su mayor promedio es 20 ; la diferencia de dichos números es :

A) 20 B) 18 C) 17,5 D) 12 E) N.A. UNFV - 87

<u>Resolución:</u>

Al referirse el problema al menor y mayor promedio, consideramos que deben seleccionarse entre estos tres :

$$M.A. = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad M.G. = \sqrt{ab} \quad ; \quad M.H. = \frac{2ab}{a+b}$$

Sabemos que : $MH \leq MG \leq MA$

El menor promedio : $\dfrac{2ab}{a+b} = 15$ ... (1)

El mayor promedio : $\dfrac{a+b}{2} = 20$ ... (2)

De (1) y (2) se obtiene : $a + b = 40$; $ab = 300$

Y luego : $a = 30$; $b = 10$

La diferencia es : $a - b = 30 - 10 =$ 20 RPTA. A

23.- Una bolsa contiene caramelos: 20 de limón; 15 de naranja; 18 de manzana y 12 de piña. ¿Cuántos caramelos hay que extraer al azar para tener la seguridad de obtener 4 de cada sabor?

A) 48 B) 57 C) 17 D) 37 E) 28

Resolución:

Las cantidades, de mayor a menor son : 20 L ; 18 M ; 15 N y 12 P

El caso más desfavorable es extraer todos los de limón , manzana y naranja:

$$20 + 18 + 15 = 53$$

Entonces solo quedan 12 de piña, de los cuales solo necesitamos 4, para completar grupos de cuatro de un mismo sabor , asi el número total de extracciones sería :

$$53 + 4 = 57$$ **RPTA. B**

24.- En el problema anterior, ¿cuántos caramelos hay que extraer para tener la seguridad de obtener 5 de algún sabor?

A) 37 *B) 27* *C) 17* *D) 46* *E) 36*

Resolución:

Para este caso, las extracciones pueden darse así :

Los 4 primeros, de uno de los sabores.

Los 4 siguientes, de otro sabor.

....

Y así hasta acabar con los 4 sabores.

La siguiente extracción completará el objetivo:

$$4 + 4 + 4 + 4 + 1 = 17$$ **RPTA. C**

25.- En una caja hay caramelos de 3 sabores distintos, ¿cuántos se deben tomar como mínimo para tener la certeza de haber extraído 4 del mismo sabor?

A) 5 *B) 10* *C) 12* *D) 15* *E) 18*

Resolución:

Sean A, B y C los sabores, en el caso más desfavorable, los caramelos a tomar se presentarían así :

AAA BBB CCC X

Cualquiera que sea el sabor de X, haría que se completen 4 de un mismo sabor. Por lo tanto se necesitan tomar 10 caramelos.

RPTA. B

26.- En una urna se tiene 10 bolas verdes, 8 blancas y 12 rojas. Se extraen al azar una por una. ¿Cuántas se debe extraer como mínimo para estar seguro de tener 5 bolas de un mismo color?

A) 11 *B) 12* *C) 13* *D) 14* *E) 15*

Resolución:

En la situación menos favorable habrá que esperar a que se retiren al menos 4 de cada color, es decir : 4 verdes, 4 blancas y 4 rojas, para que la próxima que se retire haga que se completen 5 de un mismo color. Esto hace un total de 13 extracciones.

RPTA. E

27.- Dos kilos de huevos contienen entre 20 y 35 huevos. ¿Cuál es el mínimo peso de 140 huevos?

A) 4 kg *B) 8 kg* *C) 5 kg* *D) 6 kg* *E) 2 kg*

Resolución:

El mínimo peso se obtiene si en cada 2 *kg* tenemos la mayor cantidad posible de huevos, es decir, 35 huevos.

Así : por una R3S : 35 huevos .... 2 *kg*

140 huevos x

$$\therefore \quad x = \frac{140 \cdot 2}{35} = 8\ kg$$

RPTA. B

28.- Un vaso de yogurt contiene según la marca, entre 15 y 25 calorías. Si la dieta de María le permite solo desayunar yogurt, en una cantidad de 75 calorías. ¿Cuál será lo máximo que ella gastará si cada vaso cuesta entre 2,5 y 3 soles?

A) 11 *B) 12* *C) 13* *D) 14* *E) 15*

Resolución:

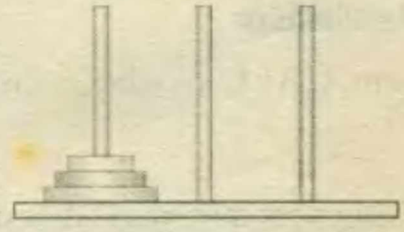
El gasto será máximo si el vaso cuesta 3 *soles* y solo aporta 15 calorías, de este modo necesitaría :

$$75 \div 15 = 5 \text{ vasos}$$

Cuyo costo sería : $5 \times 3 =$ **15 *soles***

RPTA. E

29.- Un juego consiste en trasladar los discos de madera del primer eje al tercero. ¿Cuántos movimientos como mínimo se deberían realizar, sabiendo que un disco grande no puede situarse sobre uno pequeño?



A) 5 *B) 6* *C) 7* *D) 8* *E) 9*

Resolución:

Denominaremos A al disco menor; B al mediano y C al mayor.

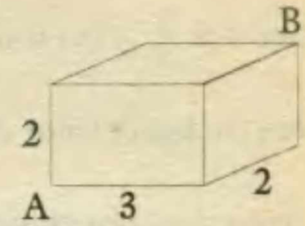
El procedimiento con el mínimo # de movimientos es el siguiente:

Llevamos A al tercer eje; luego B al segundo eje; en seguida A al segundo eje, después C al tercer eje, posteriormente A al primer eje; luego B al tercer eje y finalmente A al tercero.

Se requieren entonces : **7 movimientos**

RPTA. C

30.- En el gráfico se observa un bloque de concreto. En el vértice "A" se encuentra una hormiga y en el vértice "B" hay un terrón de azúcar. ¿Cuál sería el menor recorrido que tendrá que hacer la hormiga para llegar al terrón de azúcar?



A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución:

Nuestra solución consiste en levantar la cara superior del bloque, asi obtendríamos un plano que nos permitirá trazar el recorrido mínimo, que obviamente será la recta que une A con B.



$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

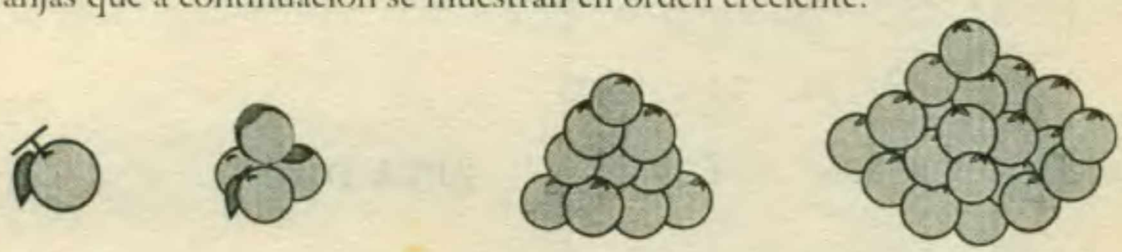
RPTA. E

31.- Un frutero está apilando naranjas, con ánimo de formar dos pirámides tetraédricas. De pronto observa que apilando en un montón las naranjas de ambas pirámides podrían formar una sola pirámide tetaédrica mayor. ¿Cuál es el mínimo número de naranjas que tendrá que disponer? (Considere ambas pirámide iguales)

A) 10 *B) 20* *C) 30* *D) 40* *E) 50*

Resolución:

Los apilamientos en forma de pirámides triangular regular, requieren cantidades específicas de naranjas que a continuación se muestran en orden creciente.



1 4 10 20

Si dos montones iguales pueden aplicarse en uno solo, esto es posible con el número mínimo de naranjas, si cada uno es de 10 y se unen para formar uno de 20.

RPTA. B

32.- Calcular el menor valor entero de λ que verifica : $2x - 3x^2 = \lambda$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución:

Hagamos $f(x) = 2x - 3x^2$ y completamos cuadrados :

$$f(x) = -3\left(x^2 - \frac{2x}{3}\right) = -3\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} - 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

Para $x = \frac{1}{3}$, $f(x)$ toma su máximo valor, que será $\frac{1}{3}$, luego :

Para cualquier valor de x : $f(x) \leq \frac{1}{3}$ ó $2x - 3x^2 \leq \frac{1}{3}$

Luego el menor entero que verifica : $2x - 3x^2 \leq \lambda$ es : **1** RPTA . A

33.- Determinar el mayor valor entero de "M" que satisface la desigualdad :
$7x^2 + 28x + 3 > 7M$ para todo valor real de "x"

A) - 2 B) 4 C) - 5 D) - 4 E) 5

Resolución:

Sea : $f(x) = 7x^2 + 28x + 3$

$f(x) = 7(x^2 + 4x) + 3$

$f(x) = 7(x^2 + 4x + 4) + 3 - 28$

$f(x) = 7(x + 2)^2 - 25$

$f(x)$ alcanza su mínimo valor cuando $x = -2$; luego dicho mínimo es -25; entonces :

$f(x) \geq -25 > 7M$

Luego : $M < -\frac{25}{7}$ ó $M < -3{,}57$

El mayor valor entero de M es : - 4 RPTA. D

34.- ¿En qué dos partes debe dividirse un número para que su producto alcance el máximo valor?

A) 1 :2 B) 3 : 4 C) 2 : 3 D) 1 : 1 E) 3 : 5

Resolución:

Sea a el número y sus partes: x ; $a - x$. El producto será : $P = x(a - x)$

$P = ax - x^2$

Aquí aplicamos el método que consiste en completar cuadrados : $P = \frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$

El valor máximo de P se obtiene cuando : $x = \frac{a}{2}$; esto implica que las partes sean iguales

Rpta. : D

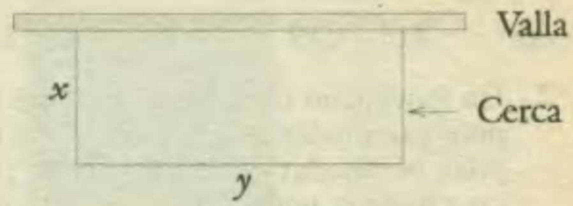
35.- Con el fin de construir una casa de campo se precisaba cercar el terreno destinado a este fin. Contábase con material para 80 metros lineales de valla. Además, en uno de los lados de la parcela podría emplearse una cerca construida con anterioridad En estas condiciones. ¿Cómo hubo que cercar la parcela rectangular para abarcar la mayor superficie posible?

A) 30 × 20 B) 20 × 40 C) 40 × 20 D) 10 × 20 E) N.A.

Resolución:

Hacemos un diagrama de acuerdo a los datos y planteamos :

$$2x + y = 80$$



Area $= x \cdot y = x\,(80 - 2x) = 80x - 2x^2$

Luego : $A = 800 - 2\,(x - 20)^2$

Que es máxima para $x = 20$; de donde $y = 40$

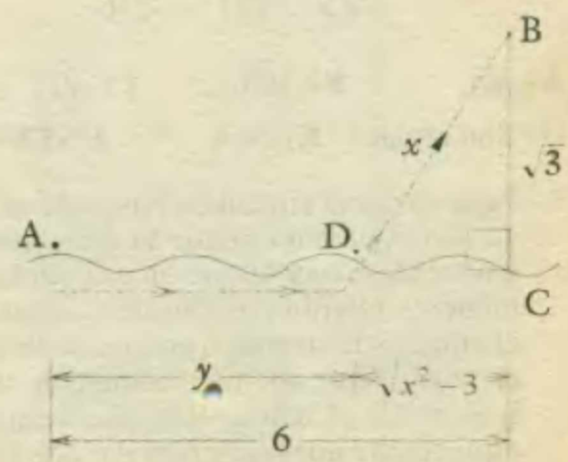
La parcela debe tener 40 *m* de largo y 20 *m* de ancho. RPTA. C

36.- Desde la ciudad ribereña A hay que trasladar cargamento al puerto B, situado 6 km más abajo, a $\sqrt{3}$ km de la orilla del río (ver figura). ¿Cómo debe trazarse la carretera desde B al río para que el transporte de cargas desde A hasta B resulte lo más barato posible, considerando que el transporte de una tonelada - kilómetro por río cuesta la mitad que por carretera?

A) 5 km por río ; 2 km por carretera B) 3 km por río ; 2 km por carretera

C) 3 km por río ; 1 km por carretera D) 1 km por río ;4 km por carretera E) N.A.

Resolución:



Costo: $y \cdot 1 + 2 \cdot x$

$C : 6 - \sqrt{x^2 - 3} + 2x$

$6 : \sqrt{x^2 - 3} = 2x + 6 + C$

Despejando x; se obtiene :

$$x = \frac{2}{3}(C - 6) \pm \frac{\sqrt{(C - 6)^2 - 9}}{3}$$

Interesa que x sea mínimo es decir, $(C - 6)^2 = 9$; de donde $C = 9$

Luego : $x = 2$; $y = 5$

Es decir, 5 *km* por río ; 2 *km* por carretera; $\angle BDC = 60°$

5 *km* por río ; 2 *km* por carretera RPTA

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- María camina por lo menos 5 *km* cada *día*. Ella y Carmen caminan ambas a lo más 12 *km* cada *día*. A lo más, ¿Cuánto camina Carmen cada *día*?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

2.- Un muchacho tiene en un bolsillo 5 chapitas premiadas de la gaseosa A y 6 chapitas premiadas de la gaseosa B. ¿Cuántas chapitas tendrá que sacar de una en una para tener con certeza un par de la misma marca?

A) 6 B) 4 C) 2 D) 3 E) 1

UNALM 93 - I

3.- ¿Cómo colocarías tres nueves para obtener su máximo valor?

A) $\sqrt[9]{99}$ B) $\left(9^{9}\right)^{9}$ C) $9^{9^{9}}$ D) 99^{9} E) 9^{99}

4.- ¿Cuál de las raíces es menor?

$$\sqrt{5}\ ,\ \sqrt[3]{11}\ \text{ó}\ \sqrt[4]{36}$$

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt[4]{36}$ C) $\sqrt[3]{11}$

D) Son iguales E) N.A. **UNFV - 91**

5.- Pepe va a una ciudad en busca de un amigo. En el camino pierde la dirección, sin embargo, recuerda que en esa ciudad los números telefónicos son de 3 cifras, que el número de su amigo empieza con 4, que es impar y que además, la suma de sus cifras es 12. ¿Cuántas llamadas como mínimo tendrá que hacer para dar con el teléfono de su amigo?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12

UNALM 93 - I

6.- Se tienen monedas de las mismas dimensiones. El número máximo de monedas tangentes dos a dos que pueden colocarse tangencialmente alrededor de una de ellas es:

A) 6 B) 4 C) 7 D) 5 E) 8

UNALM - 92

7.- La edad promedio de 4 hombres es 65 *años*. Ninguno de ellos es mayor de 70 *años*. ¿Cuál es la edad mínima que cualquiera de los hombres puede tener?

A) 67 *años* B) 65 *años* C) 54 *años*

D) 50 *años* E) 45 *años*

8.- Una persona puede comprar 24 manzanas y 20 naranjas ó 36 manzanas y 15 naranjas. Si comprara sólo naranjas. ¿Cuál es el máximo número que podría comprar?

A) 30 B) 35 C) 25 D) 40 E) 45

PUCP - 90

9.- ¿Cuál es el menor número entero que al dividirlo entre 5 deja un residuo de 1, al dividirlo entre 7 deja un residuo de 6, pero al dividirlo entre 3 no deja residuo?

A) 146 B) 76 C) 41 D) 111 E) 72

10.- Si "p" representa un número entre 3 y 6; y "q" representa un número entre 15 y 60; entonces q/p representa un número entre :

A) $2\frac{1}{2}$ y 20 B) 5 y 20 C) $2\frac{1}{2}$ y 10

D) 5 y 10 E) 3 y 60

11.- Sumar el máximo y el mínimo valor entero que puede tomar x en :

$$-12 \leq 4x + 8 < 20$$

A) 4 B) 2 C) -1 D) -3 E) 1

12.- En una urna hay 6 bolas rojas y 6 azules. ¿Cuál es el mínimo número de bolas que deben sacar para tener la certeza de haber extraido 2 de diferente color?

A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 13

13.- En una urna hay 10 bolas rojas, 12 azules y 15 verdes. ¿Cuál es el mínimo número de bolas que se deben sacar para tener la seguridad de haber extraído 8 bolas de uno de los colores?

A) 23 B) 21 C) 22 D) 24 E) 25

14.- ¿Cuál es el mínimo valor de $E = x^2 + 2x + 7$?

A) 12 B) 3 C) 4 D) 6 E) 5

15.- En una caja de bombones hay hasta 3 sabores de ellos. ¿Cuánto debo tomar como mínimo para tener la certeza de que tengo 4 bombones del mismo sabor ?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 10

16.- Trece naranjas pesan entre 3 y 4,8 *kg*. ¿Cuál es el máximo número de naranjas que puede haber en 12 *kg*?

A) menos de 40 D) entre 60 y 70

B) entre 40 y 50 E) más de 70

C) entre 50 y 60

NIVEL B

17.- Cuatro hombres y 2 muchachos tienen que cruzar un río en una canoa, en cada viaje puede ir uno de los hombres o los dos muchachos, pero no un hombre y un muchacho a la vez. ¿Cuál es el número de veces que la canoa tiene que cruzar el río, en cualquier sentido, para que se pase a todos?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 17 E) 19

18.- Se tienen 5 trozos de cadena con 4 eslabones cada uno. Se desea formar una cadena contínua de forma circular con esos trozos. ¿Cuál es el menor número de eslabones que hay que abrir y cerrar?

A) 3 B) 6 C) 7 D) 4 E) 5

19.- Cuatro constructores : A, B, C y D presentan sus presupuestos para la construcción de 4 obras W, X, Y y Z; cuyos costos se muestran en la tabla dada. Si cada constructor sólo puede hacer una obra. ¿Cuál es el presupuesto mínimo para hacer las 4 obras?

	W	X	Y	Z
A	2	3	2	4
B	2	2	3	5
C	3	1	2	3
D	5	1	3	2

A) 6

B) 7

C) 8

D) 9

E) 10

UNALM 93 - I

20.- El mayor número entero M que satisface la desigualdad : $2x^2 - 4x + 1 > 2M$; para todo valor real de x, es :

A) -1 B) 1 C) 0 D) -2 E) 2

UNALM - 90

21.- En una ánfora hay 80 bolos numerados del 1 al 80. ¿Cuántos bolos como mínimo deben extraerse para tener la certeza de obtener 3 bolos comprendidos entre 24 y 37?

A) 14 B) 66 C) 67 D) 69 E) 71

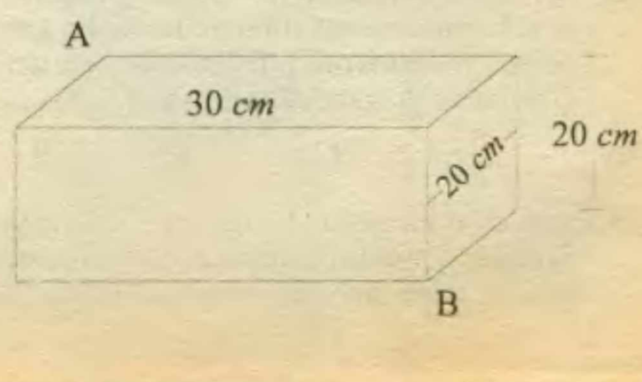
UNALM 92 - I

22.- Una señora tiene en una caja oscura. 3 pares diferentes de zapatos de colores negros, 4 blancos, 2 azules y 5 rojos. Diga Ud. ¿Cuántos zapatos se deben extraer de uno en uno y sin reposición a fin de tener la certeza de obtener un par útil?

A) 15 B) 5 C) 3 D) 4 E) 14

UNALM 95 - I

23.- Hallar la longitud del camino más corto en *centímetros* para que el escarabajo llegue de A a B.



A) $(10)(13)^{1/2}+20$ D) 60

B) $(20)(2)^{1/2}+30$ E) 70

C) 50 **UNALM 95 - I**

24.- Si a una fracción propia e irreductible se le agrega su mitad, se obtiene por lo menos 1; pero si se le resta la cuarta parte de la fracción a lo más se obtiene 1/2; la fracción es:

A) 3/2 B) 5/6 C) 2/3 D) 3/4 E) N.A.

UNFV - 89

25.- En un mercado el costo de las naranjas es 0,06 *soles* la unidad y sale por unidad; y el costo de las manzanas es de 0,10 *soles* dos unidades y las manzanas salen por dos unidades. Un señor dispone de 10 *soles* para comprar el mayor número de frutas en la cual debe haber la mitad de frutas de uno respecto del otro. ¿Cuál es el número máximo de frutas que puede comprar?

A) 176 B) 174 C) 186 D) 188 E) 190

UNALM 92 - I

26.- Hallar el menor número que dividido por 3 dé como residuo 1, por 5 dé 3, por 9 dé 7 y por 12 dé 10.

A) 178 B) 538 C) 322 D) 133 E) 268

27.- Una urna contiene "$n + 2$" esferitas rojas; "n" azules; "$2n - 1$" blancas; "$3n + 3$" morados. ¿Cuántas esferitas como mínimo se debe extraer al azar para tener la certeza de obtener 2 esferitas de diferente color?

A) $6n$ B) $6n - 1$ C) $6n + 1$

D) $3n + 4$ E) $3n + 2$

28.- Se tienen monedas de las mismas dimensiones. El número máximo de monedas tangentes dos a dos que pueden colocarse tangencialmente alrededor de una de ellas es.

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

29.- Irene compra caramelos de limón y naranja. Si cada caramelo de limón cuesta 50 céntimos y cada uno de naranja cuesta 30 céntimos. ¿Cuál es el máximo número de caramelos que pudo adquirir con 4 *soles*?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 13 E) N.A.

30.- Lucía reparte entre sus 3 hijos entre 15 y 24 *soles* semanales. Si Irene reparte entre sus 4 hijos entre 20 y 28 *soles* cada semana. ¿Cuál es la máxima diferencia que puede haber entre lo que recibe un hijo de Lucía y uno de Irene?

A) 2 *soles* B) 3 *soles* C) 4 *soles*

D) 5 *soles* E) No hay diferencia

31.- Un triángulo equilátero de 3 *cm* de lado dividido en triángulos equiláteros de 1 *cm* de lado. ¿Cuál es el máximo número de éstos últimos que se puede formar?

A) 4 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

NIVEL C

32.- La edad promedio de 4 personas es 50 *años*. Ninguno es mayor de 65 *años*, entonces:

I) La edad mínima que una persona puede tener es de 5 *años*.

II) El promedio de la edad de 2 personas no puede ser 65 *años*.

A) Sólo la I es verdadera

B) Sólo la II es verdadera

C) Sólo la I y II son verdaderas

D) Ninguna es verdadera

E) Falta más información

33.- Si p es la razón de personas enfermas de cólera en una ciudad y si q es la razón de los que no están enfermos. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar la expresión pq?

A) 0 D) $(pq)^2$

B) 1/4 E) 1/2

C) No se puede conocer sin saber p

UNMSM - 91

34.- Como mínimo una araña emplea 5 *minutos* en recorrer todas las aristas de un cubo construído con un alambre de 60 *cms* de longitud. El tiempo que emplea en recorrer una arista es :

A) 18.75 *s* B) 20 *s* C) 25 *s*

D) 30 *s* E) 37,5 *s*

35.- Para que el número n se pueda dividir en dos partes tales que su producto sea k, se debe tener :

A) $k > (n/2)^2$ D) $k > n^2$

B) $k \leq (n/2)^2$ E) $k \geq \frac{n^2}{2}$

C) $k < n^2$ **UNMSM - 95**

36.- El ingreso mensual de una familia de 4 miembros se encuentra entre S/. 15 000 y S/. 27 000. La suma del ingreso mensual de 2 miembros de la familia es fijo y es igual a S/. 12 000. Una de las siguientes afirmaciones es verdadera.

A) Un miembro de la familia no puede ganar más de S/. 1 000

B) Un miembro de la familia no puede ganar más de S/. 14 000

C) El ingreso medio mensual de la familia es S/. 6 000

D) La diferencia mensual de los ingresos variables de la familia no es mayor de S/. 12 000

E) La suma de los ingresos de los 3 miembros de la familia no puede ser más de S/. 12 000

37.- Cecilia le da a su hija Juana, como propina, 5 *soles* cada viernes, 10 cada sábado y 15 cada domingo. ¿Cuál es la máxima cantidad que Juana recibirá durante un mes de 30 días?

A) 150 B) 155 C) 135 D) 140 E) 145

38.- Se tiene 81 bolas del mismo color y tamaño, pero una de ellas es un poco más pesada que las otras que si tienen el mismo peso. Encontrar la bola más pesada disponiendo de una balanza de 2 platillos. ¿Cuántas pesadas como mínimo debe hacerse?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

39.- ¿Cuántos palitos deben retirarse como mínimo para obtener una figura formada por cinco cuadritos iguales?

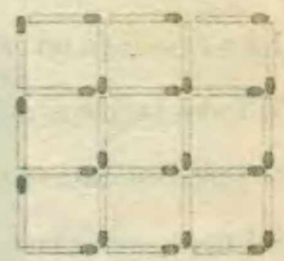
A) 3

B) 6

C) 4

D) 8

E) 10



40.- Una hormiga tiene que ir de A hacia B, pero tocando un punto cualquiera de la recta ℒ. Hallar la menor distancia que puede recorrer la hormiga.

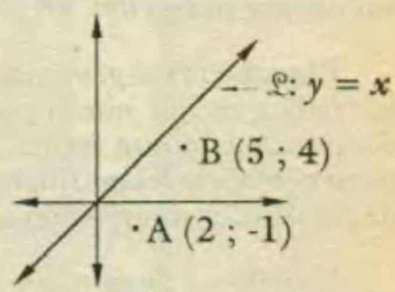
A) 3

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8



41.- El menor número entero "M" que cumple la desigualdad : $-x^2 + 2x - 5/2 < M$ es :

A) 0 D) -1

B) Ningún número entero E) 1

C) -2

42.- El mayor número entero "A" que verifica la desigualdad $x^2 - 2x - 4 < A$; es :

A) 6 B) 5 C) 3 D) -5 E) -6

43.- De un tronco cilíndrico debe sacarse una viga rectangular de máximo volumen. ¿Qué forma ha de tener su sección?

A) Rombo B) Triángulo C) Cuadrado

D) Hexágono E) N.A.

RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Inducción.

Consideremos el siguiente razonamiento, basado en la observación directa de unas casas :

1. La casa A en mi calle, tiene la forma de una caja.

2. La casa B en mi calle, tiene la forma de una caja.

3. Todas las casas en mi calle, tienen forma de caja.

4. Todas las casas en mi ciudad tienen forma de caja.

5. Luego, todas las casas tienen forma de caja.

¿Cómo se obtuvo la conclusión (proposición 5)?. Recopilamos hechos individuales con respecto a todas las casas en nuestra calle y a todas las de nuestra ciudad lo cual dio como resultado la observación de que todas tenían forma de caja. Estos hechos *implican* que cada casa, sin excepción, tiene forma de caja, y de ellos podemos hacer la inferencia de que todas las casas, en cualquier parte que sea, tienen esa misma forma. La conclusión a que se llegó en este caso fue por *inducción*, no por deducción.

El problema al *generalizar* en cuanto a que *todas* las casas de todas partes, tienen forma de caja, radica en que nunca podremos estar seguros de que en otros sitios distantes no puedan existir casas con otra forma. De hecho, en la ciudad vecina a la nuestra puede haberlas, o en alguna población lejana. Inclusive, puede ocurrir que en algún país remoto las casas en forma de caja puedan constituir a regla, no la excepción.

Cuando se llega a una conclusión mediante inducción partiendo de numerosos hechos observados, no se sigue necesariamente que dicha conclusión sea verdadera en todos los casos. ¿Si contamos mil casas en forma de caja y llegamos a una conclusión, quién nos dice que a la vuelta de la esquina hasta la cual llegamos en nuestra cuenta no nos topemos con una casa cilíndrica? A diferencia de la deducción, que siempre sigue a las premisas, las proposiciones obtenidas por inducción nunca pueden ser probadas por la lógica. Apenas si observáramos cada caso en particular durante su pasado, su presente y su futuro, podríamos llegar a la conclusión general de que todo lo relativo al mismo sería verdadero; pero esto es imposible. Por consiguiente, nunca podremos tener la seguridad de que una conclusión a la que se haya llegado por inducción, sea en absoluto verdadera.

A pesar de este hecho, el tipo inductivo de inferencia desempeña todavía un papel de gran importancia en el razonamiento, y es la base de muchos hechos importantes que aceptamos como "verdaderos".

La mayor parte de los hechos del ambiente en que nos vemos, se derivan de las experiencias, medidas, experimentos y observaciones. Oimos, vemos y tocamos lo que sucede. Si tras de muchas experiencias con un cierto tipo de suceso observamos que siempre ocurren las mismas cosas, procedemos a resumir las distintas observaciones en una especie de *generalización*. Este proceso viene a ser inductivo, no deductivo.

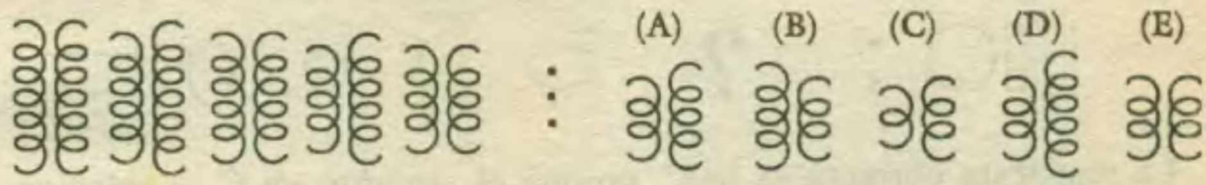
30 Razonamiento Abstracto

En este capítulo se trata de ofrecer pautas para el adiestramiento en algunos campos del razonamiento abstracto, que trata sobre la capacidad de observación concentración y comprensión , de figuras que se relacionan en el plano o el espacio, en diferente posición y orientación. Este aspecto del razonamiento, más que aumentar el conocimiento, ejercita el proceso de pensamiento lógico y desarrolla aptitudes que se requieren para enfrentar situaciones problemáticas.

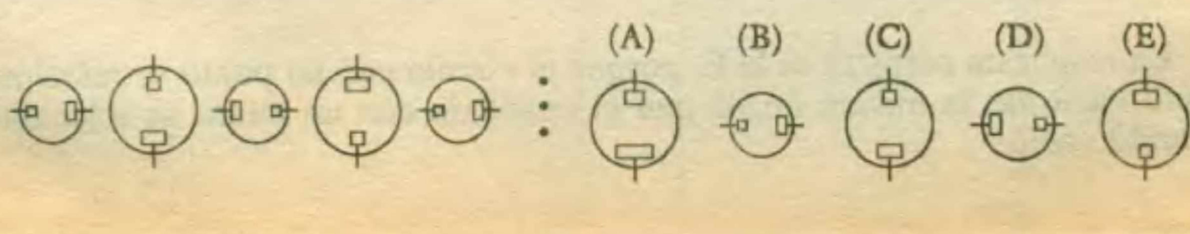
I) RAZONAMIENTO CON SUCESIONES DE SIMBOLOS

Las preguntas sobre sucesiones de símbolos prueban la capacidad de descubrir la relación que rige en un grupo de símbolos, de modo que pueda saber cuál es el término siguiente de la sucesión. Cada pregunta se compone de un conjunto de cinco símbolos situados en la mitad izquierda de la página. A la derecha hay otros cinco símbolos, llamados A, B, C, D y E. El lector debe inspeccionar de izquierda a derecha a los cinco primeros símbolos para determinar qué está ocurriendo en la sucesión dada. Luego seleccione uno de los símbolos que va con una letra , el que considere que mejor continúa la sucesión.

Dos preguntas de muestra explicadas

①


Cada símbolo de esta sucesión,se compone de dos resortes. Los símbolos se diferencian entre sí por el número de lazos de cada resorte. En el primer símbolo cada resorte tiene cinco lazos; en el segundo, el de la izquierda tiene cuatro y el de la derecha cinco lazos; en el tercero cada uno tiene cuatro lazos. Conforme va progresando esta sucesión, primero el resorte de la izquierda pierde un lazo y luego pierde uno el de la derecha. Como el quinto símbolo de la sucesión tiene tres lazos en cada resorte, el sexto deberá tener dos lazos en el resorte izquierdo y tres en el derecho, tal como se ve en el símbolo etiquetado A.

②


Los cinco primeros símbolos muestran una alternancia de tamaños : de pequeño a grande, con un cuarto de giro en el sentido de las manecillas del reloj de un símbolo al siguiente. Por tanto, el término siguiente de la sucesión dada deberá ser un círculo grande (que elimina la posibilidad B) con el rectángulo más grande en el la parte inferior del círculo (lo que elimina las posibilidades D y E). Un examen más atento de la posibilidad A muestra que los rectángulos de dentro de este círculo son más grandes que los demás. Por lo tanto la mejor elección para el término siguiente es (C), que tiene un círculo grande con un cuadrado pequeño arriba y un rectángulo más grande abajo.

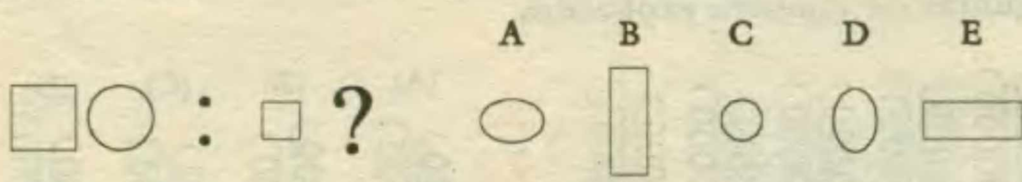
10 RAZONAMIENTO CON ANALOGIAS DE SIMBOLOS

Las preguntas sobre analogía de símbolos tratan de medir la capacidad de descubrir las relaciones subyacentes existentes entre grupos de símbolos. Asi cada pregunta se compone de tres cajas de símbolos : La primera contiene dos símbolos; la segunda uno y un signo de interrogación; y la tercera contiene cinco símbolos etiquetados con la letras A, B, C, D y E. Debe elegir el símbolo etiquetado de la tercera caja que mejor puede sustituir al de interrogación de la segunda. Para hacerlo , tiene que descubrir primero qué es lo que los símbolos de las dos primeras cajas tienen en común, observando luego de qué manera varían esos rasgos entre las cajas primera y segunda. Su respuesta será un símbolo que tiene un rasgo en común con todos los símbolos del conjunto dado, pero que mantiene la misma variación en ese símbolo tal como la muestra el otro signo de la segunda serie.

Dos preguntas de muestra explicadas

Considere el ejercicio 1. Los dos primeros dibujos se relacionan entre sí. Descubran qué dibujo de la derecha se relaciona con el tercero de la misma forma que el segundo con el primero.

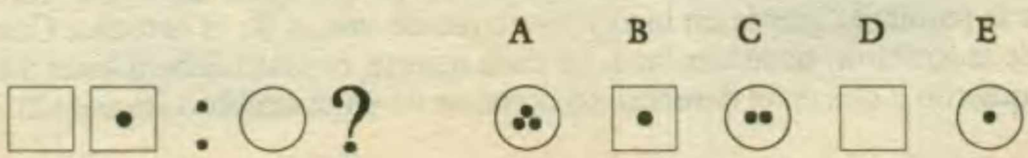
1)



La respuesta correcta es la C, porque el *circulito* en C se relaciona con el *cuadradito* de la misma forma que el círculo grande lo hace con el cuadrado grande.

Ahora estudiemos la pregunta 2. Descubra qué dibujo de la derecha se relaciona con el tercero de la misma forma que el segundo con el primero.

2)



La respuesta correcta es la E, porque el círculo con un punto se relaciona con el círculo vacío de la misma forma que el cuadrado con un punto se relaciona con el cuadrado vacío.

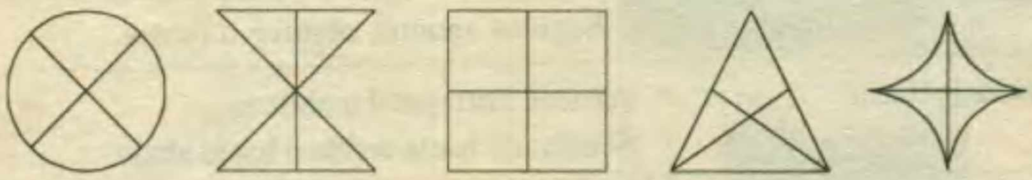
La siguiente lista te ayudará a descubrir los rasgos comunes y variaciones que suelen encontrarse en las cuestiones de analogías de símbolos :

RASGOS COMUNES	VARIACIONES DEL RASGO COMUN
Líneas que dividen una figura	Divisiones iguales o desiguales
Líneas que forman ángulos	Angulos agudos, obtusos o rectos
Dirección de líneas	Vertical, horizontal u oblicua Señalando hacia arriba o hacia abajo
Tipo de línea	Contínua o discontínua Curva o recta Todas iguales, alguna diferente o todas diferentes
Número de líneas	2 ; 3 ; 4 ; etc. Mismo número o diferentes en cada figura
Relación entre las líneas	Intersección, o ,sin intersección Paralelas o no
Relaciones de las líneas con las figuras	Líneas en el interior o exterior de las figuras Líneas que tocan o no tocan a las figuras
Formas cerradas	Formadas por líneas recta o curvas
Figuras abiertas	El extremo abierto está arriba, abajo , a la izquierda ,o, a la derecha
Dirección de la figura	Se dirige hacia arriba, abajo, derecha o izquierda
Forma de la figura	Mismas o diferentes formas
Sombreado de la figura	Sombreado total o parcial Sombreados con líneas horizontales, verticales o inclinadas
Tamaño de la figura	Grande o pequeña Mismo o diferente tamaño
Relaciones entre las figuras	Se tocan, separadas , solapadas, o , compartiendo un área común
Figuras dentro de figuras	Mismas o diferentes figuras Figuras concéntricas o no concéntricas

III) RAZONAMIENTO CON TERMINO EXCLUIDO

Las preguntas en este caso se refieren a un conjunto de figuras relacionadas entre si por rasgos comunes, excepto una figura del conjunto que debe ser reconocida y señalada.

Ejemplo: ¿Cuál de las siguientes figuras no guarda la misma relación con las demás?



A **B** **C** **D** **E**

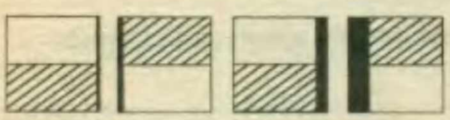
La figura que debe excluirse es la D porque el rasgo común de A, B, C y E es la *simetría*. Todas la figuras pueden dividirse por una línea vertical u horizontal que determinan dos partes iguales, excepto la D.

PROBLEMAS RESUELTOS

SUCESIONES DE SIMBOLOS

El siguiente conjunto de ejercicios consiste en determinar al simbolo que continua en la sucesión dada .

1)



A) *B)* *C)* *D)* *E)*

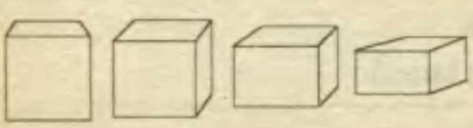


Resolución:

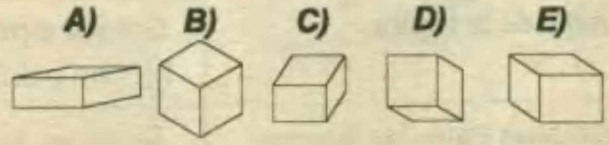
La columna pintada se alterna de derecha a izquierda, a la vez que se va ensanchando. Asimismo, la zona sombreada cambia en cada figura: de arriba, hacia abajo sucesivamente; luego la figura que sigue según este orden de cambios es la E.

RPTA. E

2)



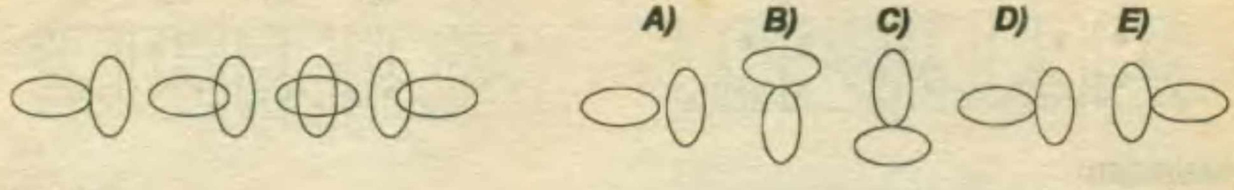
A) *B)* *C)* *D)* *E)*



Resolución:

El cubo se aprecia en perspectiva, orientándose la observación hacia la derecha, a la vez que en cada figura, el cubo disminuye en altura. Luego la figura que sigue es la A.

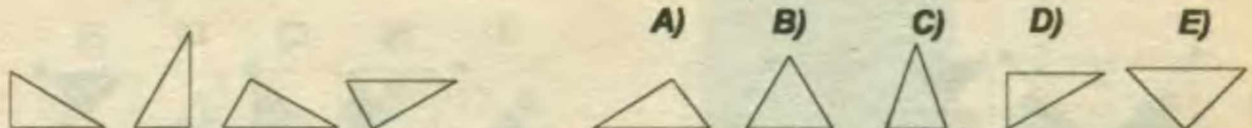
RPTA. A

3) 

Resolución:

El óvalo de la izquierda, en cada figura, se va desplazando hacia la derecha, hasta cruzar completamente al otro, que mantiene su posición vertical. La figura que sigue es la E.

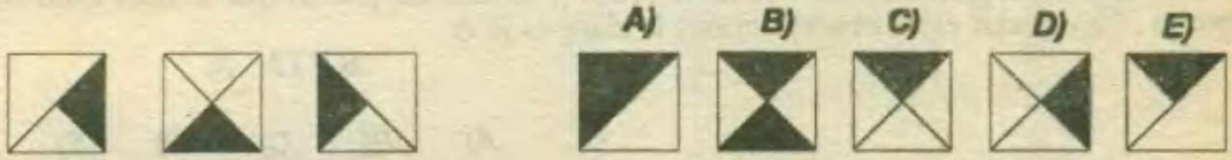
RPTA. E

4) 

Resolución:

Enla sucesión dada el triángulo (que tiene forma de escuadra) no cambia, ni de forma, ni de dimensiones, aunque si, de orientación, aunque sin seguir un orden especial. Luego la única alternativa que mantiene la forma es la D.

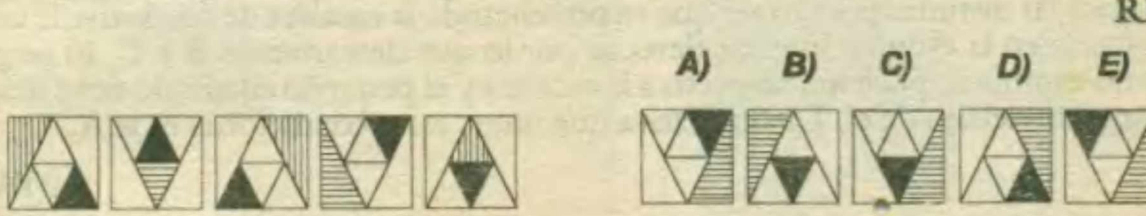
RPTA. D

5) 

Resolución:

En cada figura se pinta, siguiendo un giro en sentido horario, cada uno de los cuatro triángulos que se forman al trazar las diagonales del cuadrado, la figura que sigue debe tener, según esto, pintado el triángulo superior, es decir la figura C.

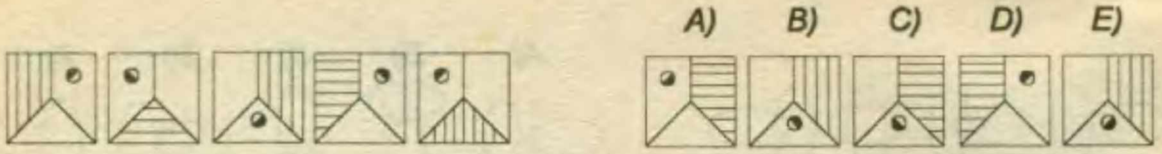
RPTA. C

6) 

Resolución:

En cada figura el triángulo mayor se alterna primero hacia arriba y luego hacia abajo. Observando el triángulo pintado de negro , éste en los triángulos orientados hacia arriba se alternan así : hacia la derecha , hacia la izquierda y al centro. Finalmente en los triángulos orientados hacia abajo, el triángulo pintado se alterna primero en el centro, luego hacia la derecha y finalmente le corresponderá estar en la izquierda. El simbolo que presenta estas características es E.

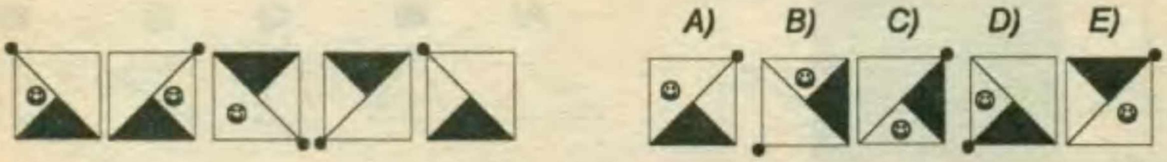
RPTA. E

7) 

Resolución:

En cada figura la bola semipintada se sucede siguiendo un movimiento antihorario , por ello le corresponde aparecer en el triángulo . Asimismo el rayado se va sucediendo en sentido antihorario , por ello le corresponde aparecer en el trapecio derecho. El simbolo que presenta todas estas características es : E

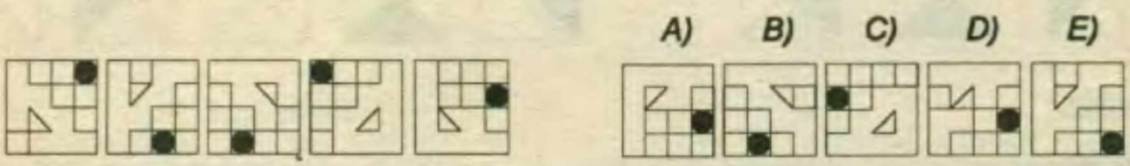
RPTA. E

8) 

Resolución:

Se observa que el triángulo pintado se alterna dos veces abajo y dos veces arriba, luego le corresponde estar abajo,por ello la alternativa puede ser la A o la D.Para descartar nos fijamos en la bola negra que aparece en el vértice del cuadrado, la que va sucediéndose en sentido horario , por lo cual ahora le corresponde estar en el vértice superior derecho.Finalmente diremos que la diagonal se alterna de derecha a izquierda, por lo que le toca estar hacia la derecha . Con todas estas observaciones la clave es la A .

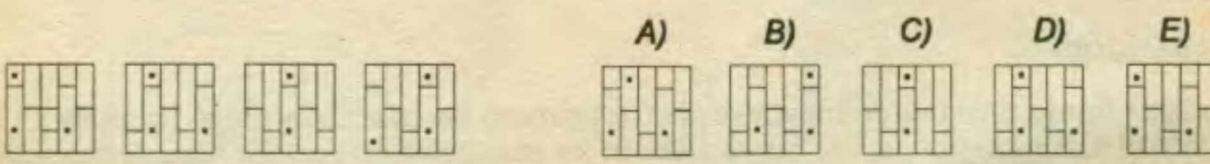
RPTA. A

9) 

Resolución:

Si observamos las distintas posiciones que va presentando la escalera de cuadritos, le corresponde ubicarse en la esquina inferior derecha por lo que descartamos B y C. El pequeño triángulo no cambia su posición respecto a la escalera y el pequeño cuadrado debe ubicarse inmediatamente debajo de el. La alternativa que reune estas condiciones es la A.

RPTA. A

10) 

Resolución:

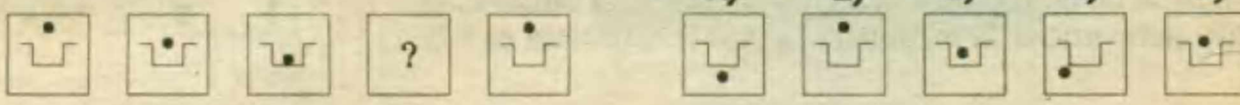
Observando el desplazamiento de los puntos, comprobamos que estos se desplazan un casi-

llero cada vez , luego a la paraeja de puntos de una misma columna le corresponde ubicarse en la parte lateral del cuadrado, mientras que al punto inferior solitario le corresponde estar a dos casilleros de distancia hacia atrás.Luego la clave es la B.

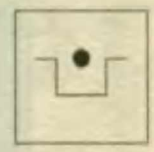
RPTA. B

En las preguntas 11 a 15, aparecen series de símbolos que siguen un orden determinado, pues bien ,de acuerdo a ese orden, completa la figura que falta.

11) ***A)*** ***B)*** ***C)*** ***D)*** ***E)***

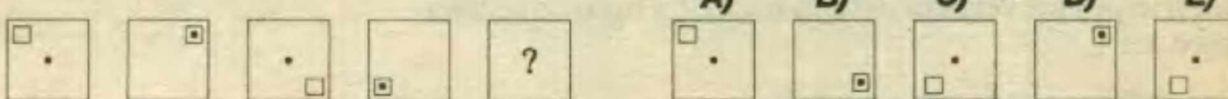


Resolución:

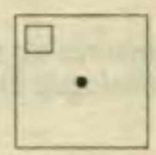


El pequeño círculo desciende y asciende hasta su posición original. La 4[ta] figura deberá ser como se muestra (igual a la 2[da]).

12) ***A)*** ***B)*** ***C)*** ***D)*** ***E)***

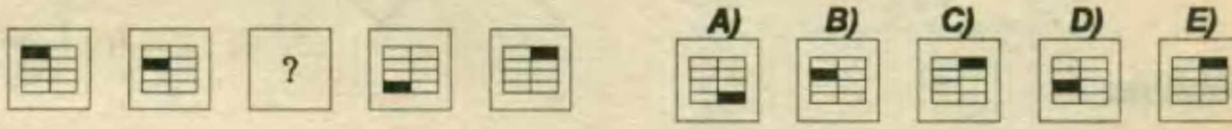


Resolución:

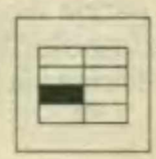


El punto aparece alternadamente en el centro o dentro del cuadrito que recorre las esquinas en sentido horario. La figura faltante es :

13) ***A)*** ***B)*** ***C)*** ***D)*** ***E)***

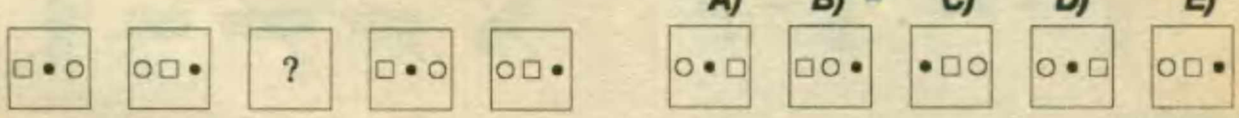


Resolución:

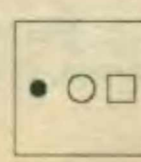


El pequeño rectángulo pintado va recorriendo de arriba hacia abajo las partes de la figura principal. La 3[ra] figura debe ser :

14) ***A)*** ***B)*** ***C)*** ***D)*** ***E)***



Resolución:

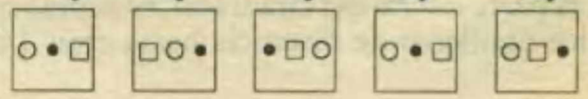


El cuadrado, el punto y el círculo aparecen en un orden secuencial de izquierda a derecha. En la figura faltante, el punto debe iniciar la secuencia.Luego la respuesta es :

14)

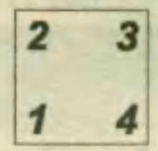


A) B) C) D) E)

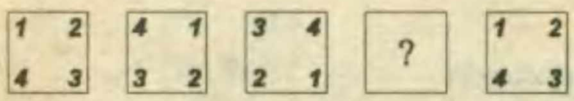


Resolución:

El cuadrado, el punto y el círculo aparecen en un orden secuencial de izquierda a derecha. En la figura faltante, el punto debe iniciar la secuencia. Luego la respuesta es :



15)



A) B) C) D) E)



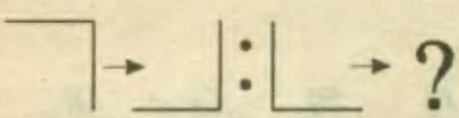
Resolución:

Los números cambian de posición, girando en sentido horario por los vértices del cuadrado. La figura que falta debe ser :

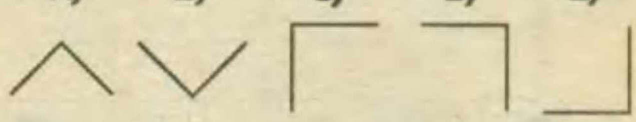
ANALOGIAS DE SIMBOLOS

El siguiente conjunto de ejercicios consiste en determinar al simbolo que completa mejor la relación de analogía entre las figuras dadas .

16)



A) B) C) D) E)

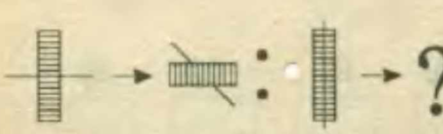


Resolución:

En la primera pareja de símbolos, se ve que el primero gira 90° en sentido horario, para formar el otro símbolo. Entonces, en la segunda pareja, ocurrirá lo mismo, luego de un giro de 90° se debe formar la figura C.

RPTA. C

17)



A) B) C) D) E)



Resolución:

El primer símbolo, gira 90° y la recta que lo cruza gira solamente 45° (en sentido horario). En la segunda pareja, el tercer símbolo gira 90° y la línea vertical, gira 45° formándose la figura B.

RPTA. B

A) B) C) D) E)

19) 

Resolución:

La primera figura gira 45° en sentido antihorario, para formar la segunda. Asimismo, la tercera debe girar 45° en el mismo sentido, para formar la cuarta, que será la figura C.

RPTA. C

A) B) C) D) E)

20) 

Resolución:

Cada figura presenta un lado más que la anterior, así, debe aparecer como cuarta figura, una que tenga 4 lados, sin importar la forma, entonces dicha figura es la C.

RPTA. C

A) B) C) D) E)

21) 

Resolución:

Cada figura presenta un par de lados más que la anterior, así, debe aparecer como cuarta figura, una que tenga 8 lados, la cual deberá tener los colores alternados , es decir la punta central deberá ser blanca y el circulo central igualmente negro;entonces dicha figura es la E.

RPTA. E

A) B) C) D) E)

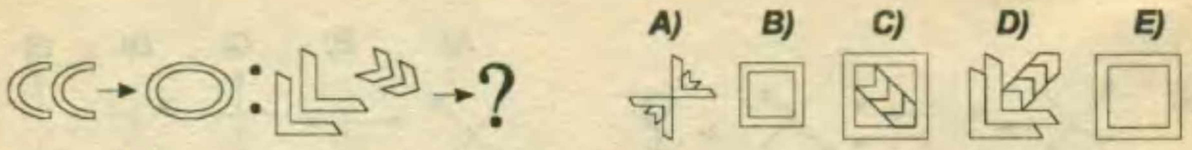
22) 

Resolución:

Cada figura presenta un lado y una bola más que la anterior, así, debe aparecer como cuarta figura, una que tenga 4 lados y 4 bolas las cuales deberán estar próximas a los vértices.Entonces dicha figura es la D.

RPTA. D

23)

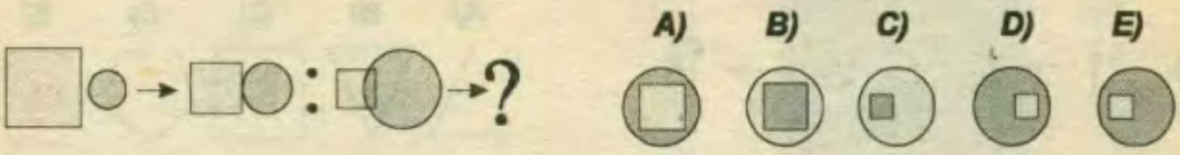


Resolución:

Las dos primeras figuras relacionan curvas abiertas con una cerrada , luego la segunda debe relacionar las figuras rectas con otra recilínea , formada por la reunión de las anteriores . No cabe duda que la figura análoga es la A .

RPTA. A

24)

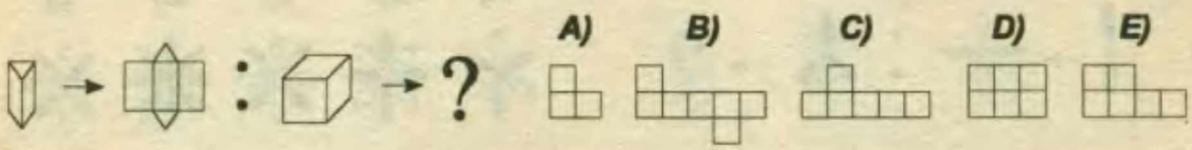


Resolución:

La analogía consiste en comparar dos figuras de la misma forma pero de distinto tamaño y color : Un cuadrado grande y luego otro pequeño, por ello la clave es la E.

RPTA. E

25)



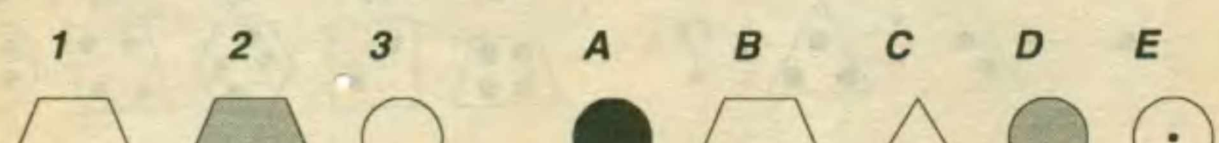
Resolución:

En este caso se pretende relacionar un sólido con su respectivo desarrollo .De este modo podemos reconocer que el cubo está relacionado con la clave B.

RPTA. B

Entre las figuras 26 y 30, hay una relación, entonces el ejercicio consiste en reconocer cuál de las figuras mostradas guarda una relación similar con 3.

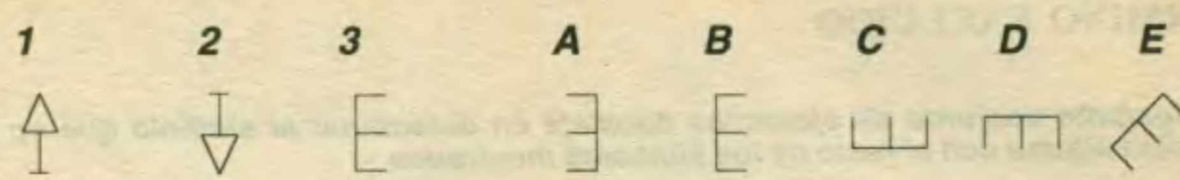
26)



Resolución:

6) La 2da figura es idéntica a la 1ra sólo que está sombreada, luego la figura que corresponde a 3 es un círculo sombreado, es decir la D.

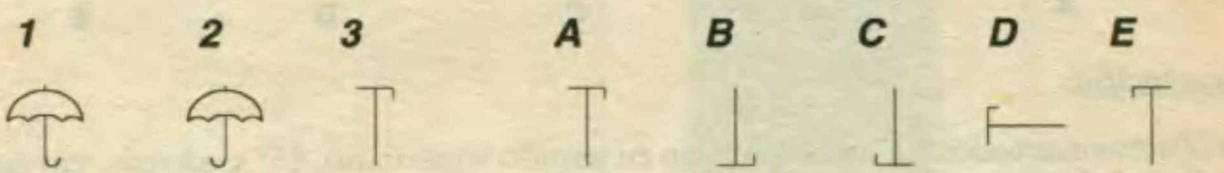
RPTA. D

27) 

Resolución:

La 2^{da} figura es igual a la 1^{ra}, pero invertida; luego debemos buscar la inversa de la 3^{ra} que es la B.

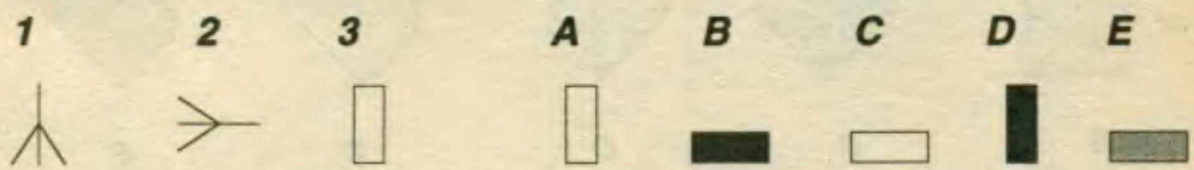
RPTA. B

28) 

Resolución:

La 2^{da} figura es idéntica a la 1^{ra} respecto a un eje vertical, igualmente, la simétrica a la 3^{ra} es la E.

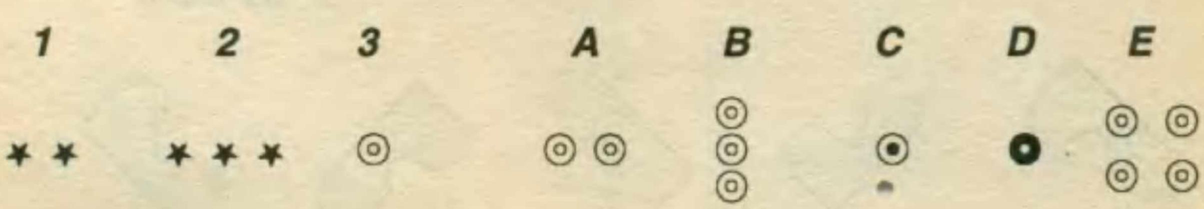
RPTA.E

29) 

Resolución:

La 2^{da} es igual a la 1^{ra}, girada 90° hacia la derecha. Entonces al girar así la 3^{ra}, se obtiene C.

RPTA. C

30) 

Resolución:

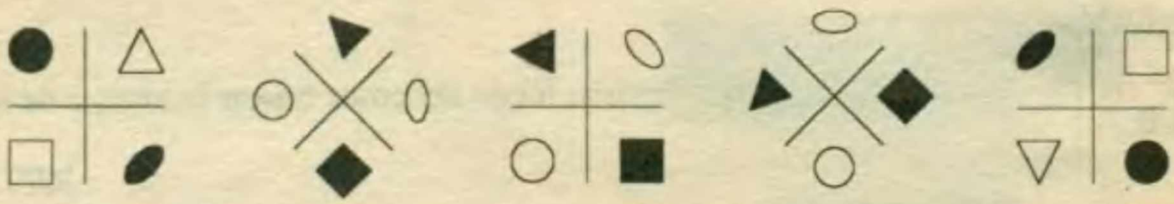
Entre la 1^{ra} y la 2^{da}, la relación consiste en agregar un elemento idéntico, luego si a la 3^{ra} le agregamos un elemento, se obtiene A.

RPTA. A

TERMINO EXCLUIDO

El siguiente conjunto de ejercicios consiste en determinar al simbolo que no guarda relación alguna con el resto de los simbolos mostrados.

31)



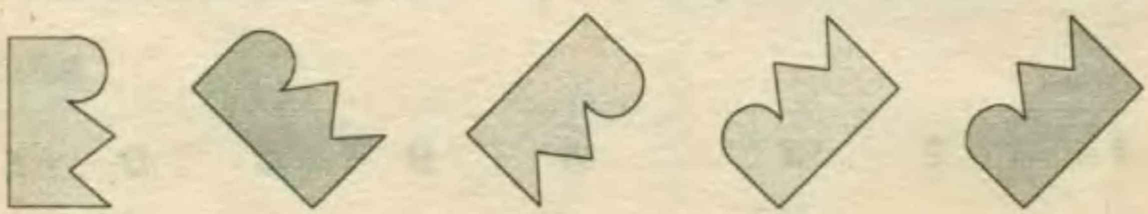
A B C D E

<u>Resolución</u>:

Se observa que todos los símbolos giran en sentido antihorario, 45° y además, van cambiando de color (negro a blanco), pero la figura C no cumple con el cambio de color.

RPTA. C

32)



A B C D E

<u>Resolución</u>:

Cualquiera de las figuras, excepto una, puede formarse a partir del giro de las demás, por ejemplo si giramos la A, se forma la C y si giramos la C, se forma la D, la que no puede obtenerse de este modo es la B.

RPTA. B

33)

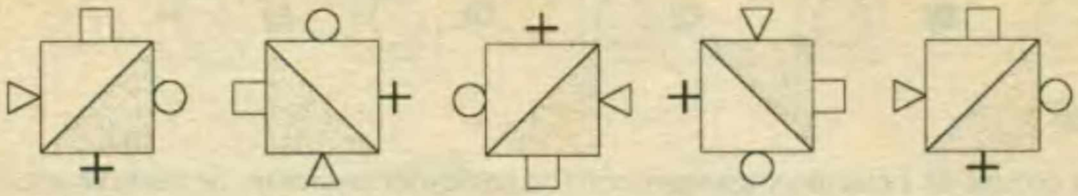


A B C D E

<u>Resolución</u>:

Por un razonamiento idéntico al de la pregunta anterior, observamos que la figura que no puede obtenerse girando a las otras es la figura A, que en realidad es la imagen al espejo de las otras.

RPTA. A

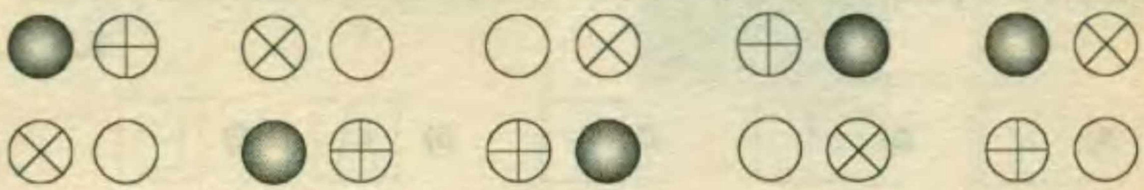
34) 

A **B** **C** **D** **E**

Resolución:

Cualquiera de las figuras, excepto una, puede formarse a partir del giro de las demás, por ejemplo si giramos en sentido horario la E, se forma la D y si giramos esta se forma la C, la que no puede obtenerse de este modo es la A.

RPTA. B

35) 

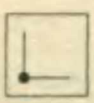
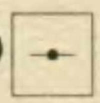
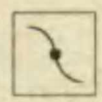
A **B** **C** **D** **E**

Resolución:

Cualquiera de las figuras, excepto una, puede formarse a partir del giro de las demás, por medio de un eje colocado sobre el plano de la hoja .Por ejemplo con un eje horizontal giramos A para obtener B. Con un eje vertical giramos B para obtener C. Con un eje horizontal giramos C para obtener D, sin embargo por este método no podemos obtener E.

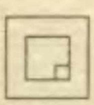
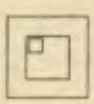
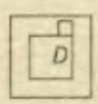
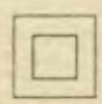
RPTA. E

En cada una de las preguntas 36 al 40, reconozca ¿Cuál de las figuras no guarda relación con las demás?

36) **A)**  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

Resolución:

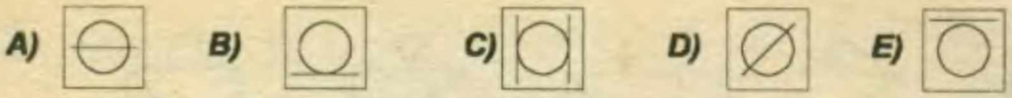
Se excluye la E, porque las demás están formadas por segmentos rectos. RPTA. E

37) **A)**  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

Resolución:

En cada figura hay dos cuadrados : Uno grande y otro pequeño, excepto en la E.

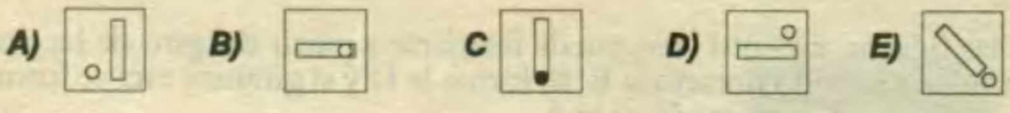
RPTA. E

38) 

<u>Resolución</u>:

Cada figura consta de 1 círculo y un segmento en cualquier posición. Se excluye la C porque tiene dos segmentos.

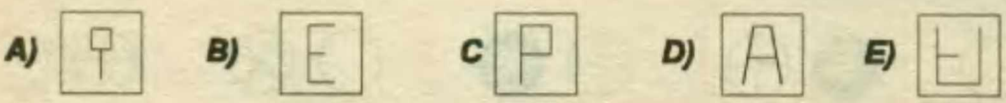
RPTA. C

39) 

<u>Resolución</u>:

Se excluye la C porque el pequeño círculo acompañante no debe estar pintado.

RPTA. C

40) 

<u>Resolución</u>:

Cada figura está conformada por cuatro segmentos rectos, excepto la 1^{ra} que tiene cinco.

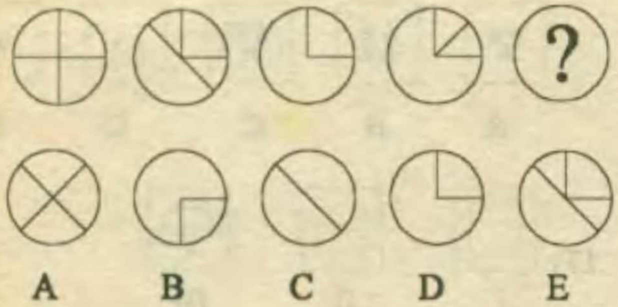
RPTA. A

PROBLEMAS PROPUESTOS

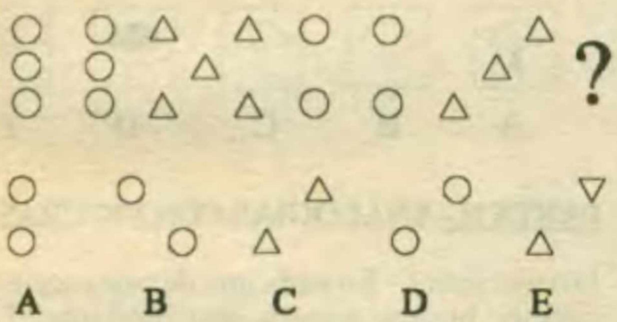
PARTE I.- SUCESION DE SIMBOLOS

Instrucciones.- Determinar la figura que debe reemplazar a la incógnita siguiendo la misma relación que las cuatro primeras.

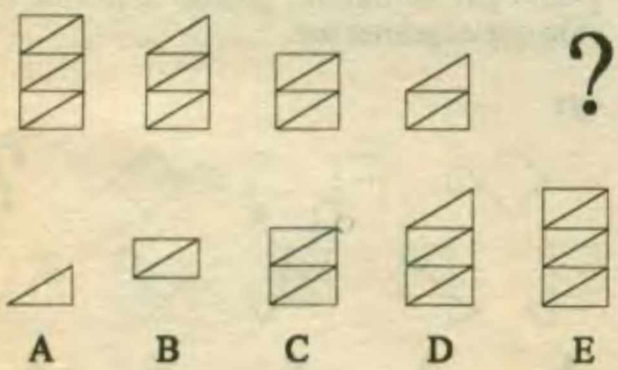
1)



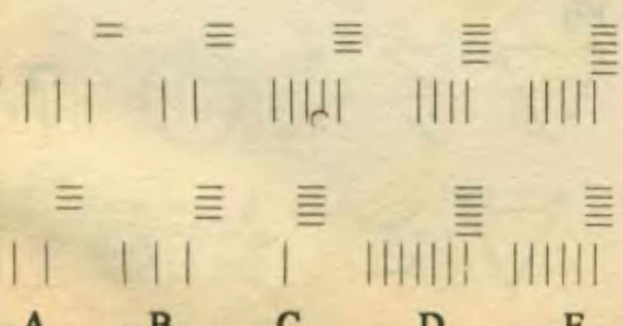
2)



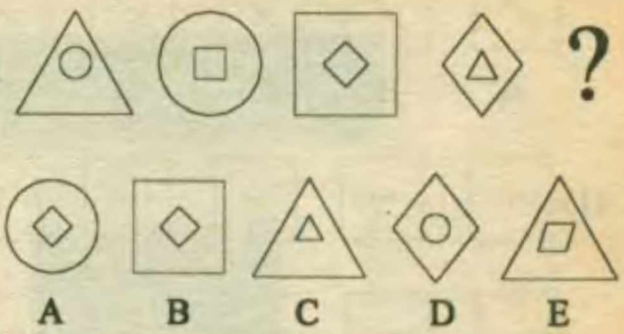
3)



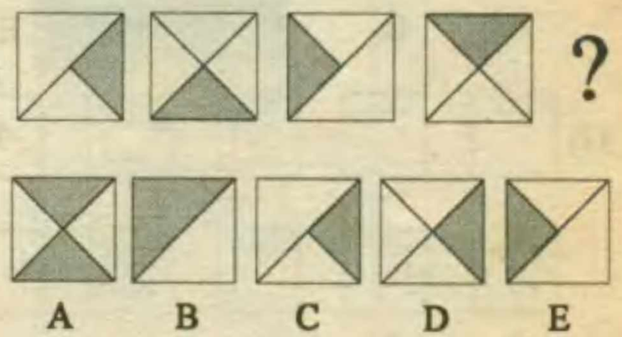
4)



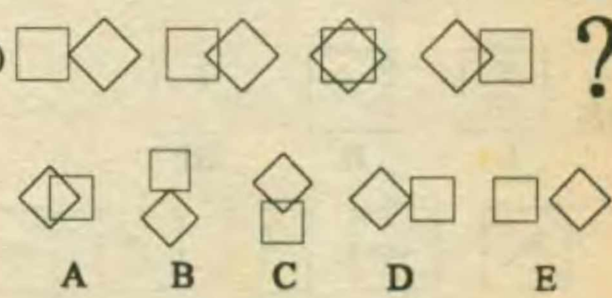
5)



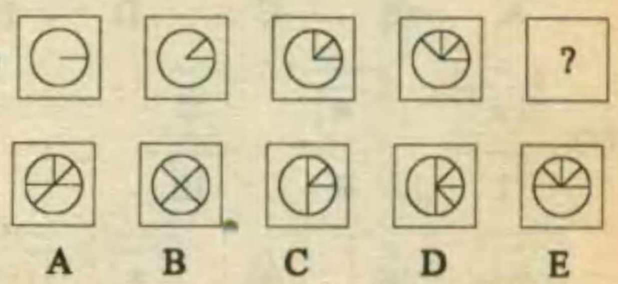
6)



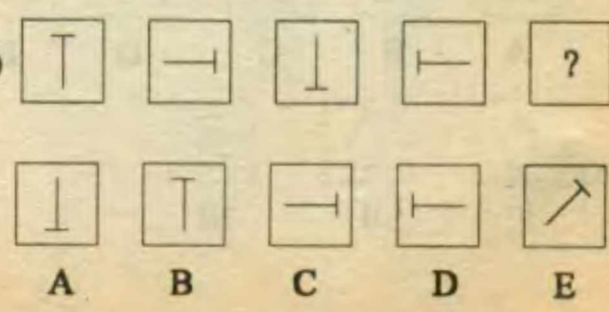
7)



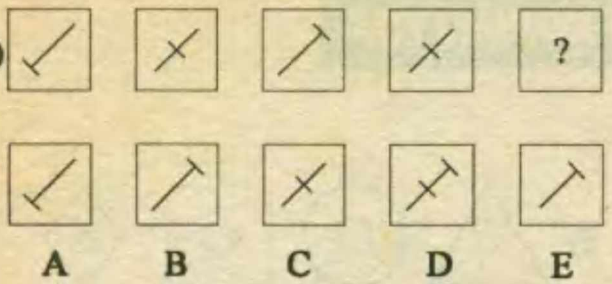
8)



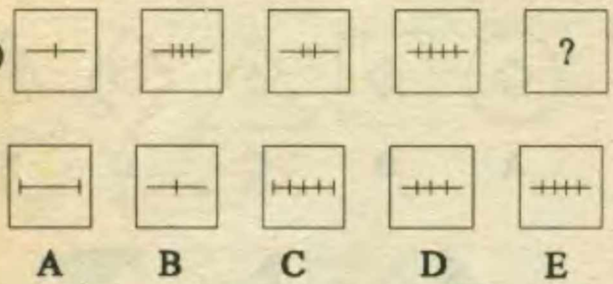
9)



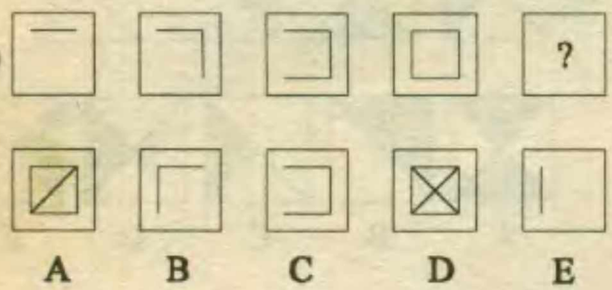
10)



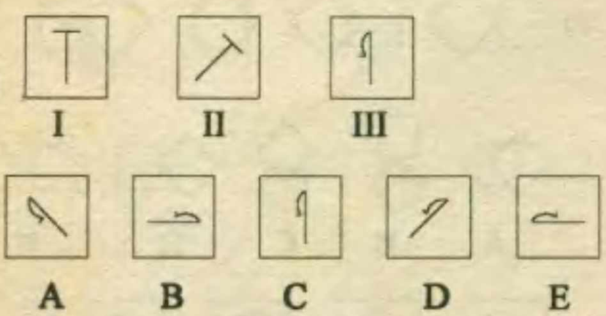
11)



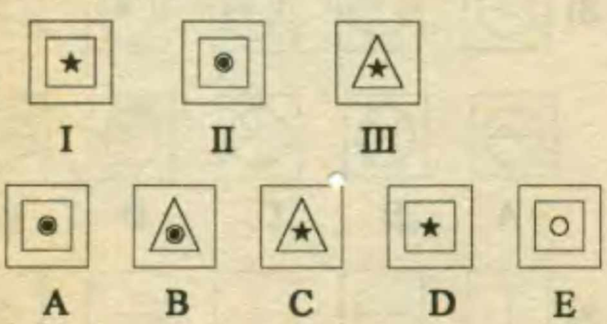
12)



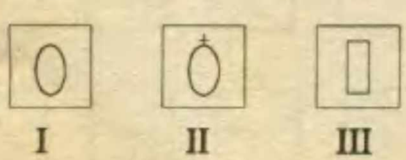
13)

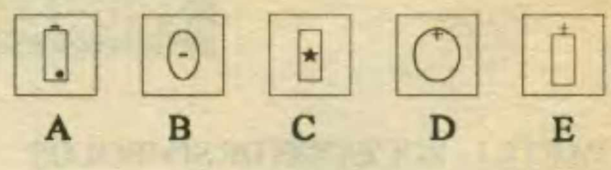


14)

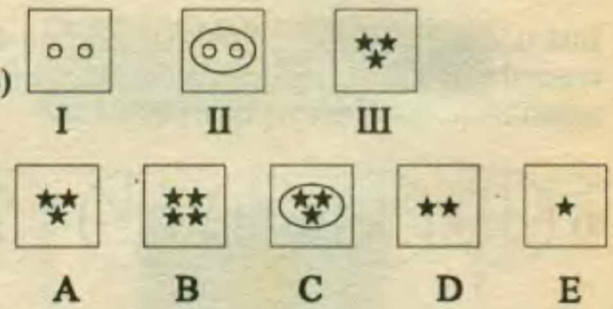


15)

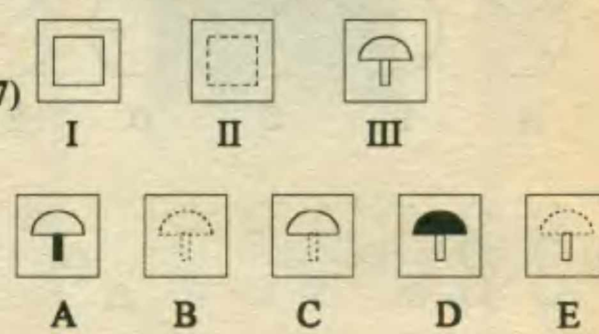




16)



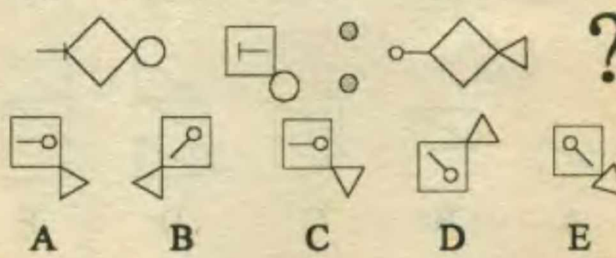
17)



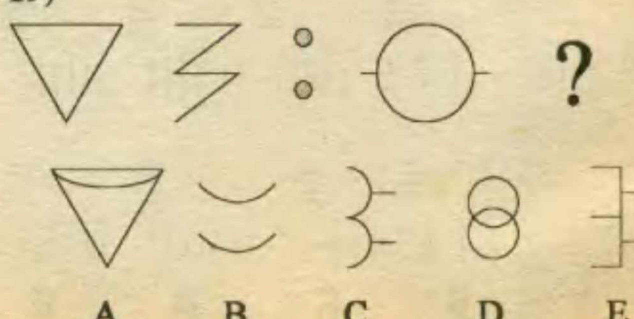
PARTE II.- ANALOGIAS CON FIGURAS

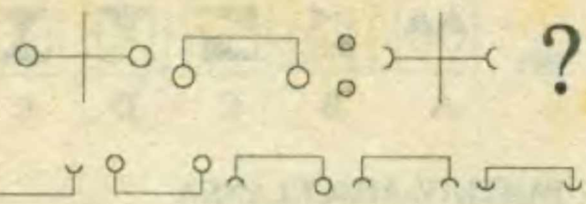
Instrucciones.- En cada una de estas series de figuras, busque aquella que hará que el segundo par de figuras, guarde la misma relación que el primer par.

18)

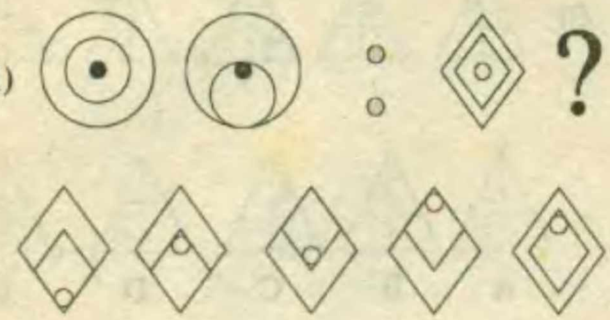


19)

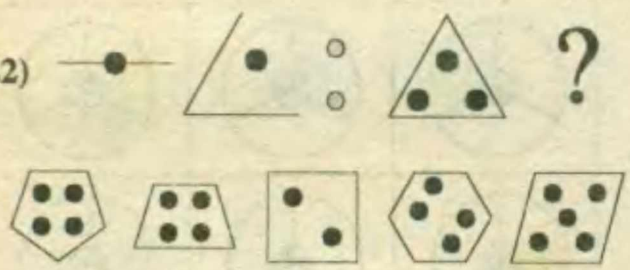


20) 

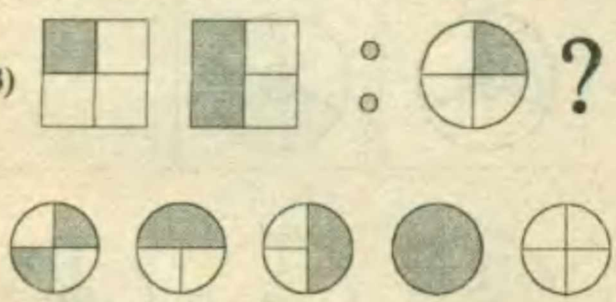
A B C D E

21) 

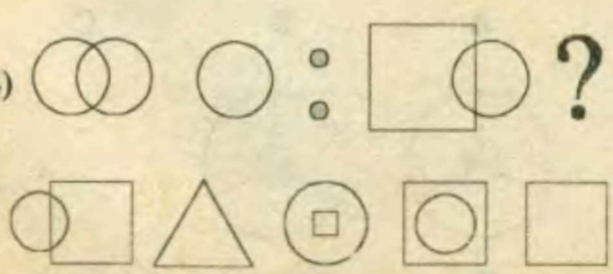
A B C D E

22) 

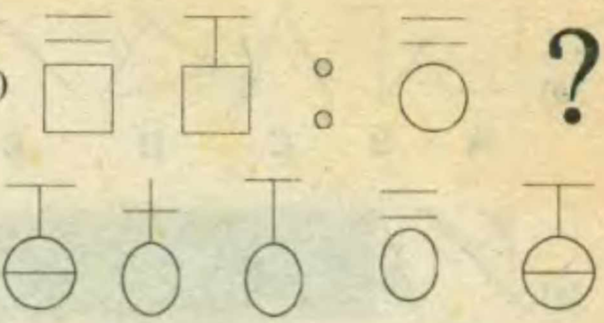
A B C D E

23) 

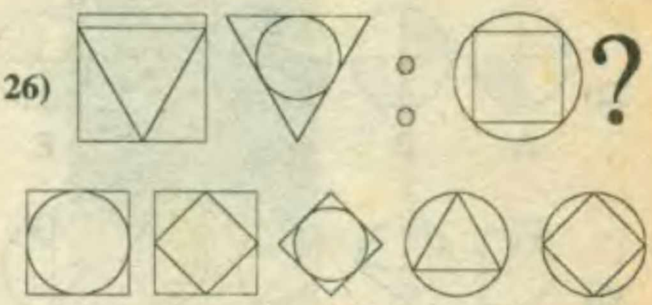
A B C D E

24) 

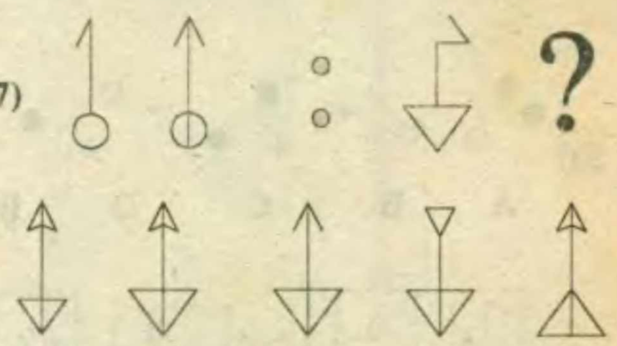
A B C D E

25) 

A B C D E

26) 

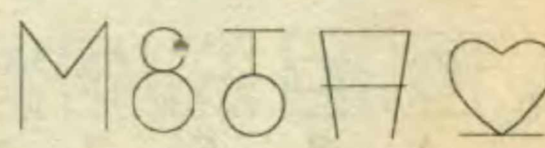
A B C D E

27) 

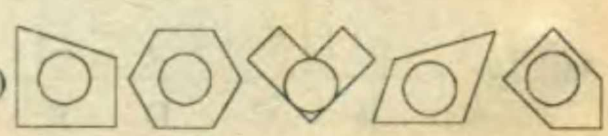
A B C D E

PARTE III.- TERMINO EXCLUIDO

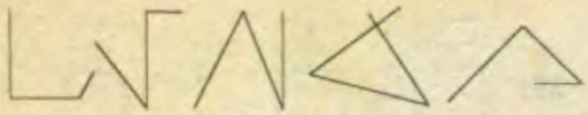
Instrucciones .- En cada una de las siguientes series figuras, determine la que no guarde la misma relación que las cuatro restantes.

28) 

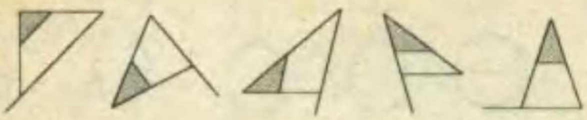
A B C D E

29) 

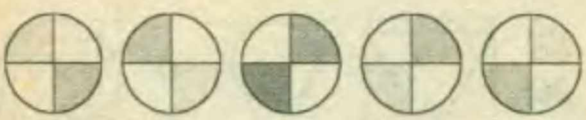
A B C D E

30) 

A B C D E

31) 

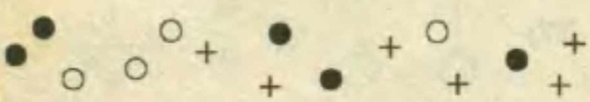
A B C D E

32) 

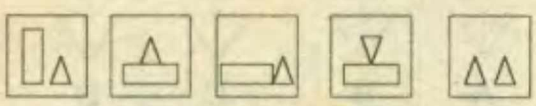
A B C D E

33) 

A B C D E

34) 

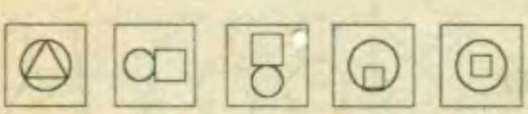
A B C D E

35) 

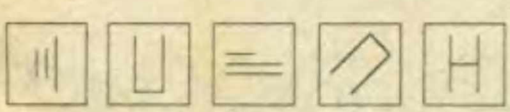
A B C D E

36) 

A B C D E

37) 

A B C D E

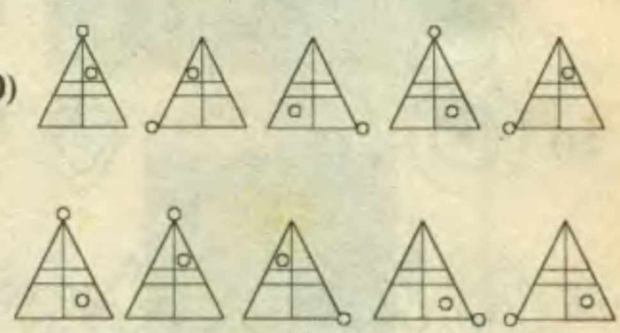
38) 

A B C D E

39) 

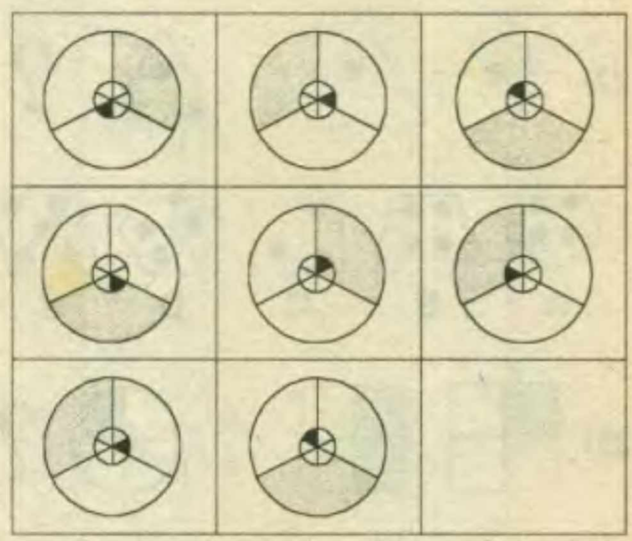
A B C D E

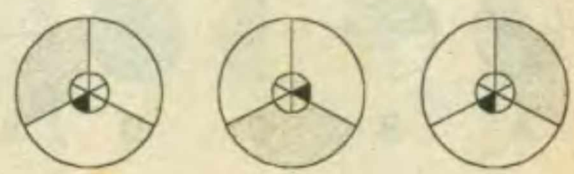
PARTE IV.- MISCELANEA

40) 

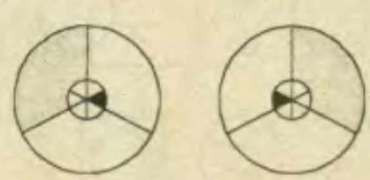
A B C D E

41)





A B C



D E

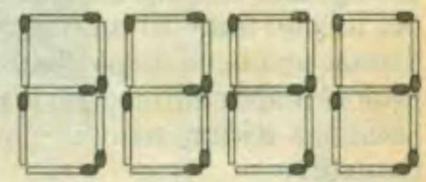
CERILLAS

Las cerillas, sean de papel o de madera, tienen dos propiedades que las hacen idóneas para divertimentos matemáticos. Pueden servir de "*cuentas*" y también de segmentos de longitud unitaria. La recopilación de todos los pasatiempos con cerillas ocuparía un grueso volumen. En este capítulo nos fijaremos en unas cuantas muestras representativas de los trucos, juegos y acertijos, que se pueden realizar con cerillas.

He aquí seis entretenidos pasatiempos con cerillas:

1.- Por ser este el primer ejercicio con cerillas , te presento un caso simple . Dado el siguiente grupo de cerillas, se pide :

1



a) Retirar once cerillas, para dejar seis.

b) Retirar cuatro cerillas, para dejar seis mil cientos sesentiseis.

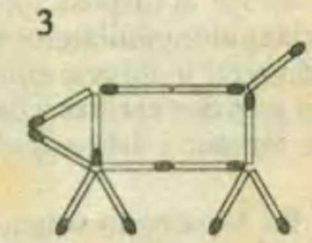
2.- El siguiente ejercicio consiste en dejar fuera a la cereza, para lo cual está permitido hacer únicamente dos movimientos, es decir, moviendo solo 2 cerillas.

2



3.- A continuación se han utilizado 13 cerillas con las cuales se ha dado forma a la silueta de una vaca. Nuestro ejercicio consiste en hacer que el rumeante mire en dirección contraria, para lo cual solo se solicita encontrar el menor número de movimientos de cerillas para lograr nuestro cometido.

3



4.- ¡Un reto a tu destreza! ...

La figura dada está compuesta de 12 cerillas la cual puede modificarse de varias formas. Intenta ser el autor de las siguientes modificaciones:

4



a) Retirando tan solo dos cerillas, forma dos cuadrados.

b) Retirando cuatro cerillas, forma dos cuadrados.

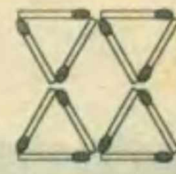
c) Moviendo cuatro palitos, forma otra vez dos cuadrados.

d) Retira dos palitos y forma tres cuadrados.

e) Retira un palito y forma otra vez tres cuadrados.

5.- La figura adjunta es tan solo un ejemplo, en ella se ven triángulos que son todos equiláteros, algunos formados por seis cerillas, y otros solo por tres. Los retos a tu creatividad son los siguientes:

5



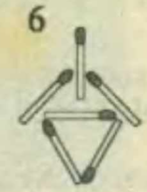
a) Usa siete palitos y forma tres triángulos equiláteros.

b) Con nueve palitos, forma cinco triángulos equiláteros.

c) En la figura del ejemplo, se usaron doce cerillas. Moviendo cuatro, puedes obtener seis triángulos iguales. ¿Cuáles moverías?

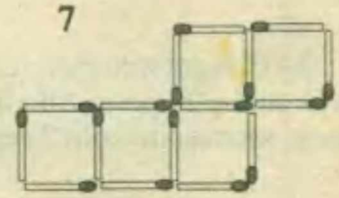
6.- La disposición de las seis cerillas que vemos define un mapa planar que requiere tres colores si se exige que ningún par de regiones con una cerilla de frontera común estén coloreadas del mismo tono. El problema consiste en redisponer las seis y formar un nuevo mapa planar que precise de cuatro colores. Al estar el mapa confinado al plano no hay que descartar la sencilla solución tridimensional consistente en el esqueleto de un tetraedro.

6



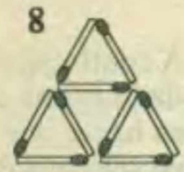
7.- Cambiando la posición de dos cerillas hay que reducir de 5 a 4 el número de cuadrículas unitarias de la figura. No es lícito dejar "cabos sueltos", es decir, cerillas no utilizadas como lados de un cuadrado. Una notable característica de este clásico problemita es que, incluso una vez resuelto, podemos volverlo del revés, volverlo cabeza abajo, o ambas cosas y seguirá siendo casi tal difícil de resolver como lo era inicialmente.

7



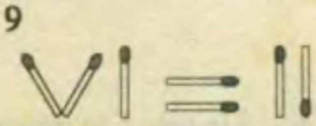
8.- En la disposición de la figura es cosa fácil dejar solo dos triángulos equiláteros retirando cuatro cerillas. Tampoco es difícil lograr lo mismo eliminando tres. ¿Pero sabrá el lector suprimir sólo dos cerillas y dejar dos triángulos equiláteros? Como antes, tampoco deben quedar cabos sueltos.

8



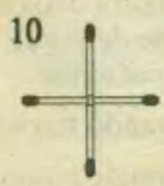
9.- Moviendo solamente una cerilla debemos lograr una igualdad verdadera. No es válido tachar el signo "igual" con una cerilla y obtener una desigualdad verdadera, la expresión final debe ser una auténtica verdad.

9



10.- Moviendo solamente una cerilla hay que formar un cuadrado. (La vieja broma de deslizar uno o dos milímetros hacia arriba la cerilla central superior, y dejar en el centro de la cruz un minúsculo hueco cuadrado no es válida. La solución también es humorística, pero la broma va ahora por muy distinto camino).

10



CLAVES DE RESPUESTAS

CAPITULO 1: METODOS BASICOS DE SOLUCION

01.- C 02.- A 03.- A 04.- B 05.- E 06.- C 07.- A 08.- E 09.- B 10.- C 11.- B 12.- E 13.- C 14.- B 15.- C
16.- D 17.- A 18.- E 19.- E 20.- B 21.- B 22.- D 23.- B 24.- A 25.- E 26.- C 27.- C 28.- D 29.- C 30.- C
31.- C 32.- D 33.- B 34.- C 35.- C 36.- D 37.- C 38.- B 39.- C 40.- A 41.- E 42.- E 43.- E

CAPITULO 2: METODOS DE SOLUCION ESPECIALES

01.- B 02.- D 03.- A 04.- B 05.- D 06.- E 07.- C 08.- E 09.- B 10.- E 11.- E 12.- C 13.- C 14.- B 15.- D
16.- C 17.- E 18.- C 19.- B 20.- B 21.- C 22.- D 23.- A 24.- C 25.- B 26.- E 27.- D 28.- E 29.- B 30.- D
31.- B 32.- E 33.- B 34.- A 35.- C 36.- A 37.- B 38.- B 39.- B 40.- B

CAPITULO 3: SUCESIONES

01.- A 02.- B 03.- C 04.- C 05.- A 06.- C 07.- E 08.- E 09.- D 10.- E 11.- C 12.- C 13.- D 14.- A 15.- D
16.- E 17.- C 18.- B 19.- C 20.- A 21.- A 22.- E 23.- C 24.- C 25.- E 26.- A 27.- D 28.- A 29.- B 30.- C
31.- B 32.- B 33.- A 34.- C 35.- D 36.- B 37.- D 38.- B 39.- E 40.- B

CAPITULO 4: ANALOGIAS Y DISTRIBUCIONES

01.- B 02.- C 03.- D 04.- C 05.- C 06.- B 07.- E 08.- A 09.- E 10.- B 11.- A 12.- E 13.- C 14.- C 15.- C
16.- E 17.- A 18.- B 19.- C 20.- A 21.- D 22.- E 23.- A 24.- D 25.- B 26.- C 27.- A 28.- E 29.- E 30.- D
31.- C 32.- D 33.- C 34.- B 35.- D 36.- D 37.- D 38.- D 39.- D 40.- B 41.- C 42.- C 43.- E 44.- E 45.- B

CAPITULO 5: SERIES

01.- B 02.- C 03.- B 04.- B 05.- C 06.- A 07.- B 08.- E 09.- D 10.- D 11.- C 12.- E 13.- D 14.- A 15.- C
16.- B 17.- D 18.- E 19.- A 20.- A 21.- D 22.- A 23.- B 24.- C 25.- E 26.- E 27.- A 28.- C 29.- E 30.- E
31.- C 32.- B 33.- D 34.- B 35.- D 36.- C 37.- E 38.- B 39.- B 40.- D 41.- C 42.- C 43.- D 44.- B 45.- C

CAPITULO 6: NUMEROS Y FIGURAS

01.- D 02.- A 03.- C 04.- E 05.- D 06.- D 07.- E 08.- A 09.- D 10.- E 11.- E 12.- C 13.- B 14.- C 15.- B
16.- E 17.- C 18.- D 19.- D 20.- E 21.- C 22.- D 23.- A 24.- B 25.- C 26.- D 27.- E 28.- B 29.- E 30.- D
31.- B 32.- E 33.- C 34.- B 35.- C 36.- D 37.- A

CAPITULO 7: OPERADORES

01.- E 02.- A 03.- D 04.- C 05.- A 06.- D 07.- C 08.- C 09.- E 10.- B 11.- E 12.- D 13.- E 14.- A 15.- B
16.- C 17.- A 18.- B 19.- A 20.- E 21.- B 22.- B 23.- C 24.- E 25.- D 26.- D 27.- E 28.- C 29.- D 30.- B
31.- B 32.- D 33.- C 34.- E 35.- D 36.- E 37.- B 38.- D 39.- A 40.- B 41.- C 42.- D 43.- E 44.- A 45.- B
46.- C 47.- E

CAPITULO 8: HABILIDAD OPERATIVA

01.- D 02.- D 03.- A 04.- C 05.- B 06.- B 07.- C 08.- E 09.- E 10.- B 11.- A 12.- C 13.- D 14.- D 15.- C
16.- E 17.- E 18.- C 19.- B 20.- E 21.- A 22.- D 23.- D 24.- E 25.- D 26.- E 27.- E 28.- C 29.- B 30.- D
31.- B 32.- B 33.- D 34.- C 35.- D 36.- B 37.- C 38.- D 39.- A 40.- E 41.- D 42.- A 43.- D 44.- C 45.- A
46.- D

CAPITULO 9: TEORIA DE CONJUNTOS

01.- C 02.- D 03.- C 04.- A 05.- E 06.- B 07.- B 08.- B 09.- B 10.- C 11.- C 12.- E 13.- C 14.- D 15.- B
16.- B 17.- D 18.- C 19.- D 20.- B 21.- D 22.- D 23.- D 24.- C 25.- E 26.- B 27.- E 28.- E 29.- A 30.- B
31.- A 32.- A 33.- B 34.- C 35.- E 36.- C 37.- C 38.- C 39.- B 40.- D 41.- D 42.- A 43.- A 44.- E

CAPITULO 10: GEOMETRIA BASICA

01.- B 02.- D 03.- C 04.- D 05.- C 06.- B 07.- B 08.- A 09.- D 10.- B 11.- C 12.- B 13.- B 14.- E 15.- C
16.- A 17.- C 18.- D 19.- B 20.- A 21.- E 22.- D 23.- A 24.- B 25.- B 26.- C 27.- B 28.- B 29.- B 30.- D
31.- E 32.- C 33.- C 34.- C 35.- C 36.- E 37.- D 38.- B 39.- C 40.- A

CAPITULO 11: PLANTEO DE ECUACIONES

01.- A 02.- E 03.- C 04.- D 05.- B 06.- A 07.- A 08.- B 09.- D 10.- C 11.- B 12.- A 13.- B 14.- A 15.- B
16.- B 17.- B 18.- B 19.- D 20.- D 21.- B 22.- D 23.- B 24.- D 25.- D 26.- E 27.- C 28.- E 29.- C 30.- B
31.- B 32.- B 33.- C 34.- D 35.- B 36.- D 37.- B 38.- D 39.- C 40.- A 41.- C

CAPITULO 12: PROBLEMAS SOBRE NUMEROS

01.- C 02.- A 03.- A 04.- C 05.- D 06.- D 07.- A 08.- E 09.- B 10.- E 11.- C 12.- A 13.- C 14.- C 15.- C
16.- A 17.- D 18.- B 19.- D 20.- D 21.- E 22.- A 23.- B 24.- C 25.- A 26.- C 27.- C 28.- B 29.- B 30.- C
31.- D 32.- B 33.- C 34.- D 35.- B 36.- B 37.- C 38.- C 39.- A

CAPITULO 13: FRACCIONES

01.- B 02.- A 03.- D 04.- B 05.- A 06.- A 07.- C 08.- C 09.- B 10.- E 11.- C 12.- D 13.- C 14.- C 15.- E
16.- D 17.- B 18.- D 19.- B 20.- E 21.- E 22.- E 23.- E 24.- C 25.- C 26.- B 27.- A 28.- D 29.- C 30.- C
31.- C 32.- C 33.- B 34.- C 35.- C 36.- D 37.- C 38.- E 39.- D 40.- C 41.- E 42.- E 43.- B 44.- B 45.- E
46.- B

CAPITULO 14: PORCENTAJES

01.- D 02.- C 03.- C 04.- C 05.- B 06.- B 07.- B 08.- B 09.- C 10.- C 11.- B 12.- D 13.- E 14.- A 15.- C
16.- B 17.- E 18.- C 19.- D 20.- A 21.- B 22.- B 23.- A 24.- C 25.- C 26.- D 27.- D 28.- A 29.- B 30.- B
31.- C 32.- A 33.- B 34.- D 35.- C 36.- D 37.- B 38.- D 39.- D 40.- C 41.- E 42.- A 43.- D 44.- A 45.- E
46.- E 47.- B 48.- C

CAPITULO 15: PROPORCIONALIDAD

01.- A 02.- A 03.- B 04.- A 05.- B 06.- D 07.- C 08.- D 09.- C 10.- D 11.- B 12.- B 13.- C 14.- B 15.- E
16.- B 17.- A 18.- D 19.- E 20.- A 21.- C 22.- D 23.- E 24.- B 25.- D 26.- D 27.- E 28.- A 29.- E 30.- D
31.- D 32.- A 33.- B 34.- C 35.- A 36.- E 37.- D

CAPITULO 16: PROBLEMAS SOBRE EDADES

01.- E 02.- E 03.- C 04.- B 05.- A 06.- B 07.- B 08.- A 09.- D 10.- C 11.- A 12.- D 13.- B 14.- C 15.- A
16.- B 17.- B 18.- B 19.- B 20.- C 21.- C 22.- E 23.- B 24.- D 25.- C 26.- E 27.- D 28.- E 29.- D 30.- D
31.- B 32.- C 33.- B 34.- E 35.- B 36.- D 37.- D 38.- E 39.- B 40.- B 41.- E 42.- A 43.- C 44.- D 45.- B
46.- E

CAPITULO 17: PROBLEMAS SOBRE RELOJES

01.- D 02.- E 03.- A 04.- A 05.- E 06.- B 07.- D 08.- D 09.- D 10.- D 11.- B 12.- A 13.- D 14.- C 15.- D
16.- C 17.- E 18.- D 19.- D 20.- A 21.- A 22.- C 23.- B 24.- C 25.- B 26.- B 27.- A 28.- C 29.- E 30.- B
31.- E 32.- D 33.- C 34.- A 35.- B 36.- C 37.- E 38.- B 39.- D 40.- B 41.- D 42.- B 43.- C 44.- D 45.- C
46.- C 47.- E 48.- C 49.- B

CAPITULO 18: CRIPTOARITMETICA

01.- A 02.- D 03.- C 04.- B 05.- D 06.- B 07.- D 08.- B 09.- A 10.- A 11.- D 12.- A 13.- C 14.- B 15.- D
16.- D 17.- B 18.- C 19.- E 20.- E 21.- D 22.- B 23.- B 24.- D 25.- B 26.- B 27.- C 28.- C 29.- C 30.- B
31.- B 32.- D 33.- D 34.- E 35.- C 36.- B 37.- C

CAPITULO 19: PROMEDIOS Y GRAFICOS ESTADISTICOS

01.- D 02.- B 03.- D 04.- C 05.- E 06.- D 07.- E 08.- C 09.- D 10.- B 11.- C 12.- C 13.- D 14.- E 15.- A
16.- E 17.- D 18.- C 19.- B 20.- C 21.- B 22.- B 23.- D 24.- A 25.- B 26.- B 27.- D 28.- D 29.- D 30.- B
31.- D 32.- C 33.- C 34.- C 35.- B 36.- D 37.- B 38.- E 39.- E 40.- B 41.- E 42.- B 43.- C 44.- D 45.- B
46.- B 47.- C 48.- A

CAPITULO 20: MEZCLAS

01.- C 02.- A 03.- B 04.- D 05.- E 06.- D 07.- D 08.- B 09.- B 10.- E 11.- D 12.- B 13.- D 14.- E 15.- E
16.- E 17.- E 18.- A 19.- A 20.- B 21.- C 22.- A 23.- D 24.- C 25.- A 26.- C 27.- A 28.- A 29.- D 30.- D
31.- B 32.- C 33.- A 34.- C 35.- D 36.- B 37.- B 38.- D 39.- C 40.- A 41.- D 42.- C

CAPITULO 21: AREAS Y PERIMETROS

01.- A 02.- D 03.- A 04.- E 05.- E 06.- D 07.- C 08.- D 09.- B 10.- B 11.- B 12.- A 13.- A 14.- B 15.- C
16.- E 17.- C 18.- B 19.- C 20.- D 21.- B 22.- B 23.- B 24.- C 25.- E 26.- A 27.- B 28.- C 29.- D 30.- D
31.- C 32.- C 33.- B 34.- B 35.- A 36.- D 37.- D

CAPITULO 22: AREAS DE REGIONES SOMBREADAS

01.- C 02.- E 03.- C 04.- D 05.- A 06.- C 07.- C 08.- B 09.- B 10.- A 11.- C 12.- D 13.- A 14.- D 15.- E
16.- A 17.- E 18.- C 19.- A 20.- B 21.- D 22.- A 23.- E 24.- C 25.- B 26.- C 27.- A 28.- E 29.- C 30.- D
31.- C 32.- A 33.- A 34.- B 35.- B 36.- E 37.- A 38.- B 39.- C 40.- E 41.- C 42.- C 43.- B 44.- B 45.- B

CAPITULO 23: TIEMPOS DE TRABAJO

01.- A 02.- E 03.- D 04.- C 05.- C 06.- C 07.- B 08.- B 09.- A 10.- B 11.- A 12.- A 13.- B 14.- A 15.- B
16.- B 17.- B 18.- B 19.- C 20.- B 21.- B 22.- C 23.- B 24.- C 25.- E 26.- B 27.- B 28.- D 29.- A 30.- B
31.- A 32.- C 33.- A 34.- D 35.- B

CAPITULO 24: PROBLEMAS MERCANTILES

01.- C 02.- C 03.- D 04.- C 05.- C 06.- E 07.- B 08.- A 09.- D 10.- D 11.- B 12.- A 13.- D 14.- D 15.- E
16.- D 17.- D 18.- C 19.- D 20.- E 21.- D 22.- E 23.- B 24.- C 25.- D 26.- B 27.- B 28.- A 29.- C 30.- C
31.- C 32.- A 33.- C 34.- A 35.- C 36.- B 37.- A

CAPITULO 25: MÓVILES

01.- D 02.- B 03.- A 04.- B 05.- C 06.- A 07.- D 08.- E 09.- A 10.- C 11.- C 12.- E 13.- C 14.- A 15.- D
16.- A 17.- E 18.- C 19.- D 20.- B 21.- C 22.- B 23.- B 24.- B 25.- C 26.- C 27.- D 28.- A 29.- C 30.- D
31.- E 32.- A 33.- B 34.- D 35.- B 36.- E 37.- E 38.- C 39.- E 40.- D

CAPITULO 26: COMBINATORIA

01.- A 02.- B 03.- A 04.- C 05.- A 06.- B 07.- E 08.- E 09.- C 10.- B 11.- C 12.- B 13.- D 14.- B 15.- D
16.- A 17.- B 18.- D 19.- B 20.- B 21.- B 22.- C 23.- B 24.- C 25.- E 26.- C 27.- C 28.- A 29.- D 30.- C
31.- D 32.- C 33.- E 34.- A 35.- D 36.- D 37.- B 38.- C 39.- E 40.- D

CAPITULO 27: RAZONAMIENTO LOGICO

01.- C 02.- C 03.- E 04.- E 05.- C 06.- B 07.- E 08.- B 09.- C 10.- C 11.- E 12.- D 13.- C 14.- E 15.- D
16.- C 17.- B 18.- B 19.- E 20.- D 21.- A 22.- E 23.- A 24.- D 25.- D 26.- C 27.- B 28.- C 29.- D 30.- E
31.- D 32.- E 33.- A 34.- C 35.- B 36.- E 37.- E 38.- D 39.- B 40.- A 41.- A 42.- B 43.- D

CAPITULO 28: AXIOMAS DE ORDEN

01.- A 02.- E 03.- B 04.- A 05.- A 06.- C 07.- B 08.- B 09.- B 10.- B 11.- B 12.- B 13.- B 14.- E 15.- E
16.- A 17.- A 18.- D 19.- B 20.- C 21.- A 22.- C 23.- C 24.- E 25.- B 26.- B 27.- A 28.- B 29.- C 30.- C
31.- D 32.- D 33.- C 34.- D 35.- D 36.- A 37.- B 38.- C 39.- E 40.- C 41.- E

CAPITULO 29: MAXIMOS Y MINIMOS

01.- A 02.- D 03.- C 04.- C 05.- A 06.- A 07.- D 08.- A 09.- D 10.- A 11.- D 12.- B 13.- C 14.- D 15.- E
16.- B 17.- D 18.- D 19.- B 20.- A 21.- D 22.- A 23.- C 24.- C 25.- C 26.- A 27.- D 28.- C 29.- C 30.- A
31.- C 32.- A 33.- B 34.- B 35.- B 36.- D 37.- E 38.- B 39.- C 40.- C 41.- D 42.- E 43.- C

CAPITULO 30: RAZONAMIENTO ABSTRACTO

01.- D 02.- C 03.- B 04.- E 05.- C 06.- D 07.- D 08.- E 09.- B 10.- A 11.- D 12.- A 13.- D 14.- B 15.- E
16.- C 17.- B 18.- A 19.- C 20.- D 21.- B 22.- B 23.- C 24.- E 25.- E 26.- A 27.- B 28.- E 29.- B 30.- D
31.- D 32.- C 33.- A 34.- A 35.- E 36.- D 37.- A 38.- A 39.- D 40.- C 41.- C

BIBLIOGRAFIA

1- **Matemáticas Contemporáneas**
Jack R. Britton - Ignacio Bello.
Harla S.A. - México.

2- **Ejercicios y Problemas de Matemática**
Armando Rojo - Silvia Sánchez - Mario Greco.
Librería "El Ateneo" Editorial - Argentina.

3- **Sugerencias para Resolver Problemas**
National Council of teachers Mathematics USA.
Editorial Trillas - México.

4- **La Magia de los Números**
Paul Karlson
Editorial Labor S.A - Barcelona.

5- **Pensamiento Visual**
Marco Meirovitz - Paul I. Jacobs.
Ediciones Martínez Roca S.A - Barcelona

6- **Know Your Own I.Q.**
H. J. Eysenck
Penguin Books - Great Britain

7- **Aritmética General y Mercantil**
Carlos Mataix Aracil.
Editorial Dossat S.A. - Madrid

8- **Ejercicios y Problemas de Aritmética**
Manuel García Ardura.
Librería y Casa Editorial Hernando S.A. - Madrid

9- **Prealgebra**
Phares O' Daffer - Stanley Clemens
Addison - Wesley Iberoamericana - California.

10- **Algebra Intermerdia**
Paul K. Rees - Fred W. Sparks
Mc Graw-Hill Book Company

11- **Algebra Superior**
H. S. Hall - S.R. Knight
Uteha S.A. - México.

12- **Algebra Recreativa**
Yakov Perelman
Editorial Mir - Moscú

13- **1 000 Problemas de Aritmética Algebra, Geometría y Trigonometría.**
M. Antonov y Otros
Paraninfo S.A. - Madrid.

14 - **Problemas de Concurso**
Charles Salkind
Editorial Norma - Colombia

15- **Cómo Ingresar a la Universidad**
José Peñaranda - Gerardo Peñaranda.
Peñaranda Asociados Editores

16- **Matemática Moderna**
Robert Eicholz - Phares O' Dffer - Charles Brumfiel
Fondo Educativo Interamericano S.A.

17- **Números y Operaciones**
José Ramón Cáruncho Castro.
Santillana S.A. - Madrid.

18- **Problemas para Resolver con Computadora**
Donald D. Spencer
Editorial Limusa - México.

19- **La Danza de los Números**
Héctor Antoñana
Ediciones Mensajero - Bilbao

20- **Diversiones Matemáticas**
Rafael Rodríguez Vidal
Editorial Reverte S.A. - Barcelona

21- **Nuevo Libro de Tests**
Jack Schaffer
Editorial V Siglos S.A. - México

22- **Miscelánea Matemática**
Martin Gardner
Salvat Editores S.A - Barcelona

23- **Curiosidades Matemáticas.**
Bernabé Flores
Alianza Editorial

24- **El Juego de la Lógica**
Lewis Carroll
Alianza Editorial

25- **Elementos de Geometría Euclideana**
Alberto Luque Luna
Limusa - México

26- **Matemática Recreativa 1, 2, 3**
Michael Holt
Editorial Martínez Roca - Barcelona.

27- **Exámenes de Admisión**
(UNMSM - PUCP - UNFV - UPCH - UNI - UNALM)

Otros libros de la misma colección !!





